

Учреждение образования  
«Гомельский государственный университет  
имени Франциска Скорины»

**Ю. В. НИКИТЮК, А. А. СЕРЕДА**

**ВВЕДЕНИЕ В ТЕХНОЛОГИИ  
КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ.  
КОМПЬЮТЕРНОЕ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ  
МОДЕЛИРОВАНИЕ**

Практическое руководство

для студентов специальностей

1-31 04 01 «Физика (по направлениям)»,

1-31 04 03 «Физическая электроника»,

1-31 04 08 «Компьютерная физика»,

1-39 03 01 «Электронные системы безопасности»,

1-39 03 02 «Программируемые мобильные системы»,

1-98 01 01 «Компьютерная безопасность (по направлениям)»

Гомель  
ГГУ им. Ф. Скорины  
2023

УДК 004.94(076)  
ББК 32.973.4я73  
Н623

Рецензенты:

доктор физико-математических наук Д. В. Леоненко,  
кандидат физико-математических наук А. Л. Самофалов

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом  
учреждения образования «Гомельский государственный  
университет имени Франциска Скорины»

**Никитюк, Ю. В.**

Н623 Введение в технологии компьютерного моделирования.  
Компьютерное и математическое моделирование : практическое  
руководство / Ю. В. Никитюк, А. А. Серeda ; Гомельский гос. ун-т  
им. Ф. Скорины. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2023. – 34 с.  
ISBN 978-985-577-933-0

В практическом руководстве рассмотрены принципы и методы математического и компьютерного моделирования, даны основные понятия и определения, представлены основные этапы построения математических и компьютерных моделей.

Адресовано студентам специальностей 1-31 04 01 «Физика (по направлениям)», 1-31 04 03 «Физическая электроника», 1-31 04 08 «Компьютерная физика», 1-39 03 01 «Электронные системы безопасности», 1-39 03 02 «Программируемые мобильные системы», 1-98 01 01 «Компьютерная безопасность (по направлениям)».

**УДК 004.94(076)**  
**ББК 32.973.4я73**

**ISBN 978-985-577-933-0**

© Никитюк Ю. В., Серeda А. А., 2023

© Учреждение образования

«Гомельский государственный университет  
имени Франциска Скорины», 2023

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	4
1. Место моделирования среди методов познания.....	5
2. Основные понятия и определения.....	7
2.1. Определение моделирования и модели.....	7
2.2. Основные свойства моделей.....	9
2.3. Цели моделирования.....	11
2.4. Принципы моделирования.....	12
3. Методология математического и компьютерного моделирования.....	14
4. Классификация моделей.....	17
4.1. Материальное моделирование.....	18
4.2. Идеальное моделирование.....	19
4.3. Классификация математических моделей.....	21
4.4. Классификация компьютерных моделей.....	25
5. Этапы построения компьютерных математических моделей.....	29
Литература.....	34

## ВВЕДЕНИЕ

Среди базовых компетенций, которые должны быть сформированы у выпускающихся специалистов на факультете физики и информационных технологий можно выделить следующие: установление физических закономерностей на основе современных теоретических представлений, математических и компьютерных методов; исследовательскую работу в областях, использующих физико-математические методы анализа и компьютерные технологии; разработку физико-математических методов решения задач техники, экономики и управления; выполнение расчетов в процессе проектирования типовых конструкций и деталей электронных систем безопасности с учетом знаний механики материалов, теории машин и механизмов; анализ работы различных типов электрических и электронных компонентов в конструкциях устройств и систем заданных параметров; создание новых материалов и анализа их свойств. Формирование таких компетенций неотъемлемо связано с моделированием различных физических процессов, протекающих в материалах и изделиях.

Развитие математической физики и вычислительной математики привели к созданию математического моделирования – нового инструмента исследования природы. С появлением ЭВМ математическое моделирование стало интенсивно проникать во все сферы научно-исследовательской и инженерной практики. По этой причине компьютерное моделирование в настоящее время стало средством решения многих сложных практических задач.

Компьютерное моделирование представляет собой междисциплинарный курс, который предполагает наличие широкого спектра знаний для его успешного освоения. Технологии компьютерного моделирования требуют от исследователя умения корректно ставить задачи, ранжировать входные параметры при построении модели, прогнозировать результаты исследования, проводить компьютерные эксперименты и анализировать их результаты.

В практическом руководстве рассмотрены принципы и методы математического и компьютерного моделирования, даны основные понятия и определения, представлены основные этапы построения математических и компьютерных моделей.

# 1. МЕСТО МОДЕЛИРОВАНИЯ СРЕДИ МЕТОДОВ ПОЗНАНИЯ

Моделирование является одним из методов изучения окружающего мира. Понятие *метод* означает совокупность приемов и операций практического и теоретического освоения действительности. Владеть методом – это значит знать, каким образом, в какой последовательности нужно совершать те или иные действия для решения различных задач, и уметь реализовать эти знания на практике.

Методы научного познания принято подразделять на *всеобщие*, *общенаучные* и *частнонаучные* (рисунок 1).

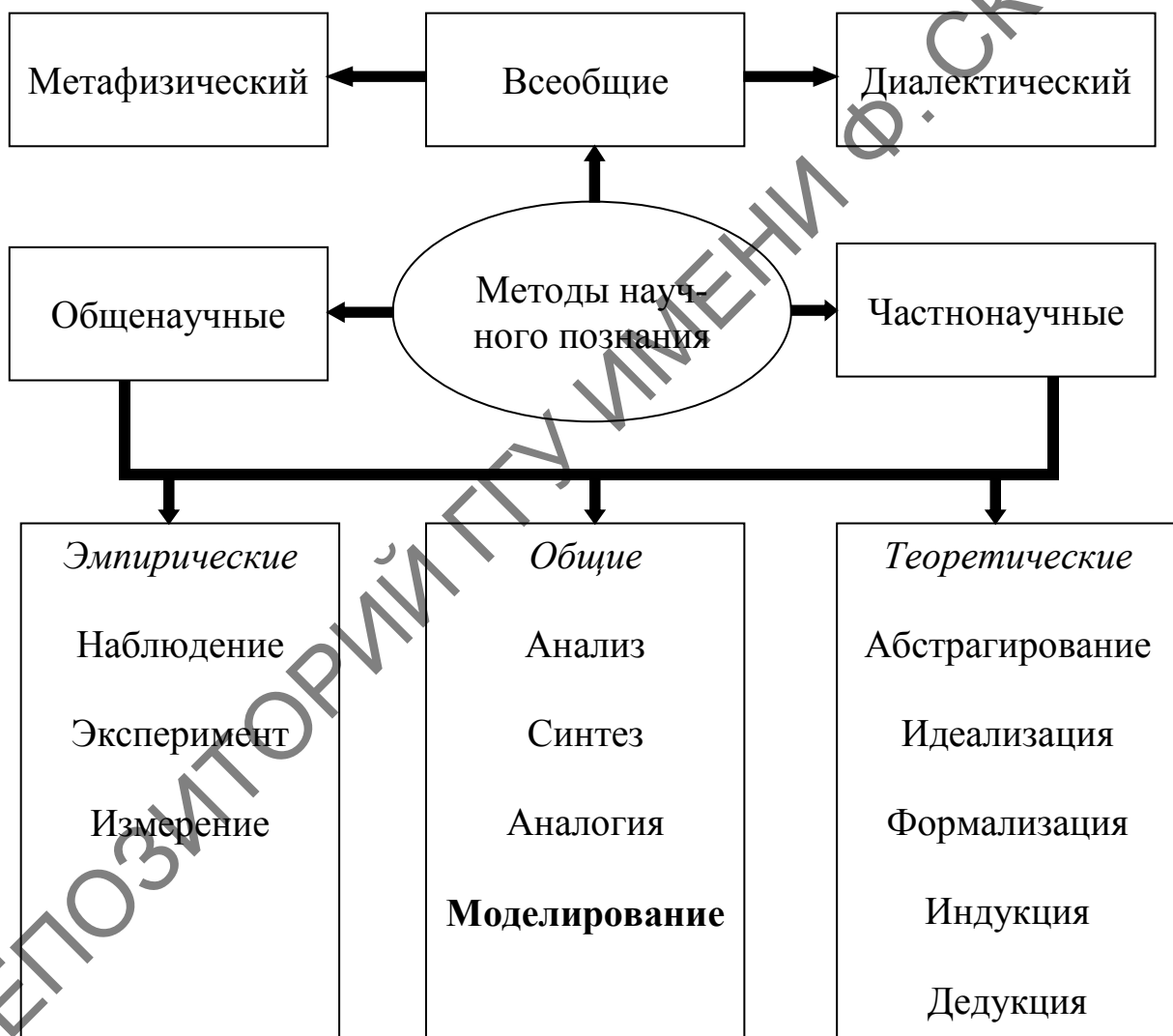


Рисунок 1 – Методы научного познания

Из всеобщих методов в истории познания известны два: диалектический и метафизический. Это общефилософские методы. При метафи-

зическом подходе объекты и явления окружающего мира рассматриваются изолированно друг от друга, без учета их взаимных связей и как бы в застывшем, фиксированном, неизменном состоянии. Диалектический подход, наоборот, предполагает изучение объектов, явлений со всем богатством их взаимосвязей, с учетом реальных процессов их изменения, развития.

Общенаучные методы имеют широкий междисциплинарный спектр применения. Классификация этих методов тесно связана с понятием уровней научного познания. Различают два уровня научного познания: эмпирический и теоретический. Одни общенаучные методы применяются только на эмпирическом уровне (наблюдение, эксперимент, измерение), другие – только на теоретическом (идеализация, формализация).

Моделирование относится к методам, которые используются как на эмпирическом, так и на теоретическом уровне.

### **Вопросы для самоконтроля**

1. Что означает понятие *метод*?
2. На какие типы подразделяются методы научного познания?
3. Какие виды всеобщих методов Вы знаете?
4. Выделите уровни научного познания.

## 2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

### 2.1. Определение моделирования и модели

Понятия модели и моделирования наиболее распространены в сфере обучения, научных исследованиях, проектно-конструкторских работах, в серийном техническом производстве. Чаще всего термин «модель» используют для обозначения:

- устройства, воспроизводящего строение или действие какого-либо другого устройства (уменьшенное, увеличенное или в натуральную величину);
- аналога (чертежа, графика, плана, схемы, описания и т. д.) какого-либо явления, процесса или предмета.

Термин «модель» является многозначным. В словарях можно найти до восьми различных значений данного термина. В научной литературе наиболее распространены следующие определения модели:

- модель как аналог реального объекта;
- модель как образец будущего изделия.

Важную роль при разработке моделей играют гипотезы и аналогии. Гипотезы и аналогии, в определенной мере отражающие реальный мир, должны обладать наглядностью или сводиться к удобным для исследования логическим схемам. Именно подобные схемы, которые упрощают рассуждения и логические построения, позволяют проводить эксперименты и приводят к пониманию явлений природы, называют *моделями*. Другими словами, модель – это объект-заменитель объекта-оригинала, обеспечивающий изучение некоторых интересующих исследователя свойств оригинала.

Итак, *моделирование* – метод познания окружающего мира, представляющий собой процесс замещения объекта исследования некоторой его моделью и проведение исследований на модели с целью получения необходимой информации об объекте.

При этом модель можно определить как образ моделируемого объекта, удобный для проведения исследований и позволяющий адекватно отображать интересующие исследователя свойства и характеристики объекта.

В связи с развитием современных информационных технологий расширяется использование технологий компьютерного моделирования при решении задач разработки, производства и обеспечения эксплуатации изделий. Компьютерные модели становятся одной из форм представления

результатов проектно-конструкторской деятельности. При этом одновременно возрастает роль компьютерного моделирования как альтернативы физическим испытаниям, позволяющего существенно сократить затраты на испытания в ходе создания изделий. Ключевым в сфере компьютерного моделирования является понятие *компьютерная модель*.

В нормативных документах, регламентирующих использование компьютерного моделирования, применяются следующие термины с соответствующими определениями.

*Модель* – сущность, воспроизводящая явление, объект или свойство объекта реального мира.

*Объект моделирования* – явление, объект или свойство объекта реального мира.

*Аспект моделирования* – отдельное свойство или совокупность свойств объекта моделирования, являющихся предметом исследования.

*Математическая модель* – модель, в которой сведения об объекте моделирования представлены в виде математических символов и выражений.

*Информационная модель* – модель, в которой сведения об объекте моделирования представлены в виде совокупности элементов данных и отношений между ними.

*Моделирование* – изучение свойств и (или) поведения объекта моделирования, выполненное с использованием его моделей.

*Компьютерная модель* – модель, выполненная в компьютерной (вычислительной) среде и представляющая собой совокупность данных и программного кода, необходимого для работы с данными. В основе компьютерной модели лежит математическая модель, реализованная в виде программного кода, и данные, определяющие конкретный объект моделирования. Для применения компьютерной модели в процессе моделирования необходимо использовать программное обеспечение компьютерного моделирования и вычислительной техники.

*Программное обеспечение компьютерного моделирования* – программы, выполняющие математические расчеты и предназначенные для подготовки исходных данных, обработки результатов расчетов, а также другие вспомогательные программы. Программное обеспечение компьютерного моделирования с точки зрения применения является более общим понятием по сравнению с компьютерной моделью, поскольку позволяет моделировать различные объекты моделирования, а также содержит в своем составе реализацию сервисных (по отношению к компьютерной модели) функций.



## 2.2. Основные свойства моделей

Модели обладают рядом свойств, от которых зависит успех их применения. Отметим наиболее важные из них.

*Полнота* – одна из характеристик модели. Можно утверждать, что любой объект исследования является бесконечно сложным и характеризуется бесконечным числом параметров. При построении модели исследователь всегда исходит из поставленных целей и учитывает только наиболее существенные факторы. Поэтому любая модель не тождественна оригиналу, и следовательно – неполна. Нужно отметить, что другие факторы, несмотря на свое относительно малое влияние на поведение объекта по сравнению с выбранными факторами, в совокупности могут приводить к значительным различиям между объектом и его моделью.

*Точность* дает возможность обеспечить приемлемое совпадение реальных и найденных при помощи модели значений выходных параметров системы.

*Адекватность* – это способность модели отражать свойства системы с относительной погрешностью не ниже заданной. В общем смысле под адекватностью модели понимают правильное качественное и достаточно точное количественное описание именно тех характеристик системы, которые важны в конкретном случае. Модель, адекватная при выборе одних характеристик, может быть неадекватной при выборе других характеристик системы. В ряде прикладных областей, еще недостаточно подготовленных к применению количественных математических методов, модели имеют главным образом качественный характер. В таких случаях под адекватностью модели следует понимать лишь правильное качественное описание поведения изучаемых систем. Итак, адекватность – это степень соответствия модели исследуемому реальному объекту. Она никогда не может быть полной. На практике модель считают адекватной, если она с удовлетворительной точностью позволяет достичь целей исследования.

В качестве одной из характеристик модели может выступать *простота* модели. Чем большее количество свойств объекта описывает модель, тем сложнее она оказывается. Сложная модель не во всех случаях является адекватной. Очевидно, что из двух моделей, позволяющих достичь желаемой цели и получить требуемые результаты с заданной точностью, предпочтение должно быть отдано более простой. При этом адекватность и простота модели далеко не всегда являются противоречивыми требованиями. Учитывая бесконечную сложность любого

объекта исследования, можно предположить существование бесконечной последовательности его моделей, различающихся по степени полноты, адекватности и простоты.

*Экономичность* оценивают затратами на вычислительные ресурсы, необходимые для реализации модели на ЭВМ. Эти затраты зависят от числа арифметических операций при использовании модели, от особенностей применяемой ЭВМ и других факторов. Очевидно, что требования экономичности, высокой точности и адекватности модели противоречивы и на практике могут быть удовлетворены лишь на основе разумного компромисса. Свойство экономичности модели часто связывают с ее простотой. Более того, количественный анализ некоторых упрощенных вариантов модели может быть осуществлен и без привлечения современной вычислительной техники. Однако его результаты могут иметь лишь ограниченную ценность на стадии отладки алгоритма или программы.

*Робастность* модели характеризует ее устойчивость по отношению к погрешностям исходных данных, способность нивелировать эти погрешности и не допускать их чрезмерного влияния на результат вычислительного эксперимента. Причинами низкой робастности модели могут быть необходимость при ее количественном анализе вычитания близких друг к другу приближенных значений величин или деления на малую по модулю величину, а также использование в модели функций, быстро изменяющихся в промежутке, где значение аргумента известно с невысокой точностью.

*Продуктивность* модели связана с достоверностью исходных данных. Если они являются результатом измерений, то точность их измерения должна быть выше, чем для тех параметров, которые получаются при использовании модели. В противном случае модель будет непродуктивной и ее применение для анализа конкретной системы потеряет смысл. Ее можно будет использовать лишь для оценки и характеристик некоторого класса систем с гипотетическими исходными данными.

*Наглядность* модели является желательным, но необязательным свойством. Однако использование модели и ее модификация упрощаются, если ее составляющие (например, отдельные члены уравнений) имеют ясный содержательный смысл. Это позволяет предвидеть результаты вычислительного эксперимента и облегчить контроль их правильности.

В качестве еще одного свойства модели можно рассматривать потенциальность модели, или предсказательность с позиций возможности получения новых знаний об исследуемом объекте. В научных исследо-

ваниях модели, не обладающие определенной «предсказательностью», не могут считаться удовлетворительными. Итак, *потенциальность (предсказательность)* – способность модели дать новые знания об исследуемом объекте, спрогнозировать его поведение или свойства.

### 2.3. Цели моделирования

Рассмотрим основные цели моделирования. Важным и наиболее распространенным предназначением моделей является их применение при изучении и прогнозировании поведения сложных процессов и явлений.

Модели часто используют с целью выявления наиболее существенных факторов, формирующих те или иные свойства объекта. Конечно, модель любого реального процесса или явления «беднее» самого процесса как объективно существующего (процесса, явления). В то же время хорошая модель «богаче» того, что понимается под реальностью, поскольку в сложных системах понять всю совокупность связей человек, как правило, не в состоянии. Модель же позволяет «играть» с ней: включать или отключать те или иные связи, менять их для того, чтобы понять важность для поведения системы в целом.

Следует учитывать, что некоторые объекты и явления вообще не могут быть изучены непосредственным образом. Недопустимы, например, широкомасштабные «натурные» эксперименты с экономикой страны или со здоровьем ее населения. Принципиально неосуществимы эксперименты с прошлым какого-либо государства или народа. Невозможно провести эксперимент по прямому исследованию структуры звезд. Многие эксперименты неосуществимы в силу своей дороговизны или рискованности для человека или среды его обитания.

Как правило, в настоящее время всесторонние предварительные исследования различных моделей явления предшествуют проведению любых сложных экспериментов. Более того, эксперименты на моделях с применением ЭВМ позволяют разработать план натурных экспериментов, выяснить требуемые характеристики измерительной аппаратуры, наметить сроки проведения наблюдений, а также оценить стоимость такого эксперимента.

Если свойства объекта с течением времени меняются, то особое значение приобретает задача прогнозирования состояний такого объекта под действием различных факторов. Например, при проектировании и эксплуатации любого сложного технического устройства желательно

уметь прогнозировать изменение надежности функционирования, как отдельных подсистем, так и всего устройства в целом.

Модель также позволяет научиться правильно управлять объектом путем апробирования различных вариантов управления. Использовать для этого реальный объект часто бывает рискованно или просто невозможно. Например, получить первые навыки в управлении современным самолетом безопаснее, быстрее и дешевле на тренажере (т. е. модели), чем подвергать себя и дорогую машину риску.

Итак, моделирование осуществляется с целью:

1) изучения механизма явлений, т. е. чтобы понять, как устроен конкретный объект: какова его структура, внутренние связи, основные свойства, законы развития, саморазвития и взаимодействия с окружающей средой;

2) управления объектом, т. е. чтобы научиться управлять объектом или процессом, определять наилучшие способы управления при заданных целях и критериях.

## 2.4. Принципы моделирования

Моделирование базируется на нескольких основополагающих принципах.

*Принцип информационной достаточности.* При полном отсутствии информации об исследуемой системе построение ее модели невозможно. При наличии полной информации о системе ее моделирование лишено смысла. Существует некоторый критический уровень априорных сведений о системе (уровень информационной достаточности), при достижении которого может быть построена ее адекватная модель.

*Принцип осуществимости.* Создаваемая модель должна обеспечивать достижение поставленной цели исследования с вероятностью, существенно отличающейся от нуля, за конечное время. Обычно задают некоторое пороговое значение вероятности достижения цели моделирования, а также приемлемую границу времени достижения этой цели.

*Принцип множественности моделей.* Данный принцип является ключевым. Речь идет о том, что создаваемая модель должна отражать в первую очередь те свойства реальной системы (или явления), которые влияют на выбранный показатель эффективности. Соответственно при использовании любой конкретной модели исследуются лишь некоторые стороны реальной системы. Для более полного ее исследования не-

обходим ряд моделей, позволяющих с разных сторон и с разной степенью детальности отражать рассматриваемую систему.

*Принцип агрегирования.* В большинстве случаев сложную систему можно представить в виде подсистем, для адекватного описания которых оказываются пригодными некоторые стандартные математические схемы. Кроме того, принцип агрегирования позволяет достаточно гибко перестраивать модель в зависимости от задач исследования.

*Принцип параметризации.* В ряде случаев моделируемая система имеет в своем составе некоторые относительно изолированные подсистемы, характеризующиеся определенным параметром, в том числе векторным. Такие подсистемы можно заменять в модели соответствующими числовыми величинами, а не описывать процесс их функционирования. При необходимости зависимость значений этих величин от ситуации может задаваться в виде таблицы, графика или аналитического выражения (формулы). Принцип параметризации позволяет сократить объем и продолжительность моделирования. Однако надо иметь в виду, что параметризация снижает адекватность модели.

## **Вопросы для самоконтроля**

1. Для чего чаще всего используют термин «модель»?
2. Какие термины из нормативных документов, регламентирующих использование компьютерного моделирования, Вы знаете?
3. Какие наиболее важные свойства модели, от которых зависит успех их применения, Вы можете привести?
4. Каковы основные цели моделирования?
5. Перечислите несколько основополагающих принципов, на которых базируется моделирование.

### 3. МЕТОДОЛОГИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО И КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Элементы математического моделирования использовались с самого начала появления точных наук, и не случайно, что некоторые методы вычислений носят имена таких корифеев науки, как Ньютон и Эйлер, а слово *алгоритм* происходит от имени средневекового арабского ученого Аль-Хорезми.

Второе «рождение» этой методологии пришлось на конец 40-х – начало 50-х годов XX века, и было обусловлено, по крайней мере, двумя причинами. Первая из них – появление ЭВМ. Вторая – выполнение национальных программ СССР и США по созданию ракетно-ядерного щита, которые не могли быть реализованы традиционными методами.

Компьютерное моделирование справилось с этой задачей: ядерные взрывы и полеты ракет и спутников были предварительно «осуществлены» в недрах ЭВМ с помощью математических моделей и лишь затем претворены на практике. Этот успех во многом определил дальнейшие достижения методологии, без применения которой ни один крупномасштабный технологический, экологический или экономический проект теперь не рассматривается.

Сейчас компьютерное моделирование вступает в третий этап своего развития, «встраиваясь» в структуры информационного общества. Без владения информационными ресурсами нельзя и думать о решении все более укрупняющихся и все более разнообразных проблем, стоящих перед мировым сообществом.

Методология компьютерного моделирования выражена триадой «модель – алгоритм – программа». В соответствии с этой концепцией постановка вопроса о математическом моделировании какого-либо объекта порождает четкий план действий, который условно можно разбить на три этапа: модель – алгоритм – программа (рисунок 2).

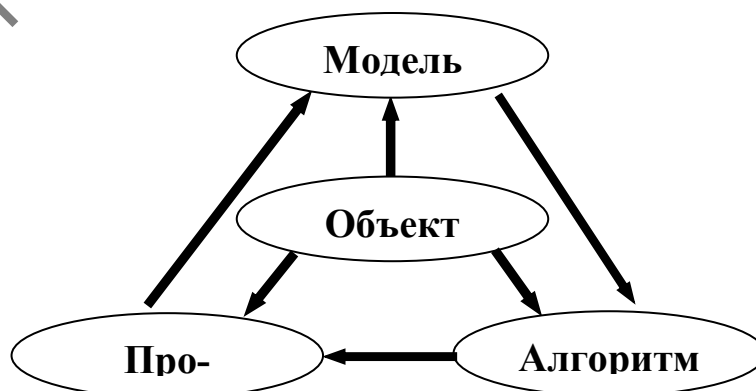


Рисунок 2 – Триада «модель – алгоритм – программа»

На первом этапе выбирается (или строится) «эквивалент» объекта, отражающий в математической форме важнейшие его свойства – законы, которым он подчиняется, связи, присущие составляющим его частям, и т. д. Математическая модель (или ее фрагменты) исследуется теоретическими методами, что позволяет получить важные предварительные знания об объекте.

Второй этап – выбор (или разработка) алгоритма для реализации модели на компьютере. Модель представляется в форме, удобной для применения численных методов. Определяется последовательность вычислительных и логических операций, которые нужно произвести, чтобы найти искомые величины с заданной точностью. Вычислительные алгоритмы должны не исказить основные свойства модели, и следовательно, исходного объекта, быть экономичными и адаптируемыми к особенностям решаемых задач и используемых компьютеров.

На третьем этапе создаются программы, «переводящие» модель и алгоритм на доступный компьютеру язык.

Создав триаду «модель – алгоритм – программа», исследователь получает в руки универсальный, гибкий и недорогой инструмент, который отлаживается и тестируется в «пробных» вычислительных экспериментах. После того при соблюдении адекватности (достаточное соответствие) триады исходному объекту, с моделью проводятся разные «опыты», дающие все требуемые свойства и характеристики объекта. Важно, что процесс моделирования сопровождается улучшением и уточнением всех звеньев триады. Такой метод познания сочетает в себе преимущества и теории, и эксперимента. Действительно, работа не с самим объектом (явлением или процессом), а с компьютерной моделью дает возможность относительно быстро, без существенных затрат исследовать его свойства и поведение в любых мыслимых ситуациях. Это составляет преимущества теории. В то же время вычислительные эксперименты с моделями объектов позволяют, опираясь на мощь вычислительных методов и компьютеров, глубоко и полно изучать объекты, что недоступно чисто теоретическим подходам. Это уже составляет преимущества эксперимента.

Компьютерное моделирование как методология не подменяет собой математику, физику, биологию и другие научные дисциплины, а играет синтезирующую роль. Создание и применение триады невозможно без опоры на самые разные методы и подходы – от качественного анализа нелинейных моделей до современных языков программирования. Но при решении проблемы информационного общества нельзя

уповать только на мощь компьютеров. Необходимо постоянное совершенствование триады математического моделирования.

### **Вопросы для самоконтроля**

1. Какие этапы развития математического и компьютерного моделирования можно выделить?

2. В чем суть методологии компьютерного моделирования, выраженного триадой «модель – алгоритм – программа»?

3. В чем гибкость и универсальность триады «модель – алгоритм – программа»?



## 4. КЛАССИФИКАЦИЯ МОДЕЛЕЙ

Как было отмечено ранее, моделирование относится к общенаучным методам познания. Использование моделирования на эмпирическом и теоретическом уровнях исследования приводит к делению моделей на *материальные* и *идеальные*.

Учитывая, что идеальное моделирование является первичным по отношению к материальному (вначале в сознании человека формируется идеальная модель, а затем на ее основе строится материальная), существующие типы моделирования можно представить так, как показано на рисунке 3.

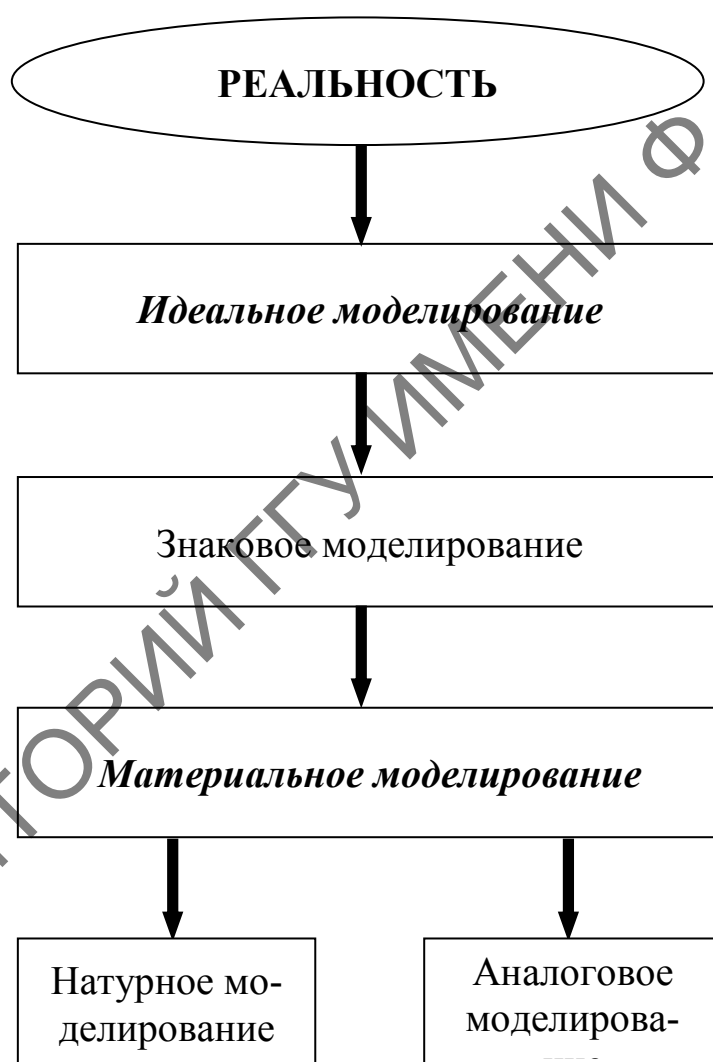


Рисунок 3 – Виды моделирования

## 4.1. Материальное моделирование

*Материальное моделирование* – это моделирование, при котором исследование объекта выполняется с использованием его материального аналога, воспроизводящего основные физические, геометрические, динамические и функциональные характеристики данного объекта.

Основными разновидностями материального моделирования являются *натурное* и *аналоговое*. При этом оба вида моделирования основаны на свойствах геометрического или физического подобия.

*Натурное моделирование* – это такое моделирование, при котором реальному объекту сопоставляется его увеличенный или уменьшенный материальный аналог, допускающий исследование (как правило, в лабораторных условиях) с помощью последующего перенесения свойств изучаемых процессов и явлений с модели на объект на основе теории подобия.

К примерам натуральных моделей можно отнести макеты в архитектуре, модели судов в судостроении. Следует отметить, что именно с натуральных моделей судов в середине XIX века моделирование стало развиваться как научная дисциплина, а сами модели – активно использоваться при проектировании новых технических устройств. В настоящее время методы натурального моделирования находят самое широкое применение в судостроении, авиастроении, автомобилестроении, ракетостроении и других областях. Например, при разработке нового самолета большое значение имеют эксперименты с натурными моделями, испытываемыми в аэродинамической трубе. Проведенные исследования позволяют изучить особенности обтекания фюзеляжа воздушными потоками, найти наиболее рациональную форму корпуса и отдельных узлов.

*Аналоговое моделирование* – это моделирование, основанное на аналогии процессов и явлений, которые имеют различную физическую природу, но одинаково формально описываются.

В основу аналогового моделирования положено совпадение математических описаний различных объектов. Примерами аналоговых моделей могут служить электрические и механические колебания, которые с точки зрения математики описываются одинаковыми соотношениями, но относятся к качественно отличающимся физическим процессам. При некоторых допущениях аналогичными можно считать процессы распространения тепла в теле, диффузии примесей и просачивания жидкости.

Модели физического и аналогового типов являются материальным отражением реального объекта и тесно связаны с ним своими геометрическими, физическими и прочими характеристиками. Фактически

процесс исследования моделей данного типа сводится к проведению ряда натуральных экспериментов, где вместо реального объекта используется его физическая или аналоговая модель.

К особенностям материального моделирования можно отнести отличие условий реализации процесса-модели от условий, свойственных процессу-оригиналу, которые выбираются исходя из удобства и простоты исследования. Поскольку при материальном моделировании нет необходимости сохранять размеры конструкций, время и интенсивность воздействующих факторов, то появляется реальная возможность интенсификации процесса исследований и получения необходимых результатов при меньших материальных и временных затратах. Однако условия материального моделирования не могут выбираться абсолютно произвольно. Между процессом-оригиналом и процессом-моделью должны быть сохранены определенные соотношения подобия, гарантирующие возможность использования сведений, получаемых путем моделирования, для адекватной оценки свойств исследуемого оригинала. Таким образом, материальное моделирование все же связано со значительными затратами.

## 4.2. Идеальное моделирование

*Идеальное моделирование* отличается от материального тем, что оно основано не на материализованной аналогии объекта и модели, а на аналогии идеальной модели и всегда носит теоретический характер.

*Знаковым* называют моделирование, использующее в качестве моделей знаковые изображения какого-либо вида, схемы, графики, чертежи, иероглифы, руны, наборы символов, включающие также совокупность законов и правил, по которым можно оперировать с выбранными знаковыми образованиями и элементами.

В качестве примеров таких моделей можно назвать любой язык, например: устное и письменное человеческое общение, алгоритмические, химические формулы, живописи, ноты для записи музыкальных произведений и т. д.

Моделирование с помощью математических соотношений (математическое моделирование) также является примером знакового моделирования.

*Математическое моделирование* – это идеальное знаковое моделирование, при котором описание объекта осуществляется на языке математики, а исследование модели проводится с использованием тех или иных математических методов.

Фактически все современные разделы физики посвящены построению и исследованию математических моделей различных физических объектов и явлений.

Очень часто методы математического моделирования являются единственно возможными. В настоящее время это один из самых результативных и наиболее часто применяемых методов научного исследования.

Следует отметить в сравнении с натурным экспериментом преимущества математического моделирования:

- экономичность;
- возможность моделирования гипотетических (не реализованных в природе) объектов;
- возможность реализации режимов, опасных или трудновоспроизводимых в натуре;
- возможность изменения масштаба времени.

Приведенное выше определение математического моделирования нельзя считать единственно возможным. Любая математическая модель, предназначенная для научных исследований, позволяет по заданным исходным данным найти значения интересующих исследователя параметров моделируемого объекта или явления. Поэтому можно предположить, что суть любой подобной модели заключается в отображении некоторого заданного множества  $\Omega_X$ , значений входных параметров  $X$  на множество значений  $\Omega_Y$  выходных параметров  $Y$ . Данное обстоятельство позволяет рассматривать математическую модель как некоторый математический оператор  $A$  и сформулировать следующее определение.

Под математической моделью будем понимать любой оператор  $A$ , позволяющий по соответствующим значениям входных параметров  $X$  установить выходные значения параметров  $Y$  объекта моделирования:

$$A: X \rightarrow Y, X \in \Omega_X, Y \in \Omega_Y,$$

где  $\Omega_X$  и  $\Omega_Y$  – множества допустимых значений входных и выходных параметров для моделируемого объекта. В зависимости от природы моделируемого объекта элементами множеств  $\Omega_X$  и  $\Omega_Y$  могут являться любые математические объекты (числа, векторы, тензоры, функции, множества и т. п.).

Понятие оператора в приведенном определении может трактоваться достаточно широко. Это может быть как некоторая функция, связывающая входные и выходные значения, так и отображение, представляющее символическую запись системы алгебраических, дифференци-

альных или интегральных уравнений. Наконец, это может быть некоторый алгоритм, совокупность правил или таблиц, обеспечивающих нахождение (или установление) выходных параметров по заданным исходным значениям.

### 4.3. Классификация математических моделей

Представляется возможным подразделить математические модели на различные классы в зависимости:

- от сложности объекта моделирования;
- от оператора модели (подмодели);
- от входных и выходных параметров;
- от метода реализации модели.

Все объекты моделирования можно разделить на две группы: простые и объекты-системы. В первом случае при моделировании не рассматривается внутреннее строение объекта, не выделяются составляющие его элементы или подпроцессы.

Деление объектов исследования на «простые» и «сложные» условно. Поскольку для любых известных процессов, явлений, материальных тел невозможно выделить их «элементарные кирпичики», то любой объект исследования можно считать бесконечно сложным. Упрощение его строения при разработке модели выполняется в результате отбрасывания несущественных для достижения поставленных на данный момент целей исследования связей между составляющими объект элементами.

Классификация математических моделей в зависимости от методов реализации модели приведена на рисунке 4.

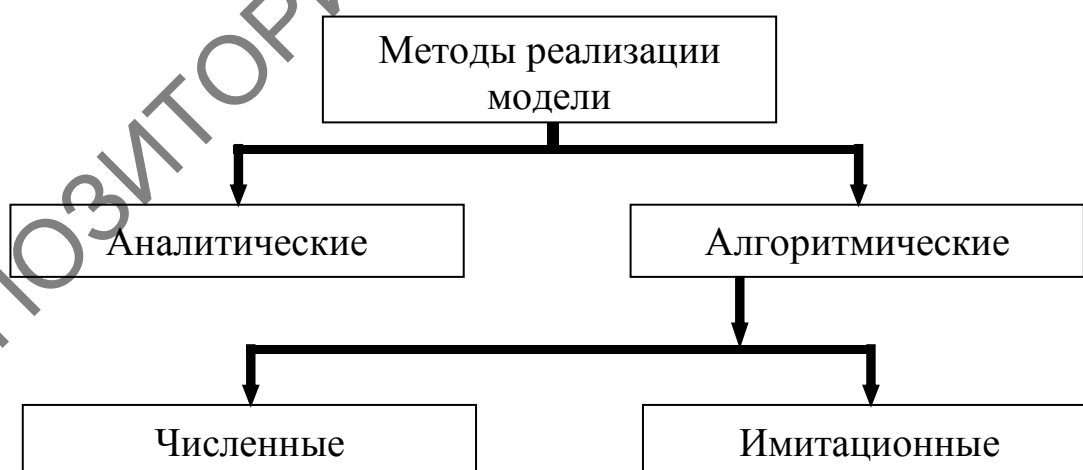


Рисунок 4 – Классификация математических моделей в зависимости от методов реализации

Выше отмечалось, что любая математическая модель может рассматриваться как некоторый оператор  $A$ , который является алгоритмом или определяется совокупностью уравнений – алгебраических, обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), систем ОДУ (СОДУ), дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП), интегро-дифференциальных уравнений (ИДУ) и др. (рисунок 5).

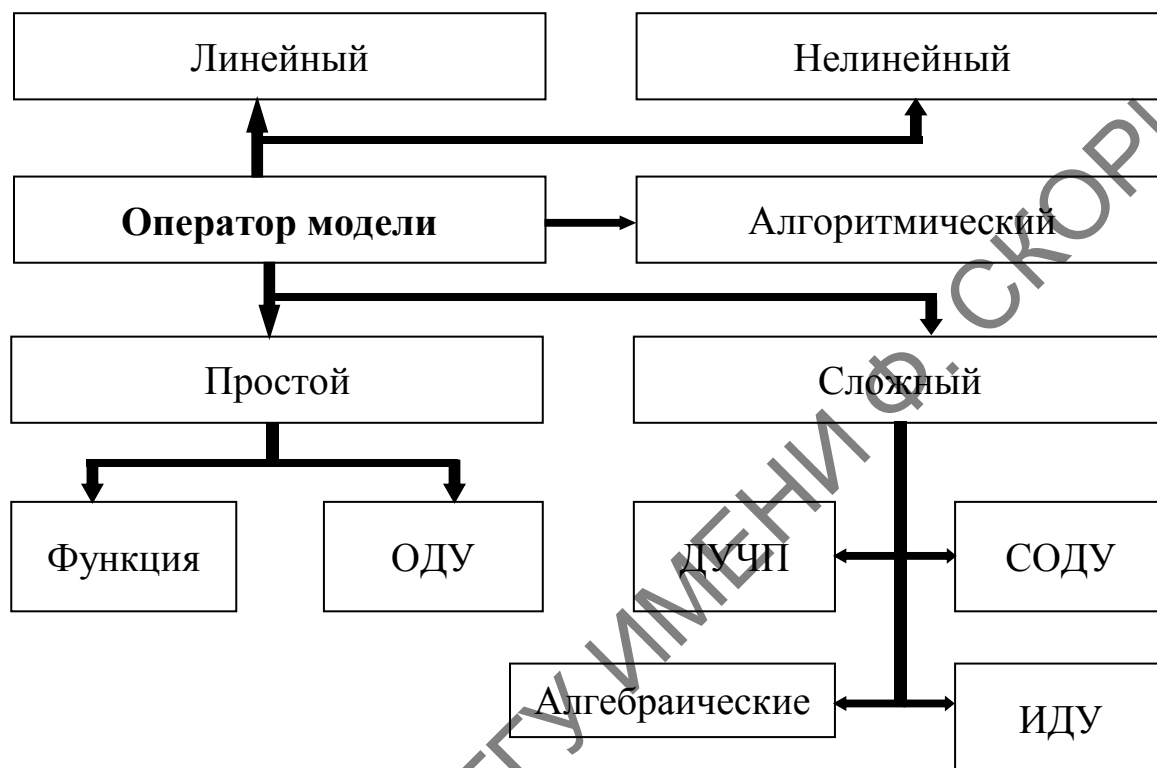


Рисунок 5 – Классификация математических моделей в зависимости от оператора модели

Метод реализации модели относят к аналитическим, если он позволяет получить выходные параметры в виде аналитических выражений, т. е. выражений, в которых используется не более чем счетная совокупность арифметических операций и переходов к пределу.

Аналитические методы реализации модели являются более ценными в том плане, что позволяют с меньшими вычислительными затратами изучить свойства объекта моделирования, применяя традиционные хорошо развитые математические методы анализа аналитических функций. Существенно, что применение аналитических методов возможно без использования ЭВМ. Кроме того, знание аналитического выражения для искомых параметров позволяет исследовать фундаментальные свойства объекта, его качественное поведение, строить новые гипотезы о его внутренней структуре.

Классификация математических моделей в зависимости от параметров модели приведена на рисунке 6.

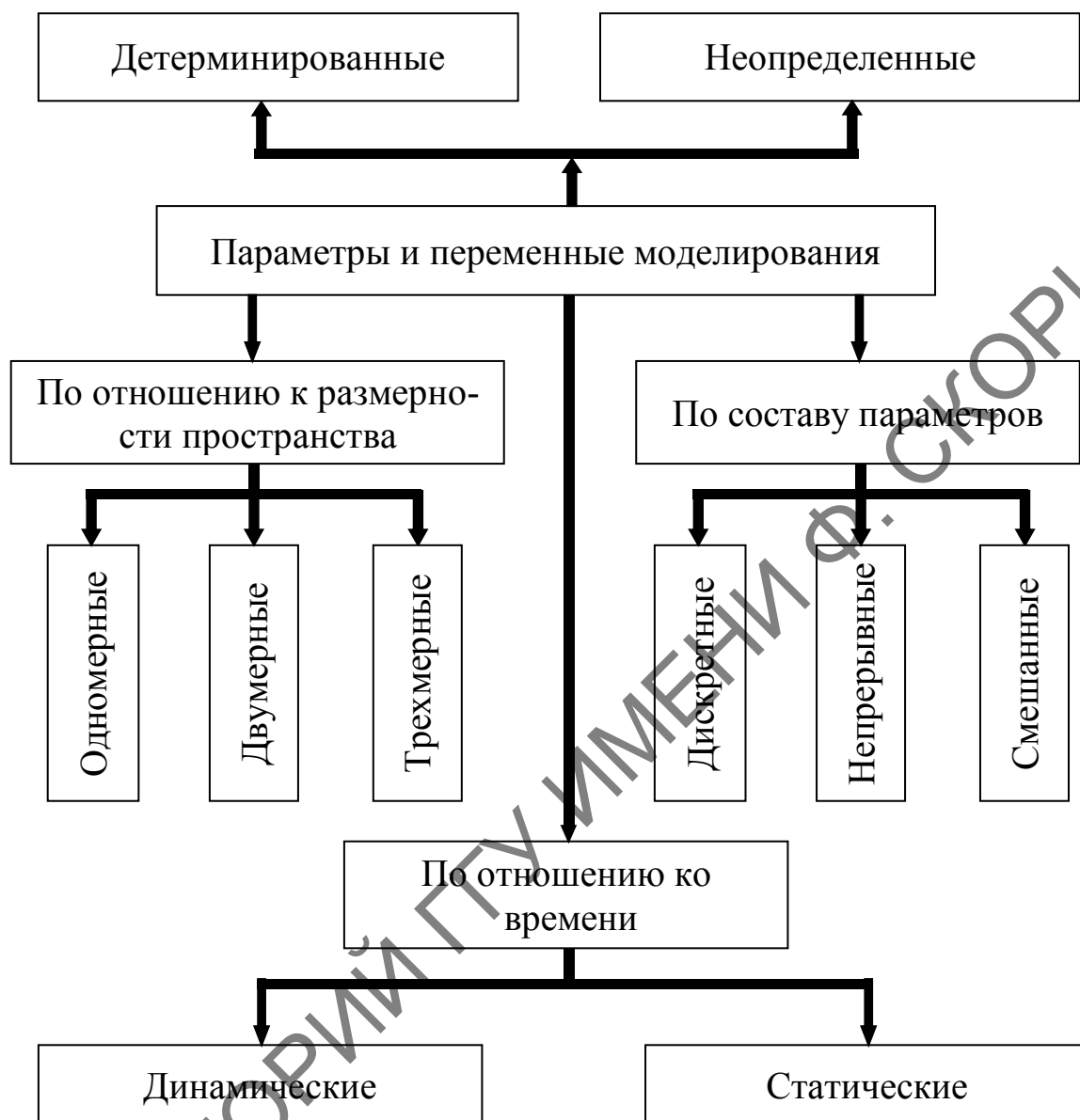


Рисунок 6 – Классификация математических моделей в зависимости от параметров модели

Следует отметить, что возможности аналитических методов существенно зависят от уровня развития соответствующих разделов математики.

В настоящее время всплеск интереса к аналитическим методам при реализации моделей связан с появлением пакетов математических вычислений (Maple, MathCAD, MatLab, Mathematica и др.). Спектр решаемых данными пакетами задач очень велик и постоянно расширяется

(элементарная математика, символьные операции с полиномами, производными и интегралами, с векторами и матрицами, задачи теории поля и векторного анализа, метод конечных элементов и т. п.). Применение подобных программных средств не только упрощает процедуру получения аналитического решения, но и облегчает последующий анализ полученного решения с применением различного рода визуализаторов.

К сожалению, существующие в настоящее время математические методы позволяют получить аналитические решения только для относительно несложных математических моделей в узком диапазоне значений параметров. В большинстве случаев при исследовании моделей приходится использовать алгоритмические подходы, позволяющие получить лишь приближенные значения искомых параметров.

При численном подходе совокупность математических соотношений модели заменяется конечномерным аналогом. Это чаще всего достигается дискретизацией исходных соотношений, т. е. переходом от функций непрерывного аргумента к функциям дискретного аргумента. После дискретизации исходной задачи выполняется построение вычислительного алгоритма, т. е. последовательности арифметических и логических действий, выполняемых на ЭВМ и позволяющих за конечное число шагов получить решение дискретной задачи. Найденное решение дискретной задачи принимается за приближенное решение исходной математической задачи.

Основным требованием к вычислительному алгоритму является необходимость получения решения исходной задачи с заданной точностью за конечное число шагов.

Если при численном подходе дискретизации подвергалась полученная система математических соотношений, то при имитационном подходе на отдельные элементы разбивается сам объект исследования. В этом случае система математических соотношений для объекта-системы в целом не записывается, а заменяется некоторым алгоритмом, моделирующим ее поведение и учитывающим взаимодействие друг с другом моделей отдельных элементов системы. Модели отдельных элементов могут быть как аналитическими, так и алгоритмическими.

Алгоритмические модели, использующие как численный, так и имитационный подход, не позволяют получить решения задач в аналитической форме, что затрудняет и усложняет процесс анализа результатов моделирования. Так как применение моделей данного типа возможно лишь при наличии вычислительной техники, то их эффективность зависит от мощности и быстродействия ЭВМ. Несомненным достоинством алгоритмических моделей является отсутствие принци-



альных ограничений на сложность модели, что позволяет применять их для исследования систем произвольной сложности.

Использование математической модели, построенной алгоритмическими методами, аналогично проведению экспериментов с реальным объектом, только вместо реального эксперимента с объектом проводится вычислительный эксперимент с его моделью. Задаваясь конкретным набором значений исходных параметров модели, в результате вычислительного эксперимента находим конкретный набор приближенных значений искомым параметрам. Для исследования поведения объекта при новом наборе исходных данных необходимо проведение нового вычислительного эксперимента.

#### 4.4. Классификация компьютерных моделей

Компьютерные модели классифицируют по следующим признакам:

- по структуре;
- по назначению;
- по используемой математической модели;
- по степени приближения представления модели к объекту реального мира;
- по совокупности исследуемых свойств;
- по пространственной размерности области моделирования;
- по способу дискретизации по пространственным переменным;
- по методам решения дифференциальных уравнений;
- по зависимости свойств от времени;
- по моделируемым физическим процессам;
- по скорости выполнения моделирования;
- по использованию результатов моделирования.

В зависимости от используемой в компьютерной модели математической модели различают:

- аналитические компьютерные модели, описывающие свойства объекта моделирования системой уравнений, для которой может быть найдено аналитическое решение в явном виде (например, отдельные модели механики твердого тела);
- численные компьютерные модели, описывающие свойства и поведение объекта моделирования системой уравнений, для которой нахождение решения осуществляется с использованием методов вычислительной математики (например, разностных методов или методов конечных элементов, итерационных алгоритмов и т. п. применяемых

для решения задач механики деформируемого твердого тела, теплообмена, гидродинамики, электродинамики и т. п.);

- статистические компьютерные модели, описывающие свойства и поведение объекта моделирования с использованием методов теории вероятности и математической статистики (например, модели массового обслуживания, модели, описывающие динамику изменения складских запасов).

В зависимости от структуры компьютерной модели различают простые и составные (комплексные) компьютерные модели, которые состоят из набора взаимосвязанных моделей, описывающих один объект моделирования.

В зависимости от назначения компьютерной модели различают:

- компьютерные модели инженерного анализа, предназначенные для описания свойств и поведения объекта моделирования с учетом физических процессов;

- виртуально-имитационные компьютерные модели, предназначенные для моделирования процессов взаимодействия элементов систем взаимодействующих объектов с целью изучения поведения этих систем.

По степени приближения представления компьютерной модели к объекту реального мира различают:

- упрощенные компьютерные модели, используемые для отработки элементов конструкции объекта моделирования;

- точные компьютерные модели, используемые при проведении виртуальных экспериментов.

По совокупности исследуемых свойств компьютерные модели различают:

- простые компьютерные модели (например, для исследования одного свойства);

- комбинированные компьютерные модели, позволяющие исследовать совокупность различных свойств объекта моделирования.

По пространственной размерности области моделирования компьютерные модели различают:

- нульмерные компьютерные модели с сосредоточенными параметрами;

- одномерные компьютерные модели;

- двумерные компьютерные модели;

- трехмерные компьютерные модели.

По способу дискретизации по пространственным переменным компьютерные модели, в частности, различают:

- конечно-разностные;
- конечно-элементные;
- конечно-объемные.

По методам решения дифференциальных уравнений компьютерные модели различают:

- детерминистские компьютерные модели;
- стохастические компьютерные модели (метод Монте-Карло).

По зависимости свойств компьютерные модели от времени различают:

- стационарные (статические);
- нестационарные (динамические).

По моделируемым физическим процессам могут быть выделены компьютерные модели:

- аэродинамики;
- гидродинамики;
- теплопроводности;
- прочности.

Приведенный перечень классификационных признаков может быть расширен в зависимости от моделируемых процессов, характерных для конкретной предметной области.

По скорости выполнения моделирования различают компьютерные модели, работающие в реальном масштабе времени и работающие не в реальном масштабе времени. Компьютерные модели реального времени, как правило, используют в управляющих системах, тренажерах и т. д. Компьютерные модели инженерного анализа применяют не в реальном масштабе времени.

По использованию результатов моделирования различают компьютерные модели:

- применяемые при разработке изделий и проведении их приемочных, приемо-сдаточных, предварительных, государственных, квалификационных, серийных и иных испытаний, а также на дальнейших этапах жизненного цикла изделия;
- применяемые для проведения исследований в интересах определения стратегии развития и оптимизации структуры системы взаимодействующих объектов;
- применяемые для поддержки принятия решений при взаимодействии с системой взаимодействующих объектов;
- применяемые в обучающих целях (в качестве тренажеров) для выработки навыков по эксплуатации системы взаимодействующих объектов.

## Вопросы для самоконтроля

1. Какие виды моделирования можно выделить на эмпирическом и теоретическом уровнях исследования?
2. Чем отличаются натурное и аналоговое моделирование?
3. Дайте классификацию математических моделей в зависимости от методов реализации модели.
4. Дайте классификацию математических моделей в зависимости от оператора модели.
5. Классифицируйте математические модели в зависимости от параметров модели.
6. Классифицируйте компьютерные модели.

## 5. ЭТАПЫ ПОСТРОЕНИЯ КОМПЬЮТЕРНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Внедрение вычислительной техники во все сферы человеческой деятельности привело к повсеместному использованию математических моделей. Заметим, что ЭВМ – это только «железо», а «умным» и полезным его делают программы, которые в большинстве случаев являются реализациями алгоритмов соответствующих математических моделей. Поэтому необходимо создание большого количества разнообразных математических моделей с широкими возможностями.

Необходимость массового построения моделей требует разработки некоторой совокупности правил и подходов, которые позволили бы снизить затраты на разработку моделей и уменьшить вероятность появления трудноустраняемых впоследствии ошибок. Подобную совокупность правил можно было бы назвать технологией создания математических моделей. При этом, как уже отмечалось, в основе компьютерной модели лежит математическая модель, реализованная в виде программного кода, и данные, определяющие конкретный объект моделирования.

Процесс построения любой компьютерной математической модели можно представить последовательностью этапов, представленных на рисунке 7.

*Этап обследования* включает следующие работы:

- обследование объекта моделирования и определение целей моделирования для выявления основных факторов, механизмов, влияющих на поведение объекта моделирования, определения соответствующих параметров, позволяющих описывать моделируемый объект;

- сбор и проверка имеющихся экспериментальных данных об объектах-аналогах, проведение при необходимости дополнительных экспериментов;

- аналитический обзор информации, анализ и сравнение между собой построенных ранее моделей данного объекта (или подобных рассматриваемому объекту);

- анализ и обобщение всего накопленного материала, разработка общего плана создания математической модели.

Весь собранный в результате обследования материал о накопленных к данному моменту знаниях об объекте, требования к реализации модели и представлению результатов оформляются в виде технического задания на проектирование и разработку модели.

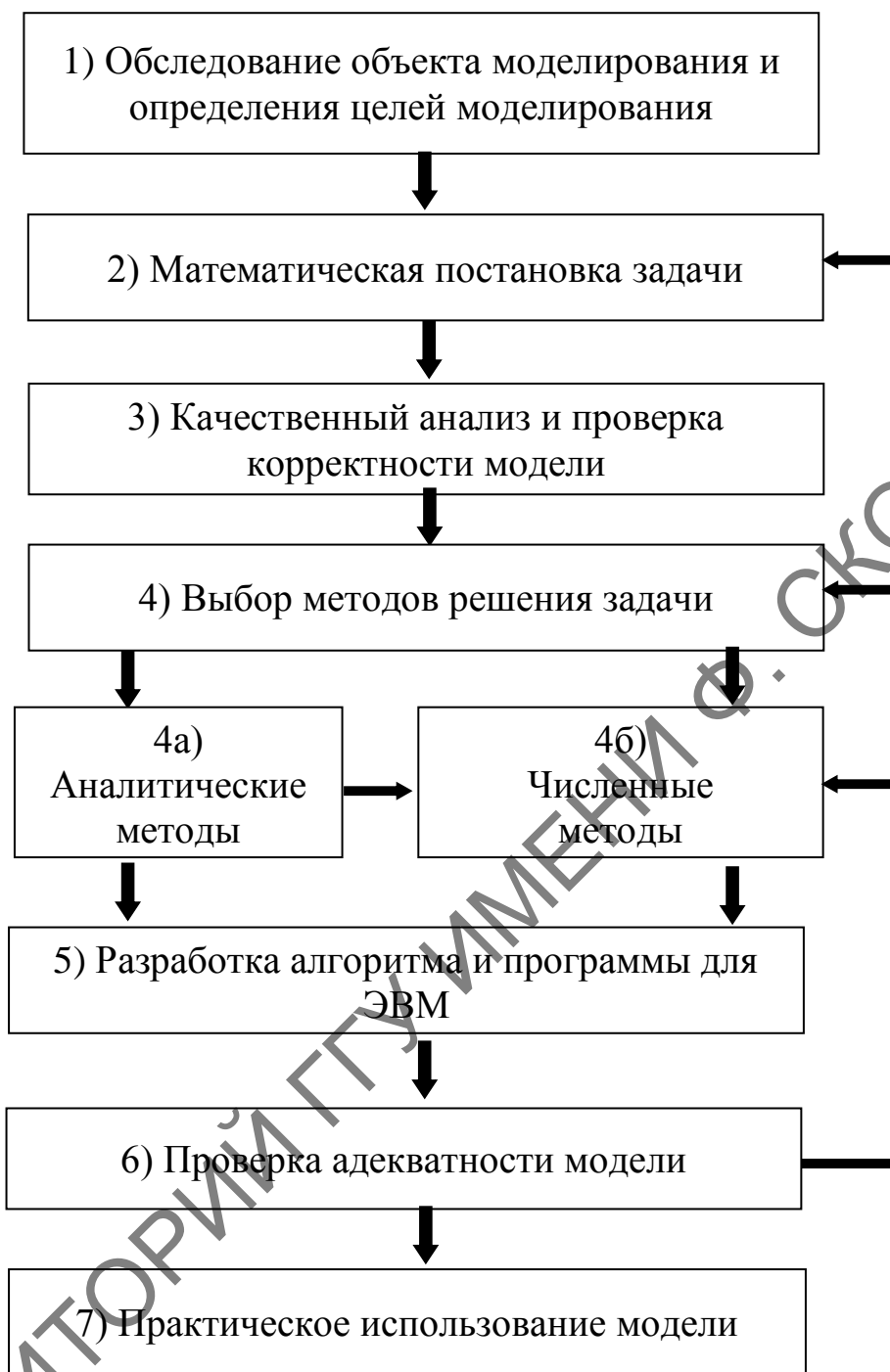


Рисунок 7 – Этапы построения компьютерной математической модели

На втором этапе разрабатывается концептуальная, или «естественнонаучная» (физическая, химическая, биологическая и т. д.), постановка задачи моделирования. *Концептуальная постановка задачи моделирования* – это сформулированный в терминах конкретных дисциплин (физики, химии, биологии и т. д.) перечень основных вопросов, подлежащих решению при моделировании, а также совокупность гипотез относительно свойств и поведения объекта моделирования.

Законченная концептуальная постановка позволяет сформулировать математическую постановку задачи моделирования, включающую совокупность различных математических соотношений, описывающих поведение и свойства объекта моделирования.

*Математическая постановка задачи моделирования* – это совокупность математических соотношений, описывающих поведение и свойства объекта моделирования.

На третьем этапе осуществляется качественный анализ и проверка корректности модели. Для контроля правильности полученной системы математических соотношений требуется проведение ряда обязательных проверок:

- контроль размерностей;
- контроль порядков, состоящий из грубой оценки сравнительных порядков складываемых величин и исключением малозначимых параметров;
- контроль характера зависимостей, который заключается в проверке того, что направление и скорость изменения выходных параметров модели, вытекающие из выписанных математических соотношений, такие, как это следует непосредственно из «физического» смысла изучаемой модели;
- контроль экстремальных ситуаций – проверка того, какой вид принимают математические соотношения, а также результаты моделирования, если параметры модели или их комбинации приближаются к предельно допустимым для них значениям, чаще всего к нулю или бесконечности;
- контроль граничных условий, включающий проверку того, что граничные условия действительно наложены, использованы в процессе построения искомого решения и значения выходных параметров модели на самом деле удовлетворяют данным условиям;
- контроль физического смысла – проверка физического или иного, в зависимости от характера задачи, смысла исходных и промежуточных соотношений, появляющихся по мере конструирования модели.

На четвертом этапе осуществляется выбор методов решения задачи. При использовании разработанных математических моделей, как правило, требуется найти зависимость некоторых неизвестных заранее параметров объекта моделирования, удовлетворяющих определенной системе уравнений. Таким образом, поиск решения задачи сводится к отысканию некоторых зависимостей искомых величин от исходных параметров модели. Как уже было отмечено, все методы решения задач, составляющих «ядро» математических моделей, можно подразделить

на аналитические и численные методы. Процесс разработки программной реализации является не менее сложным, чем все предыдущие этапы создания математической модели.

На пятом этапе осуществляется процесс создания программной реализации математической модели, его можно разбить на ряд этапов:

- проектирование структуры;
- кодирование алгоритма;
- тестирование и отладка.

Отметим, что большинство программ, реализующих математические модели, состоят из трех основных частей:

- препроцессор (подготовка и проверка исходных данных модели);
- процессор (решение задачи, реализация вычислительного эксперимента);
- постпроцессор (отображение полученных результатов).

На шестом этапе осуществляется проверка адекватности модели. Под адекватностью математической модели будет пониматься степень соответствия результатов, полученных по разработанной модели, данным эксперимента или тестовой задачи. Прежде чем переходить к проверке адекватности модели, необходимо убедиться в правильном комплексном функционировании всех алгоритмов и программ модели, выполнить независимое тестирование и отладку всех отдельных алгоритмов (например, используемых программных модулей, реализующих используемый численный метод).

Проверка адекватности модели преследует две цели:

1) убедиться в справедливости совокупности гипотез, сформулированных на этапах концептуальной и математической постановок. Переходить к проверке гипотез следует лишь после проверки использованных методов решения, комплексной отладки и устранения всех ошибок и конфликтов, связанных с программным обеспечением;

2) установить, что точность полученных результатов соответствует точности, оговоренной в техническом задании.

Проверка разработанной математической модели выполняется путем сравнения с имеющимися экспериментальными данными о реальном объекте или с результатами других, созданных ранее и хорошо себя зарекомендовавших моделей. В первом случае говорят о проверке путем сравнения с экспериментом, во втором – о сравнении с результатами решения тестовой задачи.

Решение вопроса о точности моделирования зависит от требований, предъявляемых к модели, и ее назначения. При этом должна учитываться точность получения экспериментальных результатов или осо-



бенности постановок тестовых задач. В моделях, предназначенных для выполнения оценочных и прикладных расчетов, удовлетворительной считается точность 10 – 15 %. В моделях, используемых в управляющих и контролирующих системах, требуемая точность может быть 1 – 2 %.

Последний этап – это этап практического использования созданной модели и анализа результатов моделирования.

### **Вопросы для самоконтроля**

1. Опишите процесс построения любой компьютерной модели.
2. Что включают в себя этапы построения компьютерной модели?
3. Какие цели преследует проверка адекватности модели?
4. Как выполняется проверка разработанной математической модели?

## ЛИТЕРАТУРА

1. Самарский, А. А. Математическое моделирование. Идеи. Методы. Примеры / А. А. Самарский, А. П. Михайлов. – 2-е изд., испр. – М. : Физматлит, 2001. – 320 с.

2. Введение в математическое моделирование : учебное пособие / В. Н. Ашихмин [и др.] ; под ред. П. В. Трусова. – М. : Интернет Инжиниринг, 2000. – 336 с.

3. Паничев, В. В. Компьютерное моделирование : учебное пособие / В. В. Паничев, Н. А. Соловьев. – Оренбург : ГОУ ОГУ, 2008. – 130 с.

4. Дьяконов, В. П. Новые информационные технологии : учебное пособие : в 3 ч. Ч. 3. Основы математики и математическое моделирование / В. П. Дьяконов, И. В. Абраменкова, А. А. Пеньков. – Смоленск : СГПУ, 2003. – 192 с.

5. Кундас, С. П. Компьютерное моделирование технологических систем : учебное пособие : в 2 ч. / С. П. Кундас, Т. А. Кашко. – Минск : БГУИР, 2001. – Ч. 1. – 164 с.

6. Компьютерное моделирование технологических систем : учебное пособие : в 2 ч. / С. П. Кундас [и др.]. – Минск : БГУИР, 2003. – Ч. 2. – 192 с.

7. Горностаева, Т. Н. Математическое и компьютерное моделирование [Электронный ресурс] : учебное пособие / Т. Н. Горностаева, О. М. Горностаев. – М. : Мир науки, 2019. – Сетевое издание. – Режим доступа: <https://izd-mn.com/PDF/50MNNPU19.pdf>. – Дата доступа: 13.04.2023.

8. Леонова, Н. Л. Компьютерное моделирование : курс лекций / Н. Л. Леонова. – СПб. : СПбГТУРП, 2015. – 88 с.

9. ГОСТ Р 57700.22-2020. Компьютерные модели и моделирование. Классификация. – Введ. 2020-11-13. – М. : Стандартинформ, 2020. – 11 с.

10. ГОСТ Р 57412-2017. Компьютерные модели в процессах разработки, производства и эксплуатации изделий. – Введ. 2017-07-01. – М. : Стандартинформ, 2018. – 11 с.

Производственно-практическое издание

**Никитюк Юрий Валерьевич,  
Серда Андрей Александрович**

**ВВЕДЕНИЕ В ТЕХНОЛОГИИ  
КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ.  
КОМПЬЮТЕРНОЕ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ  
МОДЕЛИРОВАНИЕ**

Практическое руководство

Редактор А. А. Банчук  
Корректор В. В. Калугина

Подписано в печать 17.08.2023. Формат 60x84 1/16.  
Бумага офсетная. Ризография.  
Усл. печ. л. 2,1. Уч.-изд. л. 2,3.  
Тираж 10 экз. Заказ 410.

Издатель и полиграфическое исполнение:  
учреждение образования

«Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,  
распространителя печатных изданий № 3/1452 от 17.04.2017.

Специальное разрешение (лицензия) № 02330 / 450 от 18.12.2013.

Ул. Советская, 104, 246028, Гомель.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ