

## Разработка модели эквивалентной электрической схемы двойной ДНК-подобной планарной спирали

И.В. СЕМЧЕНКО<sup>1,2</sup>, С.А. ХАХОМОВ<sup>2</sup>, А.Л. САМОФАЛОВ<sup>2</sup>, П.В. СОМОВ<sup>2</sup>, А.Ю. КРАВЧЕНКО<sup>3,2</sup>

В работе предложен принципиально новый бианизотропный элемент метаматериалов и метаповерхностей в виде пары полувитковых планарных спиралей. Преимуществами такого элемента являются: высокая резонансная частота, широкополосность взаимодействия с электромагнитным полем, миниатюрность, симметрия структуры, реализуемость в рамках технологий печатных плат. Построена эквивалентная электрическая схема пары полувитковых планарных спиралей. Вычислены эффективные значения сопротивления, ёмкости и индуктивности такого элемента метаматериалов и добротность спирали как колебательного контура.

**Ключевые слова:** метаматериал, метаповерхность, полувитковая планарная спираль, эквивалентная электрическая схема.

The paper proposes a fundamentally new bianisotropic element of metamaterials and meta-surfaces in the form of a pair of half-turn planar spirals. The advantages of such an element are: high resonant frequency, broadband interaction with the electromagnetic field, miniaturization, symmetry of the structure, realizability within the framework of printed circuit board technologies. An equivalent electrical circuit of a pair of half-turn planar spirals is constructed. The effective values of the resistance, capacitance and inductance of such an element of metamaterials and the Q-factor of the spiral as an oscillatory circuit are calculated.

**Keywords:** metamaterial, metasurface, half-turn planar spiral, equivalent electrical circuit.

**Введение.** Идея работы состоит в использовании микрорезонаторов принципиально новой формы, в виде пары полувитковых планарных спиралей, при проектировании и создании фазоманипулирующего метаматериала. Такая спираль состоит только из двух металлических полосок на разных сторонах печатной платы и одного соединительного отверстия, что позволяет значительно уменьшить её размеры. Использование всего половины витка спирали является достаточным для возбуждения в ней колебаний зарядов и одновременно круговых токов. Следовательно, будут индуцироваться электрический дипольный момент и магнитный момент, взаимно согласованные, что приведёт к получению метаматериала в целом с желательными, проектируемыми значениями диэлектрической и магнитной проницаемости. Использование полувитковых спиралей в паре позволит: значительно повысить резонансную частоту, вплоть до миллиметрового диапазона; достичь миниатюризации «метатомов» и повышения плотности их расположения в метаматериале; повысить широкополосность проектируемого устройства. Для использования такой резонансной структуры как элемента электрической цепи необходимо найти эффективные параметры (ёмкость, индуктивность и сопротивление) спирали, вначале гладкой, а затем планарной, выразив их через электромагнитные восприимчивости, или поляризуемости, би-анизотропной частицы.

**Вычисление электроёмкости спирали.** Для вычисления электроёмкости планарной спирали воспользуемся известным в электростатике выражением

$$C = \frac{q}{U}. \quad (1)$$

Эта формула применяется также для квазистационарных токов. Силу тока, возбуждаемого в проводнике (спирали) падающей электромагнитной волной, представим в виде

$$I = I_0 e^{j\omega t}, \quad (2)$$

как принято в радиофизике, где  $j$  – мнимая единица.

Тогда заряд, сосредоточенный на концах спирали, будет равен

$$q = \int Idt = \frac{1}{j\omega} I e^{j\omega t} = -\frac{j}{\omega} I_0 e^{j\omega t} = -\frac{j}{\omega} I. \quad (3)$$

Электрический ток (2) является квазистационарным, то есть не изменяется вдоль проводника, то есть спирали. В этом случае электрические заряды противоположного знака сосредоточены на концах спирали, что качественно соответствует модели конденсатора, обладающего ёмкостью. Напряжение между концами спирали равно

$$U = E_x \cdot H_s, \tag{4}$$

где  $E_x$  – компонента вектора  $\vec{E}$  вдоль оси  $x$  (ось  $ox$  направлена вдоль оси спирали),  $H_s$  – высота спирали, то есть расстояние между её концами.

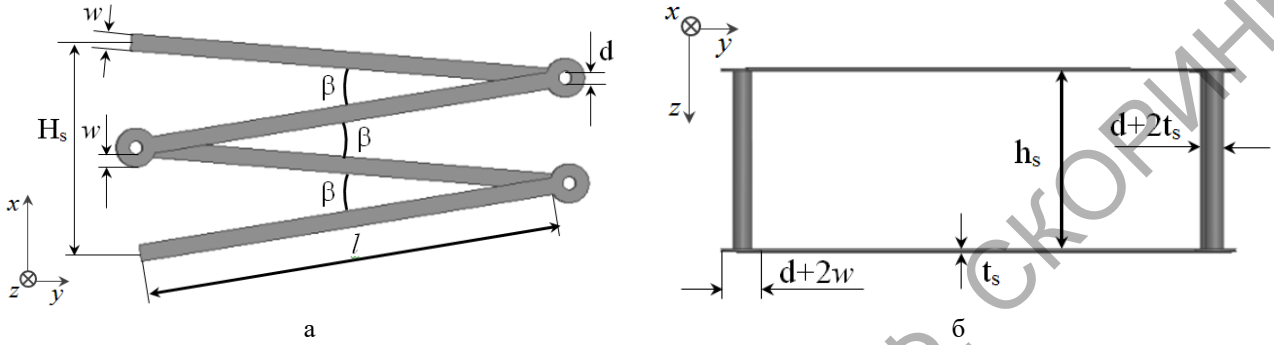


Рисунок 1 – Планарная спираль (в качестве примера показана двухвитковая спираль, предложенная в статье [1]), вид сверху печатной платы, наблюдатель смотрит вслед падающей электромагнитной волне (а) и вид сбоку, вдоль печатной платы (б)

Высоту спирали можно представить в виде

$$H_s = h \cdot N_t, \tag{5}$$

где  $N_t$  – число витков,  $h = \frac{2\pi}{|q|}$  – шаг спирали,  $q$  – удельное кручение, оно может быть положительным и отрицательным, в зависимости от направления закручивания спирали.

Вектор напряженности электрического поля с учётом сдвига фаз между током и напряжением в колебательном контуре (в спирали) равен

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j(\omega t + \varphi)}. \tag{6}$$

Соответственно, компонента  $E_x$  вектора напряженности электрического поля вдоль оси  $ox$  имеет вид

$$E_x = E_{0x} e^{j(\omega t + \varphi)}. \tag{7}$$

Чтобы вычислить электроёмкость спирали, будем использовать уравнения связи для би-анизотропной частицы [2]

$$\vec{p} = \epsilon_0 \alpha_{ee} \vec{E} - j \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \alpha_{em} \vec{H}, \quad \vec{m} = \alpha_{mm} \vec{H} + j \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \alpha_{me} \vec{E}, \tag{8}$$

здесь  $\alpha$  с соответствующим индексом обозначает тензор восприимчивости (поляризуемости) спирали, а  $\vec{p}, \vec{m}, \alpha, \vec{E}, \vec{H}$  – комплексные величины.

Поскольку мы считаем ток квазистационарным (однородным вдоль спирали), то заряды сосредоточены на концах спирали. Тогда модуль электрического дипольного момента спирали  $\vec{p}$  и его компонента вдоль оси  $ox$  равны

$$p = qH_s, \quad p_x = qH_s, \tag{9}$$

так как вектор  $\vec{p}$  направлен вдоль оси  $ox$ . Это верно и для комплексных значений  $p$  и  $q$ . Отсюда следует величина заряда

$$q = \frac{p_x}{H_s} = \frac{p}{H_s}. \tag{10}$$

Если вектор  $\vec{E}$  направлен вдоль оси спирали, то вектор напряжённости магнитного поля  $\vec{H}$  не пронизывает витки спирали и не влияет на возбуждение тока. Тогда из уравнений связи (8) следует

$$p_x = \varepsilon_0 \alpha_{ee}^{(11)} E_x. \quad (11)$$

Здесь  $\alpha_{ee}^{(11)}$  – компонента тензора диэлектрической восприимчивости  $\alpha_{ee}^{(ij)}$ , для которого, в общем случае, индексы  $i$  и  $j$  могут принимать значения от 1 до 3. Используя формулы (10) и (11), получаем

$$q = \frac{\varepsilon_0 \alpha_{ee}^{(11)} E_x}{H_s}. \quad (12)$$

Теперь из соотношений (1) и (4) следует формула для электроёмкости спирали

$$C = \frac{\varepsilon_0 \alpha_{ee}^{(11)}}{H_s^2}. \quad (13)$$

Отметим, что формула (13) приводит к правильной размерности электроёмкости, поскольку диэлектрическая восприимчивость имеет размерность  $\text{м}^{-3}$ . Эффективное значение электроёмкости (13) является, в общем случае, комплексной величиной. В дальнейшем для перехода к классическому значению ёмкости будем использовать модуль величины (13).

**Вычисление индуктивности спирали.** В случае квазистационарного тока (однородного в пределах спирали) модуль вектора магнитного момента спирали  $\underline{m}$  равен

$$m = ISN_t, \quad (14)$$

где  $S$  – площадь витка спирали. Допустим, что магнитное поле направлено вдоль оси спирали, тогда  $H = H_x$ ,  $m = m_x$ . Поскольку в этом случае электрическое поле ортогонально оси спирали и не создаёт электрический ток, из уравнений связи (8) получаем:

$$m = \alpha_{mm}^{(11)} H_x. \quad (15)$$

Здесь  $\alpha_{mm}^{(11)}$  – компонента тензора магнитной восприимчивости спирали  $\alpha_{mm}^{(ij)}$ , для которого, в общем случае, индексы  $i$  и  $j$  могут принимать значения от 1 до 3.

Магнитный поток сквозь спираль равен

$$\Phi = \mu_0 H S N_t = \mu_0 \frac{m}{\alpha_{mm}^{(11)}} S N_t. \quad (16)$$

Выражая магнитный поток через индуктивность  $L$  следующим образом

$$\Phi = LI, \quad (17)$$

получаем формулу для индуктивности спирали

$$L = \frac{\mu_0}{\alpha_{mm}^{(11)}} S^2 N_t^2. \quad (18)$$

Аналогично формуле (13), соотношение (18) также даёт правильную размерность индуктивности, поскольку магнитная восприимчивость имеет размерность  $\text{м}^{-3}$ . Полученное эффективное значение индуктивности (18) является, в общем случае, комплексной величиной. В дальнейшем для перехода к классическому значению индуктивности будем использовать модуль величины (18).

**Вычисление резонансной частоты спирали.** Используя формулы (13) и (18), можно вычислить собственную циклическую частоту колебательного контура (в нашем случае это резонансная циклическая частота колебаний в спирали):

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \cdot \frac{H_s \sqrt{|\alpha_{mm}^{(11)}|}}{S N_t \sqrt{|\alpha_{ee}^{(11)}|}}. \quad (19)$$

С другой стороны, в рамках равноправного подхода, резонансную частоту можно определить, используя условие главного (полуволнового) резонанса, следующим образом

$$\omega_0 = \frac{2\pi c}{\lambda_0} = \frac{\pi c}{L_s}, \quad (20)$$

где  $c$  – скорость света в вакууме,  $L_s$  – полная длина спирали в выпрямленном состоянии, которая приблизительно равна половине резонансной длины волны  $\lambda_0$

$$L_s = \frac{\lambda_0}{2}. \quad (21)$$

Используя формулы (19) и (20), получаем соотношение для модулей компонент восприимчивостей спирали

$$\frac{|\alpha_{mm}^{(11)}|}{|\alpha_{ee}^{(11)}|} = \left( \frac{\pi S N_t}{L_s H_s} \right)^2. \quad (22)$$

**Сравнение со случаем гладкой оптимальной спирали.** Проверим формулы (19) и (20) на примере известных соотношений для гладкой спирали. Особый интерес представляет оптимальная спираль, для которой электрический дипольный момент и магнитный момент равны [3]. Это равенство моментов имеет место при активации спирали как электрическим, так и магнитным полем. Такую спираль можно также назвать сбалансированной.

Для оптимальной спирали выполняется равенство компонент восприимчивостей

$$\alpha_{mm}^{(11)} = \alpha_{ee}^{(11)}, \quad (23)$$

тогда из уравнения (19) следует

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \cdot \frac{H_s}{S N_t}. \quad (24)$$

Для гладкой спирали удобно ввести в рассмотрение универсальную характеристику – угол подъёма спирали  $\alpha$ , который образован спиральной линией и плоскостью, перпендикулярной оси спирали (рисунок 2).

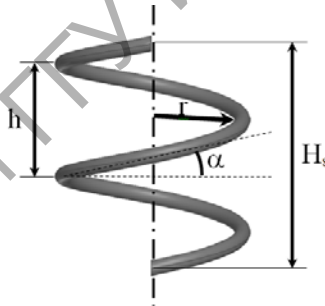


Рисунок 2 – Гладкая цилиндрическая спираль

Высота гладкой спирали и площадь её витка равны

$$H_s = L_s \sin \alpha, \quad (25)$$

$$S = \pi r^2 = \frac{L_s^2 \cos^2 \alpha}{4\pi N_t^2}, \quad (26)$$

где  $r$  – радиус витка гладкой спирали.

Учитывая, что  $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$ , из соотношений (24)–(26) получаем ранее найденное уравнение для гладкой оптимальной спирали [3]

$$4N_t \sin \alpha = \cos^2 \alpha. \quad (27)$$

Решение этого уравнения даёт ранее полученный угол подъёма оптимальной гладкой спирали в зависимости от числа витков  $N_t$  [3]

$$\alpha = \arcsin(-2N_t \pm \sqrt{4N_t^2 + 1}). \quad (28)$$

Таким образом, полученные формулы (13) и (18) для ёмкости и индуктивности спирали согласуются с известными соотношениями для гладкой оптимальной спирали.

**Оптимальные параметры планарной полувитковой спирали.** Применим формулы (13) и (18) к случаю планарной спирали, чтобы определить её оптимальные параметры. Наша цель – рассчитать и спроектировать сбалансированную планарную спираль, одинаково восприимчивую к электрическому и магнитному полю падающей волны, обладающую электрическим дипольным моментом и магнитным моментом, равными друг другу. На основе таких оптимальных планарных спиралей с использованием технологий печатных плат могут быть созданы метаматериал либо метаповерхность с перспективными свойствами.

Полная длина полувитковой планарной спирали (см. рисунок 3) в выпрямленном состоянии равна

$$L_s = 2l + h_s, \quad (29)$$

где  $l$  – длина металлической полоски на одной стороне печатной платы,  $h_s$  – толщина диэлектрической подложки (печатной платы).

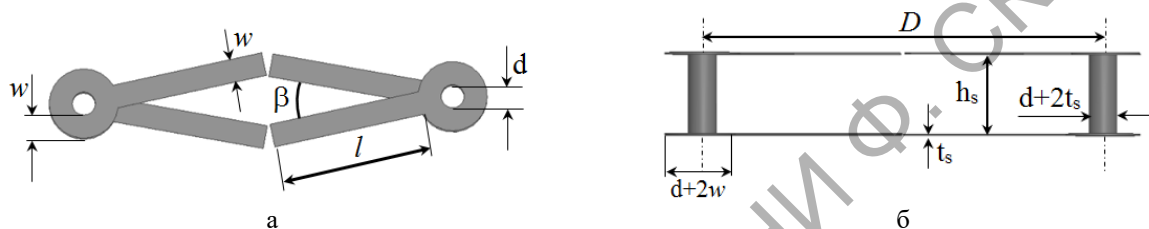


Рисунок 3 – Парная планарная полувитковая спираль, вид сверху печатной платы, наблюдатель смотрит вслед падающей электромагнитной волне (а) и вид сбоку, вдоль печатной платы (б)

Формула для высоты полувитковой планарной спирали имеет вид

$$H_s = 2l \sin \alpha, \quad (30)$$

где  $\alpha = \frac{\beta}{2}$  – угол подъёма планарной спирали,  $\beta$  – угол между металлическими полосками на двух сторонах платы. Площадь витка парной планарной спирали равна

$$S = 2h_s l \cos \alpha, \quad (31)$$

и в случае полувитковой спирали  $N_t = \frac{1}{2}$ . Используя формулы (20), (23), (24), (29)–(31), получаем для оптимальной парной полувитковой спирали

$$\frac{\pi}{L_s} = \frac{H_s}{SN_t}, \quad (32)$$

далее следует выражение для оптимального угла подъёма полувитковой планарной спирали

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h_s}{2} \frac{\pi}{2l + h_s}. \quad (33)$$

Для гладкой спирали все параметры можно выразить через угол подъёма  $\alpha$ , поэтому оптимальный угол подъёма определяется формулой (28). Для планарной спирали возможные значения толщины подложки  $h_s$  зависят от технологии изготовления печатных плат. Для планарной спирали необходимо также учесть требуемую частоту резонанса  $\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ .

Следовательно, получаем формулу, по которой можно вычислить оптимальный угол  $\beta$  между металлическими полосками на двух сторонах платы (рисунок 3а):

$$\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{\pi h_s}{4c} \nu_0. \quad (34)$$

Чтобы определить предельный угол подъёма, найдем длину металлической полоски  $l$

$$l = \frac{1}{2} \left( \frac{c}{2\nu_0} - h_s \right). \quad (35)$$

Должно выполняться неравенство  $l > 0$ , поэтому получаем условие для толщины печатной платы

$$h_s < \frac{c}{2\nu_0}. \quad (36)$$

Это неравенство необходимо учитывать при выборе значений  $h_s$  в зависимости от резонансной частоты. Теперь из формул (34) и (36) следует

$$\operatorname{tg} \frac{\beta_{\max}}{2} = \frac{\pi}{8}, \quad \beta_{\max} = 42,9^\circ. \quad (37)$$

**Вычисление импеданса спирали.** Теперь, используя формулы (4) и (14), выражаем импеданс спирали, то есть её комплексное сопротивление

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{E_x H_s}{m} SN_t. \quad (38)$$

Если воздействует только электрическое поле, направленное вдоль оси спирали, а магнитное не пронизывает витки спирали, то из уравнений связи (8) следует

$$m = j \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \alpha_{me}^{(11)} E. \quad (39)$$

Теперь из формулы (38) следует, что импеданс спирали можно выразить через её магнитоэлектрическую восприимчивость, и он равен

$$Z = -j \frac{H_s SN_t}{\alpha_{me}^{(11)}} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}. \quad (40)$$

Здесь  $\alpha_{me}^{(11)}$  – компонента тензора магнитоэлектрической восприимчивости  $\alpha_{ee}^{(ij)}$ , для которого, в общем случае, индексы  $i$  и  $j$  могут принимать значения от 1 до 3.

Отметим, что формула (40) приводит к правильной размерности импеданса, поскольку магнитоэлектрическая восприимчивость имеет размерность  $\text{м}^{-3}$ . Импеданс (40) является, в общем случае, комплексной величиной. В дальнейшем для перехода к эффективному значению импеданса будем использовать модуль величины (40).

**Вычисление добротности спирали как колебательного контура.** Добротность спирали можно записать в виде

$$Q = \frac{1}{|Z|} \sqrt{\frac{|L|}{|C|}} = \frac{\omega_0 L}{R}. \quad (41)$$

Используя формулы (13), (18) и (40), получаем

$$Q = \frac{|\alpha_{me}^{(11)}|}{\sqrt{|\alpha_{ee}^{(11)}| |\alpha_{mm}^{(11)}|}}. \quad (42)$$

Для оптимальной спирали компоненты всех трёх восприимчивостей равны [2]:

$$\alpha_{mm}^{(11)} = \alpha_{ee}^{(11)} = \alpha_{me}^{(11)}. \quad (43)$$

Поэтому для оптимальной спирали получаем  $Q = 1$ . Следовательно, для оптимальной спирали волновое сопротивление равно её активному сопротивлению.

Таким образом, согласно (42), добротность спирали как колебательного контура можно выразить через компоненты диэлектрической, магнитной и магнитоэлектрической восприимчивостей, аналогично ёмкости спирали (13) и индуктивности спирали (18). Это справедливо и для гладкой, и для планарной спирали. Все восприимчивости (поляризуемости) спирали, в свою очередь, могут быть определены в результате моделирования, либо экспериментальным путём.

**Закключение.** Предложен принципиально новый бианизотропный элемент метаматериалов и метаповерхностей в виде пары полувитковых планарных спиралей. Построена эквивалентная

электрическая схема пары полувитковых планарных спиралей. Вычислены эффективные значения сопротивления, ёмкости, индуктивности и добротности такого элемента метаматериала. Электрические характеристики «мета-атома» выражены через его диэлектрическую, магнитную и электромагнитную поляризуемости. Найден угол между металлическими полосками на двух сторонах печатной платы, при котором все три поляризуемости бианизотропного элемента метаматериалов равны в условиях резонанса, то есть «мета-атом» является сбалансированным.

Областью применения полученных результатов является электродинамика микроволнового диапазона. Результаты могут быть использованы при теоретических и экспериментальных исследованиях метаматериалов и метаповерхностей с изменяемыми свойствами.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований, проекты: Ф22КИ-016 и Ф22КИТГ-021, а также ГПНИ «Конвергенция – 2025», подпрограмма «Междисциплинарные исследования и новые зарождающиеся технологии».*

### Литература

1. Planar broadband Huygens' metasurfaces for wave manipulations / F. S. Cuesta [et. al.] // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – 2018. – Vol. 66 (12). – P. 7117–7127.
2. Serdyukov, A. N. Electromagnetics of bianisotropic materials : Theory and Applications / A. N. Serdyukov, I. V. Semchenko, S. A. Tretyakov, A. H. Sihvola. – London : Gordon and Breach Publishing Group, 2001. – 337 p.
3. Семченко, И. В. Электромагнитные волны в метаматериалах и спиральных структурах : монография / И. В. Семченко, С. А. Хахомов. – Минск : Беларуская навука, 2019. – 279 с.

<sup>1</sup>ГНПО «Оптика, оптоэлектроника и лазерная техника»

<sup>2</sup>Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

<sup>3</sup>БелНИПИнефть, ПО Белоруснефть

Поступила в редакцию 05.05.2023