Таким образом, используя двухдатчиковый манометр, и зная только значения давления внутри НКТ и в межтрубном пространстве, можно вычеслить такие параметры как: плотность, обводненность и общий дебит смеси и покомпонентный дебит.

Литература

1. Устройство для одновременного измерения давления вне и внутри насосно-компрессорных труб : пат РФ 2652403 / Н. Н. Алаева, Ю. Б. Томус, Л. И. Темникова, И. П. Ситдикова. – Опубл. 26.04.2018.

2. Алаева, Н. Н. Разработка системы управления процессом добычи нефти за счет измерения давления в контрольных точках скважины: автореферат дис. … канд.техн.наук. : 05.13.06 / Н. Н. Алаева // Ижевский государственный технический университет им. М. Т. Калашникова. – Ижевск, 2020. – 137 с.

А. В. Павленко
(ГГУ имени Ф. Скорины, Гомель)
Науч. рук. **В. Н. Капшай**, канд. физ.-мат. наук, доцент

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ЛОГУНОВА-ТАВХЕЛИДЗЕ С РЕЛЯТИВИСТСКИМ ОБОБЩЕНИЕМ ПОТЕНЦИАЛА ГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА В ИМПУЛЬСНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

Уравнение Логунова-Тавхелидзе, описывающее связанные состояния двух скалярных частиц одинаковой массы m, в двумерном импульсном представлении имеет следующий вид:

$$(E^2 - m^2 - \mathbf{p}^2)\,\psi(\mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int V(\mathbf{p},\mathbf{k})\psi(\mathbf{k})\frac{m}{E_k}\,d^2\mathbf{k},\; E_k = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}, \quad (1)$$

где $0 < 2E < 2m$ – энергия двухчастичной системы, $\mathbf{p}$ – двумерный относительный импульс в системе центра масс, $\psi(\mathbf{p})$ – волновая функция, $V(\mathbf{p},\mathbf{k})$ – потенциал.

Потенциал гармонического осциллятора на плоскости в координатном представлении имеет вид

$$V(\rho) = \omega^2 \rho^2, \tag{2}$$

где ω – константа связи, $\rho \geq 0$ – модуль радиус-вектора. Используя преобразование Фурье

$$V(\mathbf{p},\mathbf{k}) = \int e^{i\mathbf{p}\boldsymbol{\rho}} V(\rho) e^{-i\mathbf{k}\boldsymbol{\rho}} d^2\boldsymbol{\rho}, \tag{3}$$

получим выражение для потенциала (2) в импульсном представлении:

$$V(\mathbf{p},\mathbf{k}) = -(2\pi)^2 \omega^2 \Delta_p^{(2)} \delta^{(2)}(\mathbf{p}-\mathbf{k}), \tag{4}$$

где $\Delta_p^{(2)}$ – оператор Лапласа на плоскости импульсов, $\delta^{(2)}(\mathbf{p}-\mathbf{k})$ – двумерная дельта-функция.

Мы будем рассматривать решение уравнения (1) со следующим релятивистским обобщением потенциала (4):

$$V(\boldsymbol{p},\boldsymbol{k}) = -(2\pi)^2 \omega^2 \frac{E_k}{E_p} \Delta_p^{(2)} \frac{E_p}{m} \delta^{(2)}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k}), \tag{5}$$

где $E_p = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$. Подстановка потенциала (5) в уравнение (1) и последующее интегрирование приводит к дифференциальному уравнению в частных производных

$$\left(E^2 - m^2 - p^2\right)\psi(\mathbf{p}) = -\frac{m}{E_p} \omega^2 \Delta_p^{(2)} \frac{m}{E_p} \psi(\mathbf{p}). \tag{6}$$

Для решения этого уравнения разделим в нём переменные в полярных координатах, представив искомую волновую функцию в форме [1]

$$\psi(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \psi_\mu(p) \exp(i\mu\varphi), \tag{7}$$

где $p = |\mathbf{p}|$, φ – полярный угол, $\psi_\mu(p)$ – парциальные волновые функции. Подстановка ряда (7) в уравнение (6) приводит к обыкновенным дифференциальным уравнениям для парциальных волновых функций:

$$\left(\frac{d^2}{dp^2}+\frac{1/4-\mu^2}{p^2}+\frac{1}{\omega^2}\left(E^2-m^2\right)-\frac{1}{\omega^2}p^2\right)\frac{E_p}{m}\psi_\mu(p)=0,\ p\geq 0. \quad (8)$$

Подстановка $\psi_\mu(p)=m/E_p\ f_\mu(p)$ в (8) приводит к дифференциальным уравнениям для функций $f_\mu(p)$, имеющим точные решения [2]. Нахождение регулярных решений этих уравнений приводит к выражениям для парциальных волновых функций следующего вида:

$$\psi_\mu(p)=C_\mu\frac{m}{E_p}p^{\frac{1}{2}+|\mu|}\exp\left(-\alpha\frac{p^2}{2}\right){}_1F_1\left(\frac{1}{2}-\frac{\beta}{4}+\frac{|\mu|}{2},|\mu|+1,\alpha p^2\right), \quad (9)$$

где C_μ – неизвестные константы, ${}_1F_1(a,b,x)$ – вырожденная гипергеометрическая функция [3] и введены обозначения $\alpha=1/\omega$, $\beta=\alpha\left(E^2-m^2\right)$. Для того чтобы волновые функции (9) были конечными при любых значениях переменной p, следует потребовать выполнение условия

$$1/2-\beta/4+|\mu|/2=-n, \qquad n=0,1,2\ldots. \quad (10)$$

Наличие условия (10) приводит к тому, что вырожденная гипергеометрическая функция в формуле (9) преобразуется в обобщенный полином Лагерра [3]. Таким образом, представим выражение для парциальной волновой функции n-го состояния в следующей форме:

$$\psi_{\mu,n}(p)=C_{\mu,n}\frac{m}{E_p}p^{\frac{1}{2}+|\mu|}\exp\left(-\frac{1}{\omega}\frac{p^2}{2}\right)L_n^{|\mu|}\left(\frac{1}{\omega}p^2\right). \quad (11)$$

Учитывая обозначения α и β, получим из равенства (10) условие квантования энергии системы двух частиц

$$2E=2\sqrt{2\omega\left(2n+|\mu|+1\right)+m^2}. \quad (12)$$

Таким образом, в данной работе были получены точные решения двумерного квазипотенциального уравнения Логунова-Тавхелидзе, описывающего связанные состояния системы двух скалярных частиц одинаковой массы для релятивистского обобщения потенциала гармонического осциллятора.

Литература

1. Бабиков, В. В. Метод фазовых функций в квантовой механике / В. В. Бабиков. – Москва : Наука, 1976. – 285с.
2. Камке, Э. Справочник по дифференциальным уравнениям / Э. Камке. – Санкт-Петербург : Лань, 2003. – 576 с.
3. Абрамовиц, М. Справочник по специальным функциям с формулами графиками и математическими таблицами / М. Абрамовиц, И. Стиган. – Москва : Наука, 1979. – 830 с.

А. В. Павленко
(ГГУ имени Ф. Скорины, Гомель)
Науч. рук. **В. Н. Капшай**, канд. физ.-мат. наук, доцент

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ЛОГУНОВА-ТАВХЕЛИДЗЕ В ИМПУЛЬСНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ДЛЯ ДВУМЕРНОГО ПОТЕНЦИАЛА ЮКАВЫ

Описывающее связанные состояния системы двух скалярных частиц одинаковой массы m уравнение Логунова-Тавхелидзе в двумерном импульсном представлении имеет следующий вид:

$$(E^2-m^2-\mathbf{p}^2)\,\psi(\mathbf{p})=\frac{1}{(2\pi)^2}\int V(\mathbf{p},\mathbf{k})\psi(\mathbf{k})\frac{m}{E_k}\,d^2\mathbf{k},\ E_k=\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2},\qquad(1)$$

где $0<2E<2m$ – энергия двухчастичной системы, $\mathbf{p}$ – двумерный относительный импульс в системе центра масс, $\psi(\mathbf{p})$ – волновая функция, $V(\mathbf{p},\mathbf{k})$ – потенциал.

В полярных координатах представим искомую волновую функцию $\psi(\mathbf{p})$ и потенциал $V(\mathbf{p},\mathbf{k})$ в форме [1]

$$\psi(\mathbf{p})=\frac{1}{\sqrt{p}}\sum_{\mu=-\infty}^{\infty}\psi_\mu(p)\exp(i\mu\varphi),\quad V(\mathbf{p},\mathbf{k})=\sum_{\mu=-\infty}^{\infty}V_\mu(p,k)\exp(i\mu\gamma),\qquad(2)$$