УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С $u \vee sp$-ВЛОЖЕННЫМИ ПОДГРУППАМИ

В.С. Закревская

Учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины»

Все рассматриваемые в данной статье группы конечны. Мы говорим, что подгруппа A из G является $u \vee sp$-вложенной в G, если $A = \langle L, T\rangle$, где L – это $\mathfrak{U}$-нормальная, а T – это S-перестановочная подгруппы группы G. Также мы предлагаем рассмотреть следующее новое свойство вложенных подгрупп конечных групп: H – слабо $u \vee sp$-вложенная подгруппа в G, если G имеет субнормальную подгруппу K такую, что G=HK, $H_{usG} \leq K$ и $|H \cap K : H_{usG}|$ – это p'-число, где H_{usG} обозначает подгруппу H, порожденную всеми теми подгруппами H, которые являются $u \vee sp$-вложенными в G.

Цель работы – исследование связи между слабой $u \vee sp$-вложенностью максимальных подгрупп и разрешимостью группы.

***Материал и методы.** Использованы методы исследования теории конечных групп.*

***Результаты и их обсуждение.** Пусть G – группа и $p \in \pi(G)$. Если каждый элемент $\mathfrak{Z}_p(G)$ слабо $u \vee sp$-вложен в G, то G является p-разрешимой.*

***Заключение.** Найдено новое свойство вложенных подгрупп конечных групп.*

***Ключевые слова:** конечная группа, $\mathfrak{U}$-нормальная подгруппа, S-перестановочная подгруппа, $u \vee sp$-вложенная подгруппа, слабо $u \vee sp$-вложенная подгруппа.*

FINITE GROUPS WITH $u \vee sp$-EMBEDDED SUBGROUPS

V.S. Zakrevskaya

Education Establishment "Francisk Skorina Gomel State University"

Throughout the paper, all groups are finite and G always denotes a finite group. We say that a subgroup A of G is $u \vee sp$-embedded in G if $A = \langle L,T\rangle$, where L is $\mathfrak{U}$-normal and T is S-permutable subgroups of G. We also provide to consider the following new property of embedded subgroups of finite groups: H is weakly $u \vee sp$-embedded in G if G has a subnormal subgroup K such that $G = HK$, $H_{usG} \leq K$ и $|H \cap K : H_{usG}|$ is a p'-number, where H_{usG} denotes the subgroup of H generated by all those subgroups of H which are $u \vee sp$-embedded in G.

The purpose of the research is to investigate the relationship between the weakly $u \vee sp$-embedding of maximal subgroups and the solvability of a group.

***Material and methods.** Methods of the study of the finite group theory are used.*

***Findings and their discussion.** Let G be a group and $p \in \pi(G)$. If every element of $\mathfrak{Z}_p(G)$ is weakly $u \vee sp$-embedded in G then G is p-soluble.*

***Conclusion.** The new property of embedded subgroups of finite groups was found.*

***Key words:** finite group, $\mathfrak{U}$-normal subgroup, $u \vee sp$-embedded subgroup, S-permutable subgroup, weakly $u \vee sp$-embedded subgroup.*

Все рассматриваемые здесь группы конечны, и G всегда является конечной группой. Через $|G|$ мы обозначаем порядок G, а под $\pi(n)$ подразумеваем множество всех простых чисел, делящих n. Пусть p – простое число, а p' – дополняющее множество простых чисел. Пусть M – подгруппа группы G. Напомним, что подгруппа H из G называется: 2-максимальной подгруппой группы G, если H является максимальной подгруппой некоторой максимальной подгруппы M из G; 3-максимальной подгруппой группы G, если H является 2-максимальной подгруппой некоторой максимальной подгруппы; $\mathfrak{U}$-нормальной в G [1], если либо $H \trianglelefteq G$, либо $H_G \neq H^G$ и каждый главный фактор G между H_G и H^G является циклическим.

Влияние дополняемых характеристик подгрупп конечной группы на ее структуру изучалось многими авторами. Например, И. Ван [2] ввел понятие c-нормальности подгруппы группы, дав следующее определение: подгруппа H группы G называется c-нормальной в G, если G имеет нормальную подгруппу K такую, что $G = HK$ и $H \cap K \leq H_G$, где H_G – наибольшая нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в H. Он доказал, что группа G разрешима тогда и только тогда, когда каждая максимальная подгруппа группы G является c-нормальной в G [2, теорема 3.1], а также что группа G разрешима тогда и только тогда, когда существует разрешимая c-нормальная максимальная подгруппа M из G [2, теорема 3.4]. А. Баллестер-Болиншес и др. в [3] дали следующее определение: подгруппа H группы G называется c-дополняемой в G, если G имеет подгруппу K такую, что $G = HK$ и $H \cap K \leq H_G$. Таким образом, они расширили понятие c-нормальности подгруппы группы G до c-дополняемости. О.Г. Кегель в [4] представил следующую концепцию: подгруппа A называется s-перестановочной в G, если A перестановочна с каждой силовской подгруппой. А.Н. Скиба в [5] отметил, что s-перестановочность и c-нормальность являются совершенно разными обобщениями нормальности (см. пример 1.2 в [5]), и он ввел понятие, называемое слабой s-перестановочностью, дав следующее определение: подгруппа H группы G считается слабо s-перестановочной в G, если G имеет субнормальную подгруппу K такую, что $G = HK$ и $H \cap K \leq H_{sG}$, где H_{sG} – подгруппа H, порожденная всеми теми подгруппами H, которые являются s-перестановочными в G. В той же статье А.Н. Скиба также дал определение слабо s-дополняемой подгруппы: подгруппа H из G называется слабо s-дополняемой в G, если G имеет подгруппу K такую, что $G = HK$ и $H \cap K \leq H_{sG}$. В работе [6] И. Лв и И. Ли расширяют понятие c-нормальности с количественной точки зрения, вводя определение c_p-нормальности: пусть G – группа и p – простое число. Подгруппа H группы G называется c_p-нормальной в G, если G имеет нормальную подгруппу K такую, что $G = HK$, $H_G \leq K$ и $H \cap K/H_G$ – это p'-группа. Используя эту концепцию, они доказали, что группа G является p-разрешимой тогда и только тогда, когда каждая максимальная подгруппа G является c_p-нормальной в G [6, следствие 3.3] и что группа G является p-разрешимой, если каждая 2-максимальная подгруппа группы G является c_p-нормальной в G [6, теорема 3.9]. В [7] М. Асаад и М. Рамадан вводят новое свойство вложенных подгрупп, которое можно рассматривать как обобщение понятий c-нормальности, слабой s-перестановочности и c_p-нормальности. Они дают следующее определение: подгруппа H – слабо s_p-перестановочная в G, если G имеет субнормальную подгруппу K такую, что $G = HK$, $H_{sG} \leq K$ и $|H \cap K : H_{sG}|$ – это p'-число, где H_{sG} обозначает подгруппу H, порожденную всеми такими подгруппами H, которые являются s-перестановочными в G.

В настоящей работе мы получаем обобщения некоторых из этих результатов на основе следующего:

Определение 1. *Мы говорим, что подгруппа A из G является $\mathfrak{u} \vee sp$-вложенной в G, если $A = \langle L, T\rangle$, где L – это $\mathfrak{U}$-нормальная, а T – это S-перестановочная подгруппа группы G.*

Мы предлагаем рассмотреть следующее новое свойство вложенных подгрупп конечных групп:

Определение 2. *Пусть H – подгруппа группы G, а p – простое число. Мы говорим, что H – слабо $\mathfrak{u} \vee sp$-вложенная подгруппа в G, если G имеет субнормальную подгруппу K такую, что $G = HK$, $H_{usG} \leq K$ и $|\, H \cap K : H_{usG}\,|$ – это p'-число, где H_{usG} обозначает подгруппу H, порожденную всеми теми подгруппами H, которые являются $\mathfrak{u} \vee sp$-вложенными в G.*

В этой статье мы исследуем связь между слабо $\mathfrak{u} \vee sp$-вложенностью максимальных подгрупп и разрешимостью группы. Некоторые недавние результаты улучшены и обобщены.

Цель данной работы – доказательство теоремы о порожденных σ-локальных формациях.

Материал и методы. Использованы методы исследования теории конечных групп.

Результаты и их обсуждение. Вначале приведем несколько лемм, применяемых при доказательстве основных результатов.

Лемма 3. *Пусть G – группа, и $A \leq K \leq G, B \leq G$. Тогда:*

(1) Если A и B субнормальны в G, то $\langle A, B\rangle$ субнормальна в G [8, A, 14.4].

(2) Предположим, что A является нормальной в G. Тогда K/A субнормальна в G/A тогда и только тогда, когда K субнормальна в G [8, A, 14.1].

(3) Если A субнормальна в G, то $A \cup B$ является субнормальным в B [8, A, 14.1].

(4) Если A субнормальна в G и A является π-подгруппой G, то $A \leq O_\pi(G)$ [9].

Лемма 4 (см. леммы 2.8, 3.1 и теоремы B и C в [10]). *Пусть H, K и R – подгруппы группы G. Предположим, что H является S-перестановочной в G, а R нормальна в G. Тогда:*

(1) H субнормальна в G.

(2) Подгруппа HR/R является S-перестановочной в G/R.

(3) Если K примарна, то K является S-перестановочной в G тогда и только тогда, когда $O^p(G) \leq N_G(K)$.

(4) Если $H \leq K$, то H является S-перестановочной в K.

(5) Если $R \leq K$ и K/R являются S-перестановочными в G/R, то K S-перестановочна в G.

(6) Если K S-перестановочна в G, то $H \cap K$ и $\langle H, K\rangle$ являются S-перестановочными в G.

(7) $H \cap K$ S-перестановочно в K.

(8) H/H_G является нильпотентной.

Лемма 5. *Пусть A, B и N – подгруппы группы G, где A $u \vee sp$-вложена в G, а N нормальна в G.*

(1) Если $N \leq B$ и B/N $u \vee sp$-вложены в G/R, то B является $u \vee sp$-вложенной в G.

(2) Если B – $u \vee sp$-вложенная подгруппа в G, то $\langle A, B\rangle$ является $u \vee sp$-вложенной в G.

(3) A/N $u \vee sp$-вложена в G/N.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $A = \langle L, T\rangle$, где L – $\mathfrak{U}$-нормальная подгруппа, а T – S-перестановочная подгруппа группы G.

(1) Пусть $B/N = \langle V/N, W/N\rangle$, где V/N является $\mathfrak{U}$-нормальной в G/N, а W/N S-перестановочна в G/N. Тогда $B = \langle V, W\rangle$, где V является $\mathfrak{U}$-нормальной в G по лемме 2.8(3) в [11], а W S-перестановочна в G по лемме 4(5), таким образом, B – это $u \vee sp$-вложенная подгруппа группы G.

(2) Пусть $B = \langle V, W\rangle$, где V – $\mathfrak{U}$-нормальная, а W – S-перестановочная подгруппы группы G. Тогда

$$\langle A, B\rangle = \langle\langle L, T\rangle, \langle V, W\rangle\rangle = \langle\langle L, V\rangle, \langle T, W\rangle\rangle,$$

где $\langle L, V\rangle$ является $\mathfrak{U}$-нормальной в G по лемме 2.8(1) в [11] и $\langle T, W\rangle$ S-перестановочна в G по лемме 4(6). Следовательно, $\langle A, B\rangle$ – $u \vee sp$-вложенная в G.

(3) $A/N = \langle L/N, T/N\rangle$, где L/N является -нормальной в G/N по леммам 2.8(2) в [11] и T/N S-перестановочна в G/N по лемме 4(2). Следовательно, A/N $u \vee sp$-вложена в G/N.

Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть G – группа и $H \leq K \leq G$. Тогда выполняются следующие утверждения.*

(1) H_{usG} – $u \vee sp$-вложенная подгруппа группы G и $H_{sG} \leq H_{usG}$.

(2) Предположим, что H является нормальной в G. Тогда $(K/H)_{us(G/H)} = K_{usG}/H$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. (1) Это очевидно из леммы 5(2) и того факта, что каждая S-перестановочная подгруппа является $u \vee sp$-вложенной в G.

(2) Пусть $V/H = (K/H)_{us(G/H)}$. Итак, нам нужно доказать, что $V/H = K_{usG}/H$.

Сначала обратим внимание, что $V/H \leq K/H$ и V/H сгенерированы всеми такими подгруппами из K/H , которые являются $u \vee sp$ -вложенными в G/H . Тогда из пункта (1) мы имеем, что V/H $u \vee sp$ -вложена в G/H . V $u \vee sp$ -вложена в G по лемме 5(1), $V \leq K$, поэтому $V \leq K_{usG}$ и $V/H \leq K_{usG}/H$.

С другой стороны, поскольку K_{usG} $u \vee sp$-вложена в G согласно пункту (1), то K_{usG}/H – $u \vee sp$-вложенная подгруппа в G/H по лемме 5(3). $K_{usG} \leq K$, поэтому $K_{usG}/H \leq K/H$. Обратите внимание, что K/H $u \vee sp$-вложена в G/H, значит, $K_{usG}/H \leq V/H$.

Лемма доказана.

Лемма 7. *Пусть G – группа, H – подгруппа группы G и p – простое число. Тогда*

(1) Пусть N – нормальная подгруппа из G и $N \leq H$. Тогда H – слабо $u \vee sp$-вложенная подгруппа группы G тогда и только тогда, когда H/N слабо $u \vee sp$-вложена в G/N.

(2) Пусть $H \leq K \leq G$. Если H слабо $u \vee sp$-вложена в G, то H слабо $u \vee sp$-вложена в K.

(3) Каждая p-подгруппа группы G является слабо $u \vee sp$-вложенной в G.

Д о к а з а т е л ь с т в о. (1) Предположим, что H слабо $u \vee sp$-вложена в G. Тогда существует субнормальная подгруппа K такая, что $G = HK$, $H_{usG} \leq K$ и $|H \cap K{:}\, H_{usG}|$ является p'-числом. Так как $N \leq H$, мы имеем, что $N \leq H_{usG} \leq K$. Итак, $G/N = (H/N)(K/N)$, $(H/N)_{us(G/N)} = H_{usG}/N \leq K/N$ по лемме 6(2) и $|(H/N) \cap (K/N){:}\, (H/N)_{us(G/N)}| = |(H \cap K)/N{:}\, H_{usG}/N| = |H \cap K{:}\, H_{usG}|$ – это p'-число. Следовательно, H/N слабо $u \vee sp$-вложена в G/N . Обратно, мы предполагаем, что H/N слабо $u \vee sp$-вложена в G/N . Учитывая, что K/N является субнормальной подгруппой G/N , такой, что $G/N = (H/N)(K/N)$, $(H/N)_{us(G/N)} \leq K/N$ и $|(H/N) \cap (K/N){:}\, (H/N)_{us(G/N)}|$ – это p'-число. Согласно лемме 3(2), K является субнормальной в G . Поскольку $(H/N)_{us(G/N)} = H_{usG}/N$ по лемме 6(2), мы имеем, что $H_{usG} \leq K$. Тогда $G = HK$ и $|(H/N) \cap (K/N): (H/N)_{us(G/N)}| = |(H \cap K)/N: H_{usG}/N| = |H \cap K: H_{usG}|$ – это p'-число. Следовательно, H слабо $u \vee sp$-вложена в G.

(2) Предположим, что H слабо $u \vee sp$-вложена в G. Тогда существует субнормальная подгруппа T такая, что $G = HT$, $H_{usG} \leq T$ и $|H \cap T: H_{usG}|$ является p'-числом. Поскольку $H \leq K$, то $K = K \cap HT = H(K \cap T)$. Согласно лемме 3(3), $K \cap T$ является субнормальной в K, $H_{usG} \leq K \cap T$ и $|H \cap (K \cap T): H_{usG}| = |H \cap T: H_{usG}|$ – это p'-число. Следовательно, H слабо $u \vee sp$-вложена в K.

(3) Пусть H – p'-подгруппа группы G. Мы имеем, что $G = HG$, $H_{usG} \leq G$ и $|H \cap G: H_{usG}| = |H: H_{usG}|$ – это p'-число. Следовательно, H $u \vee sp$-вложена в G.

Лемма доказана.

Введем следующие семейства подгрупп для заданной группы G (см. [2]):

Определение 8. *Пусть G – группа, а p – простое число. Мы даем следующие определения:*

$\mathfrak{I}_p(G) = \{M: M$ максимальна в G, $p \nmid |G: M|\}$.

$\mathfrak{I}^p(G) = \{M: M$ максимальна в G и $N_G(P) \leq M$ для некоторой силовской p-подгруппы P из $G\}$.

$\Phi_p(G) = \cap\{M : M \in \mathfrak{I}_p(G)\}$ если $\mathfrak{I}_p(G)$ не пусто; иначе $\Phi_p(G) = G\}$.

$\Phi^p(G) = \cap\{M : M \in \mathfrak{I}^p(G)\}$ если $\mathfrak{I}^p(G)$ не пусто; иначе $\Phi^p(G) = G\}$.

Лемма 9. *Пусть G – группа. Тогда*

(1) $\Phi_p(G)$ является p-замкнутым для каждого $p \in \pi(G)$.

(2) $\Phi^p(G)$ является p-замкнутым для каждого $p \in \pi(G)$.

Доказательство. (1) см. [12, III, Aufgaben 12(a)].

(2) см. [2, лемма 2.2(1)].

Лемма 10 ([13, теорема 1.2.14(2)]; см. также [4]). *Если H является s-перестановочной подгруппой группы G, то частное H^G/H_G нильпотентно.*

Лемма 11 ([6, следствие 3.3]). *Пусть G будет группой. G является p-разрешимой тогда и только тогда, когда каждая максимальная подгруппа G c_p-нормальна в G.*

Лемма 12. *Пусть G – группа. Если G является p-разрешимой, то каждая максимальная подгруппа G слабо $u \vee sp$-вложена в G.*

Доказательство. Предположим, что G является p-разрешимой. Тогда по лемме 11 каждая максимальная подгруппа G является c_p-нормальной в G. Следовательно, согласно лемме 7(1), каждая максимальная подгруппа G слабо $u \vee sp$-вложена в G.

Теперь перейдем к доказательству основных результатов. Сначала мы докажем:

Теорема 1. *Пусть G – группа и $p \in \pi(G)$. Если каждый элемент $\mathfrak{I}_p(G)$ слабо $u \vee sp$-вложен в G, то G является p-разрешимой.*

Доказательство. Предположим, что теорема ложна, и пусть G будет контрпримером минимального порядка. Тогда

(1) $\mathfrak{I}_p(G) \neq \emptyset$.

Действительно, пусть $\mathfrak{I}_p(G) = \emptyset$, то есть p делит индекс каждой максимальной подгруппы в G. Тогда G является p-группой, потому что в противном случае G_p (силовская подгруппа группы G) содержится в некоторой максимальной подгруппе G и, следовательно, ее индекс делится на p, что противоречит определению силовской подгруппы. Значит, G является p-разрешимой. Следовательно, мы имеем (1).

(2) G не является простой.

Предположим, что G простая. Согласно (1), $\mathfrak{I}_p(G) \neq \emptyset$. Пусть $H \in \mathfrak{I}_p(G)$. Согласно гипотезе, H – слабо $u \vee sp$-вложенная подгруппа группы G. По определению, G имеет субнормальную подгруппу K такую, что $G = HK$, $H_{usG} \leq K$ и $|H \cap K: H_{usG}|$ является p'-числом. $K \neq 1$ по гипотезе, следовательно, $K = G$. Если $H_{usG} \neq 1$, обозначим $T = H_{usG}$. Обратим внимание, что T $u \vee sp$-вложена в G по лемме 6(1). Следовательно, $T = \langle V, W \rangle$ для некоторой $\mathfrak{U}$-нормальной подгруппы V и S-перестановочной подгруппы W из G. Рассмотрим T_G. Если $T_G \neq 1$, то $T_G = G$, противоречие. Таким образом, $T_G = 1$. Теперь предположим, что $V = 1$. Тогда $T = W$ является S-перестановочной, а также субнормальной. Поскольку $W \leq T \neq G$, $W = 1$ по предположению. Следовательно, $T = V$. Тогда из $V_G \leq T_G = 1$ мы получаем, что $T^G = G \leq Z^{\mathfrak{U}}(G)$. Следовательно, G сверхразрешима, противоречие. Тогда мы имеем, что $G = HG$, $H_{usG} \leq G$ и $|H \cap G: H_{usG}| = |H: H_{usG}|$ является p'-числом, а $H_{usG} = 1$, а значит, H – p'-группа.

Но поскольку $p \mid |G|$ и $p \nmid |G{:}H|$ по гипотезе, мы имеем, что $p \mid |H|$ по теореме Лагранжа. Противоречие. Таким образом, G не является простой.

(3) Пусть N – минимальная нормальная подгруппа группы G. Тогда $N < G$ и G/N является p-разрешимой.

Согласно (2), $N < G$. Если $p \nmid |G/N|$, то G/N p-разрешима. Если $p \in \pi(G/N)$ и $\mathfrak{J}_p(G/N) = \emptyset$, то G/N является p-группой и, следовательно, G/N p-разрешима. Если $p \in \pi(G/N)$ и $\mathfrak{J}_p(G/N) \neq \emptyset$, пусть $H/N \in \mathfrak{J}_p(G/N)$. Тогда $H \in \mathfrak{J}_p(G)$. Согласно гипотезе, H слабо $u \vee sp$-вложена в G. Тогда H/N слабо $u \vee sp$-вложена в G/N по лемме 7(1). Следовательно, при минимальном выборе G, G/N является p-разрешимой.

(4) G имеет уникальную минимальную нормальную подгруппу, скажем, N, и N является абелевой.

Предположим, что G имеет две различные минимальные нормальные подгруппы N_1 и N_2. Согласно (3), как G/N_1, так и G/N_2 являются p-разрешимыми. Поскольку $G = G/(N_1 \cap N_2)$ изоморфно подгруппе $G/N_1 \times G/N_2$, из этого следует, что G p-разрешима, противоречие. Таким образом, G имеет уникальную минимальную нормальную подгруппу N.

Последнее противоречие. Согласно (4), G имеет уникальную минимальную нормальную подгруппу N. Исходя из (3), G/N является p-разрешимой. Согласно лемме 9(1), $\Phi_p(G)$ p-замкнута. Следовательно, если $N \leq \Phi_p(G)$, мы имеем, что G является p-разрешимой, противоречие. Таким образом, $N \leq \Phi_p(G)$. Тогда существует некоторая $M \in \mathfrak{J}_p(G)$ такая, что $N \not\leq M$. Согласно предположению, M слабо $u \vee sp$-вложена в G. По определению, существует субнормальная подгруппа K такая, что $G = MK$, $M_{usG} \leq K$ и $|M \cap K{:}M_{usG}|$ является p'-числом. Либо $M_{usG} = 1$, либо $M_{usG} \neq 1$. Если $M_{usG} = 1$, то $M \cap K$ – это p'-группа. Теперь очевидно следует, что $|K{:}M \cap K|$ – это p'-число, и поэтому K – это p'-группа. Затем, согласно лемме 3(4), $K \leq O_{p'}(G)$ и, следовательно, $N \leq O_{p'}(G)$. Согласно (3), G/N p-разрешима. Следовательно, G является p-разрешимой, что является противоречием.

Если $M_{usG} \neq 1$, обозначим $A = M_{usG}$. Обратим внимание, что A $u \vee sp$-вложена в G по лемме 6(1). Следовательно, $A = \langle L, T \rangle$ для некоторой $\mathfrak{U}$-нормальной подгруппы L и S-перестановочной подгруппы T из G. Рассмотрим A_G. Если $A_G \neq 1$, то $N \leq A_G$ согласно пункту (4). Итак, $N \leq A_G \leq M_{usG} \leq M$, противоречие. Таким образом, $A_G = 1$. Теперь предположим, что $L = 1$. Тогда $A = T$ является S-перестановочной, поэтому, согласно лемме 10, A^G нильпотентна. Поскольку G не является p-разрешимой, из этого следует, что $A^G < G$. Тогда $N \leq A^G$ и, таким образом, N является нильпотентной. Следовательно, G p-разрешима, что является противоречием. Таким образом, $L \neq 1$. Тогда из $L_G \leq A_G = 1$ мы получаем, что $N \leq L^G = G \leq Z^{\mathfrak{U}}(G)$. Следовательно, N является циклической, вопреки утверждению (4).

Теорема доказана.

Теорема 1 и лемма 12 приводят к следующему следствию

Теорема 2. *Пусть G – группа и $p \in \pi(G)$. Тогда G является p-разрешимой тогда и только тогда, когда каждый элемент $\mathfrak{J}_p$ слабо $u \vee sp$-вложен в G.*

Доказательство. Достаточность. Предположим, что теорема ложна, и пусть G будет контрпримером минимального порядка. Если $\mathfrak{J}_p(G) = \emptyset$, то G – это p-группа. Таким образом, G p-разрешима, что является противоречием. Пусть N – минимальная нормальная подгруппа G. Мы рассматриваем фактор-группу G/N. Учитывая $H/N \in \mathfrak{J}_p(G/N)$, мы имеем, что $p \nmid |G/N{:}H/N| = |G{:}H|$. Следовательно, $H \in \mathfrak{J}_p(G)$. Согласно лемме 7(1), каждый элемент $\mathfrak{J}_p(G/N)$ слабо $u \vee sp$-вложен в G/N. Таким образом, G/N p-разрешима. Применяя стандартные аргументы, мы имеем, что N является единственной минимальной нормальной подгруппой G, N неабелева и $p \mid |N|$. Если $N \leq \Phi_p(G)$, то по [3, 1.1] N разрешима. Тогда G является p-разрешимой, противоречие.

Пусть $M \in \mathfrak{J}_p(G)$. Согласно гипотезе, M слабо $u \vee sp$-вложена в G. По определению, G имеет субнормальную подгруппу K такую, что $G = MK$, $M_{usG} \leq K$ и $|M \cap K{:}M_{usG}|$ является p'-числом.

Если $M_{usG} \neq 1$, обозначим $T = M_{usG}$. Обратим внимание, что T $u \vee sp$-вложена в G по лемме 6(1). Следовательно, $T = \langle V, W \rangle$ для некоторой $\mathfrak{U}$-нормальной подгруппы V и S-перестановочной подгруппы W из G. Рассмотрим T_G. Если $T_G \neq 1$, то $T_G = G$, противоречие. Таким образом, $T_G = 1$. Теперь предположим, что $V = 1$. Тогда $T = W$ является S-перестановочной, а также субнормальной. Поскольку $W \leq T \neq G$, $W = 1$ по гипотезе. Следовательно, $T = V$. Тогда из $V_G \leq T_G = 1$ мы получаем, что $T^G = G \leq Z_{\mathfrak{U}}(G)$. Таким образом, G p-разрешима, что является противоречием.

Тогда мы имеем, что $M_{usG} = 1$, так что $|M \cap K : M_{usG}| = |M \cap K|$ – это p'-число. Таким образом, $M \cap N \leq M \cap K$ является p' -группой. Следовательно, $p \mid |G : M| = |N : N \cap M| = |N|$, вопреки выбору M.

Необходимость. Мы доказываем, что каждая максимальная подгруппа G слабо $u \vee sp$-вложена в G. Рассмотрим максимальную подгруппу M из G. Если $M_{usG} \neq 1$, мы знаем, что M/M_{usG} слабо $u \vee sp$-вложена в G/M_{usG} по индукции. Следовательно, M слабо $u \vee sp$-вложена в G по лемме 7(1).

Теперь предположим, что $M_{usG} = 1$. Выбрав минимальную нормальную подгруппу N из G, мы получим, что $N \nleq M$. Таким образом, $G = MN$. Поскольку G p-разрешима, N является либо элементарной абелевой p-группой, либо p'-группой.

Пусть K – субнормальная подгруппа G, такая, что $G = MK$ и $M_{usG} \leq K$. Если N – элементарная абелева p-группа, то $M \cap N$ является нормальной подгруппой группы G. Таким образом, $M \cap N = 1$ по нашему выбору N. Следовательно, $|M \cap N| \leq |M \cap K| = |M \cap K : M_{usG}|$ является p'-числом, поэтому M слабо $u \vee sp$-вложена в G. Если N – p'-группа, очевидно, что $M \cap N \leq M \cap K$ является p'-группой, поэтому $|M \cap K| = |M \cap K : M_{usG}|$ – p'-число. Следовательно, M слабо $u \vee sp$-вложена в G.

Теорема доказана.

В качестве непосредственного следствия из теорем 1 и 2 мы имеем

Следствие. *Пусть G – группа. Тогда G является p-разрешимой тогда и только тогда, когда каждая максимальная подгруппа G слабо $u \vee sp$-вложена в G.*

Заключение. Рассмотрено новое свойство вложенных подгрупп конечных групп и доказаны основные результаты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hu, B. Finite groups with only F-normal and F-abnormal subgroups / B. Hu, J. Huang, A.N. Skiba // J. Group Theory. – 2019. – Vol. 22(5). – P. 915–926.
2. Wang, Y. c-normality of groups and its properties / Y. Wang // J. Algebra. – 1996. – Vol. 180. – P. 954–965.
3. Ballester-Bolinches, A. c-supplemented subgroups of finite groups / A. Ballester-Bolinches, Y. Wang, X. Guo // Glasgow Math. J. – 2000. – Vol. 42. – P. 383–389.
4. Kegel, O.H. Sylow-Gruppen und Subnormalteiler endlicher Gruppen / O.H. Kegel // Math. Z. – 1862. – Vol. 78. – P. 205–221.
5. Skiba, A.N. On weakly s-permutable subgroups of finite groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2007. – Vol. 315. – P. 192.
6. Lv, Y. On c_p-normal subgroups of finite groups / Y. Lv, Y. Li // Comm. Algebra. – 2021. – Vol. 49. – P. 1405–1414.
7. Asaad, M. On weakly s_p-permutable subgroups of finite groups / M. Asaad, M. Ramadan // J. Algebra. – 2021. – In Print.
8. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–New York: Walter de Gruyter, 1992. – 901 p.
9. Wielandt, H. Subnormal subgroups and permutation groups / H. Wielandt. – Lectures given at the Ohio State University, Columbus, Ohio, 1971.
10. Skiba, A.N. On σ-subnormal and σ-permutable subgroups of finite groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2015. – Vol. 436. – P. 1–16.
11. Zakrevskaya, V.S. Finite Groups with Partially σ-Subnormal Subgroups in Short Maximal Chains / V.S. Zakrevskaya // Advances in Group Theory and Applications. – 2021. – Vol. 12. – P. 91–106.
12. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1967. – 796 p.
13. Ballester-Bolinches, A. Products of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, R. Estban-Romero, M. Asaad. – Berlin: Walter de Gruyter, 2010.

REFERENCES

1. Hu, B. Finite groups with only F-normal and F-abnormal subgroups / B. Hu, J. Huang, A.N. Skiba // J. Group Theory. – 2019. – Vol. 22(5). – P. 915–926.
2. Wang, Y. c-normality of groups and its properties / Y. Wang // J. Algebra. – 1996. – Vol. 180. – P. 954–965.
3. Ballester-Bolinches, A. c-supplemented subgroups of finite groups / A. Ballester-Bolinches, Y. Wang, X. Guo // Glasgow Math. J. – 2000. – Vol. 42. – P. 383–389.
4. Kegel, O.H. Sylow-Gruppen und Subnormalteiler endlicher Gruppen / O.H. Kegel // Math. Z. – 1862. – Vol. 78. – P. 205–221.
5. Skiba, A.N. On weakly s-permutable subgroups of finite groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2007. – Vol. 315. – P. 192.
6. Lv, Y. On c_p-normal subgroups of finite groups / Y. Lv, Y. Li // Comm. Algebra. – 2021. – Vol. 49. – P. 1405–1414.
7. Asaad, M. On weakly s_p-permutable subgroups of finite groups / M. Asaad, M. Bamadan // J. Algebra. – 2021. – In Print.
8. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–New York: Walter de Gruyter, 1992. – 901 p.
9. Wielandt, H. Subnormal subgroups and permutation groups / H. Wielandt. – Lectures given at the Ohio State University, Columbus, Ohio, 1971.
10. Skiba, A.N. On σ-subnormal and σ-permutable subgroups of finite groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2015. – Vol. 436. – P. 1–16.
11. Zakrevskaya, V.S. Finite Groups with Partially σ-Subnormal Subgroups in Short Maximal Chains / V.S. Zakrevskaya // Advances in Group Theory and Applications. – 2021. – Vol. 12. – P. 91–106.
12. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1967. – 796 p.
13. Ballester-Bolinches, A. Products of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, R. Estban-Romero, M. Asaad. – Berlin: Walter de Gruyter, 2010.

Поступила в редакцию 12.05.2022

Адрес для корреспонденции: e-mall: tory.zakreuskaya@gmail.com – Закревская В.С.