УДК 512.542
DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_3_56_44
EDN: GKWXXU

О *p*-ДЛИНЕ КОНЕЧНОЙ ФАКТОРИЗУЕМОЙ ГРУППЫ С ЗАДАННЫМИ УСЛОВИЯМИ ПЕРЕСТАНОВОЧНОСТИ ПОДГРУПП ИЗ СОМНОЖИТЕЛЕЙ

Е.В. Зубей, А.А. Трофимук

Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина

ON THE *p*-LENGTH OF A FINITE FACTORIZABLE GROUP WITH GIVEN PERMUTABILITY CONDITIONS FOR SUBGROUPS OF FACTORS

E.V. Zubei, A.A. Trofimuk

Brest State A.S. Pushkin University

Аннотация. Подгруппа A группы G называется *tcc-подгруппой* в G, если существует подгруппа T группы G такая, что $G=AT$ и для любого $X \le A$ и для любого $Y \le T$ существует элемент $u \in \langle X, Y\rangle$ такой, что $XY^u \le G$. Предположим, что $G = AB$ – произведение двух p-разрешимых *tcc*-подгрупп A и B. Получена зависимость оценки p-длины группы G от ступени нильпотентности и числа образующих подгрупп A_p и B_p, где A_p и B_p – силовские p-подгруппы подгрупп A и B соответственно.

Ключевые слова: *конечная группа*, *p-разрешимая группа*, *tcc-подгруппа*, *p-длина*.

Для цитирования: *Зубей*, *Е.В.* О *p*-длине конечной факторизуемой группы с заданными условиями перестановочности подгрупп из сомножителей / Е.В. Зубей, А.А. Трофимук // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 3 (56). – С. 44–47. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_3_56_44. – EDN: GKWXXU

Abstract. A subgroup A of a group G is called *tcc*-subgroup in G, if there is a subgroup T of G such that $G=AT$ and for any $X \le A$ and for any $Y \le T$ there exists an element $u \in \langle X, Y\rangle$ such that $XY^u \le G$. Suppose that $G = AB$ is a product of two p-soluble *tcc*-subgroups A and B. We give a bound of the p-length of G from the nilpotent class and the number of generators of A_p and B_p, where A_p and B_p are the Sylow subgroups of A and B respectively.

Keywords: *finite group*, *p-solvable group*, *tcc-subgroup*, *p-length*.

For citation: *Zubei*, *E.V.* On the *p*-length of a finite factorizable group with given permutability conditions for subgroups of factors / E.V. Zubei, A.A. Trofimuk // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2023. – № 3 (56). – P. 44–47. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_3_56_44 (in Russian). – EDN: GKWXXU

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Используемые обозначения и определения стандартны, их можно найти в [1].

Пусть G – p-разрешимая группа. Это означает, что она обладает нормальным рядом

$$1 = G_0 \subseteq G_1 \subseteq \ldots \subseteq G_n = G,$$

в котором каждая фактор-группа G_{i+1} / G_i является либо p-группой, либо p'-группой. Поэтому для такой группы можно определить (p', p)-ряд:

$$1 = P_0 \subseteq N_0 \subseteq P_1 \subseteq N_1 \subseteq P_2 \subseteq \ldots \subseteq P_l \subseteq N_l = G,$$

где $N_i / P_i = O_{p'}(G / P_i)$ – наибольшая нормальная p'-подгруппа в G / P_i, а $P_{i+1} / N_i = O_p(G / N_i)$ – наибольшая нормальная p-подгруппа в G / N_i. Наименьшее натуральное число l такое, что $N_l = G$, называют *p-длиной* группы G и обозначают через $l_p(G)$.

Большое значение для теории p-разрешимых групп имеет статья Ф. Холла и Г. Хигмена [2], в которой введено понятие p-длины p-разрешимой группы и установлена связь между ее оценками и некоторыми характеристиками ее силовской p-подгруппы. В частности, доказано, что *p-длина p-разрешимой группы G не превышает ступени нильпотентности* $c(G_p)$ *и числа образующих* $g(G_p)$ *силовской p-подгруппы* G_p *группы G*.

Эта тематика нашла свое развитие в работах А.Х. Журтова, В.Д. Мазурова и С.А. Сыскина [3], [4]. Одним из результатов этих работ является следующее утверждение: *если G – p-разрешимая группа с силовской p-подгруппой, изоморфной силовской подгруппе группы Шмидта, то p-длина не превышает* 1. Отсюда, в частности, следует, что *разрешимая группа, представимая в виде произведения двух подгрупп Шмидта взаимно простых порядков, имеет p-длину, не* *превышающую* 1 *для всех* $p \in \pi(G)$ [5]. В.Н. Княгина и В.С. Монахов [6] рассмотрели более общую ситуацию: *если A и B – подгруппы Шмидта конечной p-разрешимой группы G и* $G = AB$, *то p-длина группы G не превышает* 2.

В последние десятилетия большой популярностью пользуется направление исследований, связанное с изучением строения групп $G = AB$, у которых некоторые системы подгрупп из сомножителей A и B перестановочны, см. [7]. Напомним, что подгруппы A и B группы G называются *перестановочными*, если $AB = BA$. Заметим, что равенство $AB = BA$ равносильно тому, что $AB \le G$. Среди множества результатов этой тематики отдельное место занимают работы, которые посвящены нахождению зависимости между числовыми инвариантами (нильпотентая длина, p-длина и др.) факторизуемых групп и числовыми инвариантами их сомножителей, связанных между собой заданными условиями перестановочности, см. [8]–[10].

В работе [11] было введено следующее

Определение. Подгруппа A группы G называется *tcc*-подгруппой в G, если она удовлетворяет следующим условиям:

1) в G существует подгруппа T такая, что $G = AT$;

2) для любого $X \le A$ и для любого $Y \le T$ существует элемент $u \in \langle X, Y\rangle$ такой, что $XY^u \le G$.

Подгруппу T в дальнейшем будем называть *tcc-добавлением* к подгруппе A в группе G.

В работе [12] были исследованы производная и нильпотентная длины группы $G = AB$, где A и B – разрешимые *tcc*-подгруппы группы G. Кроме того, для p-разрешимых подгрупп A и B доказано, что G p-разрешима и

$$l_p(G) \le 1 + \max\{l_p(A), l_p(B)\}. \qquad (0.1)$$

Так как $l_p(G) \le c(G_p)$ и $l_p(G) \le g(G_p)$, то из (0.1) следует, что

$$l_p(G) \le 1 + \max\{c(A_p), c(B_p)\}$$

и

$$l_p(G) \le 1 + \max\{g(A_p), g(B_p)\}. \qquad (0.2)$$

Оценки (0.2) уточнены в следующей теореме.

Теорема. *Пусть* $G = AB$ *– произведение tcc-подгрупп A и B. Если A и B p-разрешимы, то G p-разрешима и справедливы следующие утверждения*:

(1) $l_p(G) \le \max\{c(A_p), c(B_p)\}$;

(2) $l_p(G) \le \max\{g(A_p), g(B_p)\}$.

1 Вспомогательные результаты

Запись $H \le G$ означает, что H – подгруппа группы G. Подгруппы Фраттини и Фиттинга группы G обозначаются через $\Phi(G)$ и $F(G)$. Запись $G = A \rtimes B$ означает полупрямое произведение с нормальной подгруппой A.

Группа G называется примитивной, если в G существует максимальная подгруппа M с единичным ядром $M_G = \cap_{x\in G} M^x = 1$. В этом случае подгруппа M называется примитиватором группы G.

Произведение $G = AB$ называется *tcc-перестановочным* [13], если для любых $X \le A$ и $Y \le B$ существует элемент $u \in \langle X, Y\rangle$ такой, что $XY^u \le G$.

***Лемма* 1.1** [теорема 1, предложения 1-2]. *Пусть* $G = AB$ *– tcc-перестановочное произведение подгрупп A и B. Предположим, что N – минимальная нормальная подгруппа группы G. Тогда справедливы следующие утверждения*:

(1) $\{A \cap N, B \cap N\} \subseteq \{1, N\}$;

(2) *если* $N \le A \cap B$ *или* $A \cap N = B \cap N = 1$, *то* $|N| = p$, *где p – простое число.*

Напомним, что $F_p(G)$ – это наибольшая нормальная p-нильпотентная подгруппа группы G, равная произведению всех p-нильпотентных нормальных подгрупп группы G.

Если в группе G имеется нормальная подгруппа $G_{p'}$ такая, что $G = G_{p'} \rtimes G_p$, то группа G называется p-нильпотентной.

***Лемма* 1.2** [14, II.3.2]. *Пусть G – p-разрешимая группа такая, что* $l_p(G/K) \le k$ *для всех неединичных нормальных подгрупп K группы G, но* $l_p(G) > k$. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

(1) $\Phi(G) = 1$;

(2) $F_p(G)$ *– элементарная абелева p-группа*;

(3) $F_p(G)$ *– единственная минимальная подгруппа группы G и* $G = F_p(G) \rtimes M$, *где M – примитиватор группы G*;

(4) $C_G(F_p(G)) = F_p(G)$.

***Лемма* 1.3** [12, лемма 2.6]. *Пусть A – собственная неединичная tcc-подгруппа примитивной группы G и Y – tcc-добавление к A в G. Предположим, что N – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G. Если* $N \cap A = 1$ *и* $N \le Y$, *то A – циклическая группа порядка, делящего* $p-1$.

***Лемма* 1.4.** *Пусть p – p-группа и N – нормальная в p подгруппа. Тогда*

$$g(P/N) \le g(P) - 1, \qquad (1.1)$$

если $N \not\le \Phi(P)$.

Доказательство. Из [1, теорема 3.22] следует, что $\Phi(P)N/N \le \Phi(P/N)$. Так как P – p-подгруппа, то $P/\Phi(P)$ – элементарная абелева p-подгруппа и

$$(P/N)/(\Phi(P)N/N) \simeq$$
$$\simeq P/\Phi(P)N \simeq (P/\Phi(P))/(\Phi(P)N/\Phi(P)) -$$

элементарная абелева p-подгруппа.

Тогда из [1, теорема 3.25 (3)] следует, что $\Phi(P/N) \le \Phi(P)N/N$. Поэтому

$$\Phi(P/N) = \Phi(P)N/N.$$

Пусть $g(P) = m$ и $g(P/N) = k$. Тогда по [1, теорема 3.25 (4)] $|P/\Phi(P)| = p^m$ и

$$p^k = |(P/N)/\Phi(P/N)| =$$

$$= |P/\Phi(P)N| = \frac{|P/\Phi(P)|}{|\Phi(P)N/\Phi(P)|} =$$

$$= \frac{p^m}{|\Phi(P)N/\Phi(P)|} = \frac{p^m}{|N/\Phi(P)\cap N|} < p^m,$$

так как $N \nleq \Phi(P)$ и $N \cap \Phi(P) < N$.

Таким образом, $k < m$. Поэтому $g(P/N) < g(P)$ или $g(P/N) \le g(P) - 1$. □

2 Доказательство теоремы

По [12, теорема] группа G p-разрешима. Пусть

$\max\{c(A_p), c(B_p)\} = k_c$ и $\max\{g(A_p), g(B_p)\} = k_g$.

Покажем, что $l_p(G) \le k_c$ и $l_p(G) \le k_g$. Предположим, что теорема неверна и G – контрпример наименьшего порядка. Пусть N – неединичная минимальная нормальная подгруппа. Тогда AN/N и BN/N p-разрешимы и являются *tcc*-подгруппами в G/N. Тогда по выбору группы G

$$l_p(G/N) \le \max\{c(A_pN/N), c(B_pN/N)\}$$

и $l_p(G/N) \le \max\{g(A_pN/N), g(B_pN/N)\}$.

Так как

$$c(A_pN/N) \le c(A_p) \text{ и } c(B_pN/N) \le c(B_p),$$

а также

$$g(A_pN/N) \le g(A_p) \text{ и } g(B_pN/N) \le g(B_p),$$

то $l_p(G/N) \le k_c$ и $l_p(G/N) \le k_g$.

Очевидно, что $O_{p'}(G) = 1$. По лемме 1.2 $\Phi(G) = 1$ и группа G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу N такую, что $N = C_G(N) = F(G) = O_p(G)$ и $G = N \rtimes M$ – примитивная группа с примитиватором M.

Пусть Y – *tcc*-добавление к подгруппе A в группе G. По лемме 1.1 либо $|N| = p$, либо $N \le A$ и $N \cap Y = 1$, либо $N \cap A = 1$ и $N \le Y$. Анналогично и для подгруппы B и ее *tcc*-добавления X в G: либо $|N| = p$, либо $N \le B$ и $N \cap X = 1$, либо $N \cap B = 1$ и $N \le X$.

Если $|N| = p$, то G/N изоморфна циклической группе автоморфизмов группы N. Следовательно, G сверхразрешима и $l_p(G) \le 1$. Значит $l_p(G) \le k_c$ и $l_p(G) \le k_g$, противоречие.

Если $N \cap A = 1 = N \cap B$, то по лемме 1.3 A и B циклические. Тогда G сверхразрешима, противоречие.

Пусть $N \le A \cap B$. Поэтому $N \le A_p$. Тогда

$$Z(A_p) = C_{A_p}(N) \le C_A(N) =$$

$$= C_G(N) \cap A = N \cap B = N.$$

Следовательно, $c(A_p/N) = c(A_p) - 1$. Аналогично $c(B_p/N) = c(B_p) - 1$.

Таким образом,

$$l_p(G/N) \le \max\{c(A_p/N), c(B_p/N)\} \le$$

$$\le \max\{c(A_p), c(B_p)\} - 1.$$

Тогда

$$l_p(G) \le l_p(G/N) + l_p(N) \le$$

$$\le \max\{c(A_p), c(B_p)\} - 1 + 1 = \max\{c(A_p), c(B_p)\}.$$

Поскольку $G = N \rtimes M$ и $N \le A_p$, то $A_p = N \rtimes (A_p \cap M)$ и $N \nleq \Phi(A_p)$. По лемме 1.4 $g(A_p/N) \le g(A_p) - 1$. Аналогично

$$g(B_p/N) \le g(B_p) - 1.$$

Таким образом,

$$l_p(G/N) \le \max\{g(A_p/N), g(B_p/N)\} \le$$

$$\le \max\{g(A_p), g(B_p)\} - 1.$$

Тогда $l_p(G) \le \max\{g(A_p), g(B_p)\}$.

Пусть $N \cap Y = N \cap B = 1$ и $N \le A \cap X$. По лемме 1.3 подгруппа B циклическая, порядка делящего $p-1$. Поэтому $B_p = 1$ и $c(B_p) = 0$ $(g(B_p) = 0)$.

Таким образом,

$$l_p(G/N) \le \max\{c(A_p/N), c(B_pN/N)\} \le$$

$$\le \max\{c(A_p) - 1, 0\} \le$$

$$\le c(A_p) - 1 \le \max\{c(A_p), c(B_p)\} - 1.$$

Аналогично

$$l_p(G/N) \le \max\{g(A_p/N), g(B_pN/N)\} \le$$

$$\le \max\{g(A_p) - 1, 0\} \le$$

$$\le g(A_p) - 1 \le \max\{g(A_p), g(B_p)\} - 1.$$

Тогда $l_p(G) \le k_c$ и $l_p(G) \le k_g$, противоречие.

Аналогичные рассуждения справедливы для случая $N \cap X = N \cap A = 1$ и $N \le B \cap Y$. □

ЛИТЕРАТУРА

1. *Монахов*, *В.С.* Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов. – Минск: Вышэйшая школа, 2006. – 207 с.

2. *Hall*, *P.* The p-lengh of a p-soluble groups and reduction theorems for Burnside's problem / P. Hall, G. Higman // Proc. London Math. Soc. – 1956. – Vol. 3, № 7. – P. 1–42.

3. *Мазуров*, *В.Д.* О конечных группах с специальными силовскими 2-подгруппами / В.Д. Мазуров, С.А. Сыскин // Математические заметки. – 1973. – Т. 14, № 2. – С. 217–222.

4. *Журтов*, *А.Х.* О группах Шмидта / А.Х. Журтов, С.А. Сыскин // Сибирский математический журнал. – 1987. – Т. 28, № 2. – С. 74–78.

5. *Монахов*, *В.С.* Произведение конечных групп, близких к нильпотентным / В.С. Монахов. В сб.: Конечные группы. – Минск: Наука и техника, 1975. – С. 70–100.

6. *Княгина*, *В.Н.* О *p*-длине произведения двух групп Шмидта / В.Н. Княгина, В.С. Монахов // Сибирский математический журнал. – 2004. – Т. 45, № 2. – С. 329–333.

7. *Монахов*, *В.С.* Произведение двух групп Шмидта / В.С. Монахов // ДАН БССР. – 1975. – Т. 19, № 1. – С. 8–11.

8. *Cossey*, *J.* On the *p*-length of the mutually permutable product of two *p*-soluble groups / J. Cossey, Y. Li // Arch. Math. – 2018. – Vol. 110. – P. 533–537.

9. *Jabara*, *E.* The Fitting length of a product of mutually permutable finite groups / E. Jabara // Acta Math. Hungar. – 2019. – Vol. 159. – P. 206–210.

10. *Murashka*, *V.I.* On the lengths of mutually permutable products of finite groups / V.I. Murashka, A.F. Vasil'ev // Acta Math. Hungar. – 2023. – DOI: https://doi.org/10.1007/s10474-023-01346-2.

11. *Trofimuk*, *A.A.* On the supersolubility of a group with some tcc-subgroups / A.A. Trofimuk // J. Algebra Appl. – 2021. – Vol. 20, № 2. – P. 2150020-1–2150020-18.

12. *Trofimuk*, *A.A.* On numerical invariants of a finite group factorized by tcc-subgroups / A.A. Trofimuk // Quaest. Math. – 2023. – DOI: https://doi.org/ 10.2989/16073606.2023.2176796.

13. *Arroyo-Jorda*, *M.* Conditional permutability of subgroups and certain classes of groups / M. Arroyo-Jorda, P. Arroyo-Jorda // J. Algebra. – 2017. – Vol. 476. – P. 395–414.

14. *Huppert*, *B.* Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin, Heidelberg, New York, 1967. – 796 p.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь (*ГПНИ* «*Конвергенция-2025*», № *гос. рег.* 20211467).

Поступила в редакцию 21.07.2023.

Информация об авторах

Зубей Екатерина Владимировна – к.ф.-м.н., доцент

Трофимук Александр Александрович – д.ф.-м.н., доцент