Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 3 (138), 2023

Математика

УДК 512.542

О центре разрешимого графа некоторых простых неабелевых групп лиева типа

П.В. Бычков[1], С.Ф. Каморников[1*], В.Н. Тютянов[2*]

Разрешимым графом, соответствующим конечной группе *G*, называется простой граф, вершины которого являются простыми делителями порядка группы *G*, и два различных простых числа *p* и *q* соединены ребром тогда и только тогда, когда в группе *G* существует разрешимая подгруппа, порядок которой делится на *pq*. В статье мы изучаем центр разрешимого графа некоторых простых неабелевых групп лиева типа.

Ключевые слова: конечная группа, неабелева простая группа, разрешимый граф группы, центр графа.

The solvable graph associated with a finite group *G* is a simple graph whose vertices are the prime divisors of |*G*| and two distinct primes *p* and *q* are joined by an edge if and only if there exists a solvable subgroup of *G* whose order is divisible by *pq*. In the article, we study the center of soluble graph of some simple groups of Lie type.

Keywords: finite group, non-abelian simple group, solvable graph of a group, center of a graph.

Введение. Все рассматриваемые в работе группы являются конечными. Используются стандартные определения и обозначения теории групп, которые могут быть найдены в [1] и [2].

Разрешимым графом, соответствующим группе *G*, называется такой простой граф $\Gamma_{sol}(G)$, вершины которого являются простыми делителями порядка группы *G* (т. е. $V(\Gamma_{sol}(G)) = \pi(G)$), и два различных простых числа *p* и *q* соединены ребром (т. е. $(p, q) \in E(\Gamma_{sol}(G))$) тогда и только тогда, когда в группе *G* существует разрешимая подгруппа, порядок которой делится на *pq*.

Понятие графа разрешимости введено в работе [3] как обобщение графа Грюнберга-Кегеля. Очевидно, граф Грюнберга-Кегеля $GK(G)$ группы *G* является подграфом графа $\Gamma_{sol}(G)$, но при этом граф $\Gamma_{sol}(G)$ простой группы *G* всегда связен [3]. Как следует из [4], граф разрешимости полезен для изучения структуры конечной группы и получения критериев ее непростоты.

Вершина графа Γ называется *центральной*, если она смежна со всеми другими вершинами Γ. *Центр* графа Γ – это множество всех его центральных вершин (центр графа Γ мы обозначаем $Z(\Gamma)$). Напомним, что простой неориентированный граф, в котором каждая пара различных вершин смежна, называется *полным* или *кликой*. Понятно, что граф Γ является полным тогда и только тогда, когда $Z(\Gamma) = V(\Gamma)$.

Очевидно, разрешимый граф разрешимой группы является кликой. Что касается простых неабелевых групп, то их центр может быть пустым. Например, в [5, теорема 2] для спорадических групп показано, что:

1) $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \varnothing$ для любой группы

$$G \in \{M_{11}, M_{12}, M_{22}, M_{23}, M_{24}, J_3, HS, M^cL, O'N, HN, Co_3, Co_2, BM, M\};$$

2) $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{2\}$ для любой группы

*Исследования второго и третьего авторов выполнены при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований и Российского научного фонда (проект Ф23РНФ–237).

$$G \in \{J_1, J_4, Ly, He, Co_1, Suz, Ru, Fi_{22}, Fi_{23}, Fi'_{24}\};$$

3) $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{2,3\}$ для $G \in \{J_2, Th\}$.

Кроме того, в [5, теорема 1] описаны центры разрешимых графов всех простых исключительных групп лиева типа:

1) если $G \cong Sz(q)$, то $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{2\}$;

2) если $G \cong {}^2G_2(q)$, то $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{2;3\}$;

3) если $G \cong {}^3D_4(q)$, то $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{2\}$;

4) если $G \cong {}^2F_4(q)'$, где $q \geq 2$, то $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{2;3\}$;

5) если $G \cong G_2(q)$, то $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{2;3\}$;

6) если $G \cong F_4(q)$, то $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{2\}$;

7) если $G \cong E_6(q)$, то $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \varnothing$ для $q = 3t+1$, где $(t,3)=1$, и $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{3\}$ в остальных случаях;

8) если $G \cong {}^2E_6(q)$, то $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \varnothing$ для $q = 3t-1$, где $(t,3)=1$, и $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{3\}$ в остальных случаях;

9) если $G \cong E_7(q)$ или $G \cong E_8(q)$, то $Z(\Gamma_{sol}(G)) = \{2\}$.

Как отмечено в [5], порядки центров графов разрешимости знакопеременных групп не ограничены в совокупности.

В связи с отмеченным Л.С. Казариным в [6] под номером 7 была сформулирована следующая задача: описать простые группы *G* лиева типа, для которых центр разрешимого графа не является пустым. В данной работе эта задача решается в случае, когда $G \in \{PSL_2(q), PSL_3(q), PSU_3(q)\}$.

Наша главная цель – доказательство следующих теорем:

Теорема 1. *Пусть* $G \cong PSL_2(q)$, *где* $q = p^n \geq 4$ *для некоторого простого числа p. Тогда* $Z(\Gamma_{sol}(G)) \neq \varnothing$ *за исключением случаев, когда одновременно выполняются условия:*

a) $p \geq 7$;

b) $(q-1)/2$ *и* n *– нечетные числа*;

c) *q не является простым числом Мерсенна.*

Теорема 2. *Пусть* $G \cong PSL_3(q)$, *где* $q = p^n \geq 2$ *для некоторого простого числа p. Тогда* $Z(\Gamma_{sol}(G)) \neq \varnothing$ *за исключением случаев, когда одновременно выполняются условия:*

a) $q = 3t+1$, *где* $t \geq 1$;

b) $(3,t)=1$;

c) *q не является простым числом Мерсенна.*

Теорема 3. *Пусть* $G \cong PSU_3(q)$, *где* $q = p^n \geq 2$ *для некоторого простого числа p. Тогда* $Z(\Gamma_{sol}(G)) \neq \varnothing$ *за исключением случаев, когда одновременно выполняются условия:*

a) $q = 3t+1$, *где* $t \geq 1$;

b) $(3,t)=1$.

Доказательство теоремы 1. Описание подгрупп группы $PSL_2(q)$ содержится в известной теореме Диксона в [7, теорема II.8.27]. В дальнейшем будем опираться на нее без дополнительных ссылок.

Отметим, что

$$|G| = \frac{1}{(2,q-1)} q(q^2-1) = \frac{1}{(2,q-1)} q(q-1)(q+1).$$

Пусть *p* = 2. Группа *G* содержит две диэдральные подгруппы $D_{2(q-1)}$ и $D_{2(q+1)}$. Поэтому вершина 2 графа $\Gamma_{sol}(G)$ является смежной со всеми вершинами из множества $\pi(q^2-1) \setminus \{2\}$. Так как $q = 2^n$, то очевидно, что $2 \in Z(\Gamma_{sol}(G))$, т. е. $Z(\Gamma_{sol}(G)) \neq \varnothing$.

Пусть $p = 3$. Группа G содержит две диэдральные подгруппы четных порядков $q-1$ и $q+1$. Следовательно, вершина 2 графа $\Gamma_{sol}(G)$ является смежной со всеми вершинами из множества $\pi(q^2-1)\setminus\{2\}$. Поскольку группа G содержит знакопеременную подгруппу A_4, то вершина 2 является смежной с вершиной 3. Таким образом, $2\in Z(\Gamma_{sol}(G))$ и, следовательно, $Z(\Gamma_{sol}(G))\neq\varnothing$.

Пусть теперь $p = 5$. Тогда группа G содержит знакопеременную подгруппу A_5, имеющую диэдр порядка 10. Далее, как и в случае $p = 3$, показывается, что $2\in Z(\Gamma_{sol}(G))$, а значит, $Z(\Gamma_{sol}(G))\neq\varnothing$.

Таким образом, будем считать, что $p\geq 7$. В этом случае группа G содержит две диэдральные подгруппы четных порядков $q-1$ и $q+1$, а также подгруппу Фробениуса типа $q:\frac{q-1}{2}$. Поэтому если $q\equiv 1 \pmod 4$, то $2\in Z(\Gamma_{sol}(G))$, а значит, $Z(\Gamma_{sol}(G))\neq\varnothing$.

Следовательно, $(q-1)/2$ – нечетное число. Если $n=2k$, где $k\geq 1$, то группа G содержит подгруппу $PSL_2(p^k)^{\cdot}2$, а потому граф $\Gamma_{sol}(G)$ имеет ребро $\{2, p\}$. Отсюда получаем, что $2\in Z(\Gamma_{sol}(G))$ и $Z(\Gamma_{sol}(G))\neq\varnothing$.

Предположим, что n – нечетное число. Отметим, что $(q-1, q+1)=2$ и вершина p не смежна ни с одной из вершин, принадлежащих множеству $\pi(q+1)\setminus\{2\}$. Поэтому в $Z(\Gamma_{sol}(G))$ могут содержаться только вершины из множества $\pi((q-1)/2)$. Отсюда следует, что $Z(\Gamma_{sol}(G))\neq\varnothing$ только в случае, когда $q+1$ является степенью числа 2 и, следовательно, q – простое число Мерсенна.

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. В [8, таблица 8.3, таблица 8.4] приведен список максимальных подгрупп группы $PSL_3(q)$. При доказательстве теоремы 2 мы будем использовать этот результат без дополнительных оговорок.

Отметим, что

$$|G|=\frac{1}{d}q^3(q^2-1)(q^3-1)=\frac{1}{d}q^3(q-1)^2(q+1)(q^2+q+1),$$

где $d=(3,q-1)$. Последовательно рассмотрим случаи $q=3^n$, $q=3t-1$ и $q=3t+1$.

(a) $q=3^n$. Группа G содержит максимальную подгруппу $(q^2+q+1):3$. Поэтому вершина 3 графа $\Gamma_{sol}(G)$ является смежной со всеми вершинами, принадлежащими множеству $\pi(q^2+q+1)$. Поскольку параболическая подгруппа группы G имеет вид $P=q^3:GL_2(q)$, то вершина 3 является смежной со всеми вершинами, принадлежащими множеству $\pi(q^2-1)$. Отсюда и из представленного выше разложения порядка группы G заключаем, что вершина 3 принадлежит центру разрешимого графа группы G, а значит, $Z(\Gamma_{sol}(G))\neq\varnothing$.

(b) $q+1=3t$. Группа G содержит максимальную подгруппу $(q^2+q+1):3$. Поэтому вершина 3 графа $\Gamma_{sol}(G)$ является смежной со всеми вершинами, принадлежащими множеству $\pi(q^2+q+1)$. Ясно, что вершина 3 смежна со всеми вершинами, принадлежащими множеству $\pi(q+1)\setminus\{3\}$. При $q\geq 5$ группа G содержит максимальную подгруппу $(q-1)^2:S_3$ и вершина 3 является смежной со всеми вершинами, принадлежащими множеству $\pi(q-1)$. Поэтому $3\in Z(\Gamma_{sol}(G))$. При $q=2$ имеем, что $G\cong SL_3(2)\cong PSL_2(7)$. В этом случае по теореме 1 $3\in Z(\Gamma_{sol}(G))$.

(c) $q-1=3t$. Ясно, что вершина 3 смежна со всеми вершинами, принадлежащими множеству $\pi(q-1)\setminus\{3\}$. Кроме того, как и в пункте (a) показывается, что вершина 3 графа $\Gamma_{sol}(G)$

является смежной со всеми вершинами, принадлежащими множеству $\pi(q^2+q+1)$. Если $(3,t)=3$, то, так как класс Ашбахера $\mathcal{C}_1$ для группы $SL_3(q)$ содержит параболическую подгруппу $[q^3]:GL_2(q)$, получаем, что вершина 3 смежна в графе $\Gamma_{sol}(G)$ со всеми вершинами из множества $\pi(q+1)$. Таким образом, $3\in Z(\Gamma_{sol}(G))$. Кроме того, если q – простое число Мерсенна, то так как $q+1$ является степенью числа 2, то вершина 3 смежна с вершиной 2 и $3\in Z(\Gamma_{sol}(G))$.

Далее будем считать, что $(3,t)=1$ и q не является простым числом Мерсенна. Покажем, что вершина 3 не смежна хотя бы с одной вершиной из $\pi(q+1)$ в классе максимальных подгрупп геометрического типа. Для максимальных подгрупп геометрического типа достаточно рассмотреть классы Ашбахера $\mathcal{C}_5$ и $\mathcal{C}_8$. Классу $\mathcal{C}_5$ в группе $SL_3(q)$ соответствует максимальная подгруппа $SL_3(q_0).((q-1)/(q_0-1),3)$, где $q=q_0^r$ для некоторого простого числа r. Имеют место равенства: $q+1=p^n+1$ и $q_0+1=p^{n/r}+1$. Отсюда получаем, что

$$p^{2n}-1=(p^n-1)(p^n+1)=(q-1)(q+1)$$

и

$$p^{2n/r}-1=(p^{n/r}-1)(p^{n/r}+1)=(q_0-1)(q_0+1).$$

Поскольку $r\geq 2$, то $2n\geq 4$ и существует число s, которое примитивно по отношению к паре $\{p,2n\}$ (кроме случая, когда $\{p,2n\}=\{2,6\}$); так как для группы $PSL_3(2^6)$ имеем $q-1=2^6-1=3^2\cdot 7$, то в этом случае $3\in Z(\Gamma_{sol}(PSL_3(2^6)))$). Ясно, что s делит $q+1$. Порядок $SL_3(q_0)$ равен $q_0^3(q_0^2-1)(q_0^3-1)$, при этом $q_0^3-1=p^{3n/r}-1$, где $3n/r<2n$. Поэтому $(s,|SL_3(q_0)|)=1$, а значит, в этом случае вершина 3 не является смежной с вершиной $s\in\pi(q+1)$.

Рассмотрим класс $\mathcal{C}_8$. В группе $SL_3(q)$ этому классу соответствуют две максимальные подгруппы $SO_3(q)$ и $(q_0-1,3)\times SU_3(q_0)$. Первый случай тривиален в силу изоморфизма $\Omega_3(q)\cong PSL_2(q)$. Второй случай рассматривается так же, как и для класса $\mathcal{C}_5$ (достаточно заметить, что $q_0^3+1=p^{3n/r}+1=p^k+1$, где $k<2n$).

Если максимальная подгруппа в G содержится в классе $\mathfrak{S}$, то, так как число 3 входит в каноническое разложение порядка группы G в первой степени, имеем, что максимальная подгруппа в G из $\mathfrak{S}$ изоморфна $PSL_2(7)$. Поскольку $3\in Z(\Gamma_{sol}(PSL_2(7)))$, то только в случае $q+1=2^s\cdot 7^l$ вершина 3 принадлежит $Z(\Gamma_{sol}(G))$. В этом случае должно выполняться условие $q=p\equiv 1,2,4\ (mod 7)$, $q\neq 2$. Однако $p\equiv -1 (mod 7)$.

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 3. В [8, таблица 8.5, таблица 8.6] приведен список максимальных подгрупп группы $PSU_3(q)$. При доказательстве теоремы 2 мы будем использовать этот результат без дополнительных оговорок.

Отметим, что

$$|G|=\frac{1}{d}q^3(q^2-1)(q^3+1)=\frac{1}{d}q^3(q-1)(q+1)^2(q^2-q+1),$$

где $d=(3,q+1)$. Последовательно рассмотрим случаи $q=3^n$, $q=3t-1$ и $q=3t+1$.

(a) $q=3^n$. Группа G содержит максимальную подгруппу $(q^2-q+1):3$. Поэтому вершина 3 графа $\Gamma_{sol}(G)$ является смежной со всеми вершинами, принадлежащими множеству $\pi(q^2-q+1)$. Поскольку подгруппа Бореля группы G имеет вид $B=q^3:(q^2-1)$, то вершина 3 является смежной со всеми вершинами из множества $\pi(q^2-1)$. Отсюда и из представленного выше разложения порядка группы G заключаем, что $3\in Z(\Gamma_{sol}(G))$. Следовательно, $Z(\Gamma_{sol}(G))\neq\varnothing$.

(b) $q-1=3t$. Как и в случае (a), вершина 3 графа $\Gamma_{sol}(G)$ смежна со всеми вершинами из множества $\pi(q^2-q+1)$. Так как борелевская подгруппа группы G имеет вид $B=q^3:(q^2-1)$, то вершина 3 является смежной со всеми вершинами, принадлежащими множеству $\pi(q^2-1)\setminus\{3\}\cup\{p\}$ и, следовательно, $3\in Z(\Gamma_{sol}(G))$.

(c) $q+1=3t$. Тогда снова, как и в случае (a), вершина 3 графа $\Gamma_{sol}(G)$ является смежной со всеми вершинами, принадлежащими множеству $\pi(q^2-q+1)$. Если 9 делит $q+1$, то, поскольку порядок подгруппы Бореля группы G равен $\frac{1}{3}q^3(q^2-1)$, заключаем, что $3\in Z(\Gamma_{sol}(G))$. Поэтому $(3,t)=1$. Группа G содержит максимальную подгруппу $SU_3(q_0)((q+1)/(q_0+1),3)$, где $q=q_0^r$ для нечетного простого числа r. Для всех других максимальных подгрупп геометрического типа вершина 3 не является смежной с вершиной p. Если же $((q+1)/(q_0+1),3)=3$, то вершина 3 является смежной с вершиной p. Так как $q-1=p^n-1$, $q_0-1=p^{n/r}-1$ для некоторого простого числа r и $n\geq 3$, то существует простое число s, примитивное по отношению к паре $\{p,n\}$, за исключением случая $\{p,n\}=\{2,6\}$. В первом случае s не делит q_0-1, а поэтому вершина s не является смежной с вершиной 3. Во втором случае $G\cong PSU_3(2^6)$. Поскольку $2^6+1=65$, условие (c) не выполнено, и данный случай является невозможным.

Подгруппы, не являющиеся подгруппами геометрического типа, легко исключаются как и при доказательстве теоремы 2.

Теорема доказана.

Замечание. Примеры групп $PSL_2(11)$, $PSL_3(4)$, $PSU_3(5)$ показывают, что для каждой теоремы имеются группы, у которых центр графа является пустым множеством. Этот факт легко следует из [9].

Литература

1. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–New York : Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

2. Горенстейн, Д. Конечные простые группы. Введение в их классификацию / Д. Горенстейн. – М. : Мир, 1985. – 352 с.

3. Abe, S. A generalization of prime graphs of finite groups / S. Abe, N. Iiyori // Hokkaido Math. J. – 2000. – V. 29, № 2. – P. 391–407.

4. Amberg, B. Criteria for the solubility and non-simplicity of finite groups / B. Amberg, A. Carocca, L. S. Kazarin // J. Algebra. – 2005. – V. 285. – P. 58–72.

5. Kazarin, L. S. On centers of soluble graphs / L. S. Kazarin, V. N. Tyutyanov // Сиб. электрон. матем. изв. – 2021. – Т. 18, № 2. – С. 1517–1530.

6. Маслова, Н. В. Открытые проблемы, сформулированные на XII школе-конференции по теории групп, посвященной 85-летию В.А. Белоногова / Н. В. Маслова, И. Н. Белоусов, Н. А. Минигулов // Тр. ИММ УрО РАН. – 2020. – Т. 26, № 3. – С. 275–285.

7. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin : Springer-Verlag, 1967. – 793 p.

8. Bray, J. N. The maximal subgroups of the low-dimensional finite classical groups / J. N. Bray, D. F. Holt, C. M. Roney-Dougal. – Cambridge : Cambridge University Press, 2013. – 452 p.

9. Conway, J. H. Atlas of finite groups / J. H. Conway, R. T. Curtis, S. P. Norton, R. A. Parker, R. A. Wilson. – London : Clarendon, 1985. – 252 p.

[1]Гомельский государственный
университет имени Франциска Скорины

[2]Гомельский филиал
Международного университета «МИТСО»

Поступила в редакцию 04.11.2022