МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

О ПРОБЛЕМЕ ДЁРКА – ХОУКСА ДЛЯ ЛОКАЛЬНО НОРМАЛЬНЫХ КЛАССОВ ФИТТИНГА

А.В. Марцинкевич

Витебский государственный университет им. П.М. Машерова

ON THE PROBLEM OF DOERK AND HAWKES FOR LOCALLY NORMAL FITTING CLASSES

A.V. Martsinkevich

P.M. Masherov Vitebsk State University

Пусть $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга конечных групп. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют $\mathfrak{X}$-нормальным или нормальным в классе конечных групп $\mathfrak{X}$, если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$ и для любой группы $G \in \mathfrak{X}$ её $\mathfrak{F}$-радикал является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой группы G. Если $\mathfrak{X}$ – класс всех конечных разрешимых групп, то $\mathfrak{X}$-нормальный класс Фиттинга называют нормальным. В теории нормальных классов Фиттинга известна проблема Дёрка – Хоукса о том, что если $\mathfrak{X}$ – класс Фиттинга и $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}^2$, то является ли пересечение двух неединичных $\mathfrak{X}$-нормальных классов Фиттинга неединичным $\mathfrak{X}$-нормальным классом Фиттинга. В работе получено положительное решение данной проблемы без требования $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}^2$ для произвольного семейства неединичных $\mathfrak{X}$-нормальных классов Фишера частично разрешимых групп в случае, когда $\mathfrak{X}$ – класс Фишера такой, что $\mathfrak{N}_p\mathfrak{X} = \mathfrak{X}$ для некоторого простого *p*.

Ключевые слова*: класс Фиттинга, $\mathfrak{X}$-нормальный класс Фиттинга, $\mathfrak{F}$-радикал, пересечение классов Фиттинга.*

Let $\mathfrak{F}$ be a non-empty class of finite groups. A Fitting class $\mathfrak{F}$ is said to be $\mathfrak{X}$-normal or normal in a class of finite groups $\mathfrak{X}$ if $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$ and for all $G \in \mathfrak{X}$ an $\mathfrak{F}$-radical of *G* is $\mathfrak{F}$-maximal in *G*. If $\mathfrak{X}$ is a class of all soluble finite groups, then $\mathfrak{X}$-normal Fitting class is called normal. In the theory of normal Fitting classes the problem of Doerk and Hawkes is well known. Let $\mathfrak{X}$ be a Fitting class and $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}^2$. Is the intersection of two non-trivial $\mathfrak{X}$-normal Fitting classes always non-trivial $\mathfrak{X}$-normal Fitting class? In this paper a positive answer to this question without the requirement that $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}^2$ for the case of arbitrary family of non-trivial $\mathfrak{X}$-normal Fischer classes partially soluble groups, where $\mathfrak{X}$ is a Fischer class such, that $\mathfrak{N}_p\mathfrak{X} = \mathfrak{X}$ for some prime *p* is given.

Keywords: *Fitting class*, $\mathfrak{X}$*-normal Fitting class*, $\mathfrak{F}$*-radical*, *intersection of Fitting classes*.

Введение

В работе все рассматриваемые группы конечны. Класс групп $\mathfrak{F}$ называют *классом Фиттинга*, если он замкнут относительно нормальных подгрупп и произведений нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп. Из определения класса Фиттинга следует, что для любого непустого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ в каждой группе *G* существует наибольшая нормальная $\mathfrak{F}$-подгруппа, которую обозначают $G_{\mathfrak{F}}$. Её называют $\mathfrak{F}$*-радикалом* *G*. Подгруппу *H* группы *G* называют $\mathfrak{F}$*-максимальной* в *G*, если $H \in \mathfrak{F}$ и из условия $H \le K \le G$, $K \in \mathfrak{F}$ следует, что $H = K$.

Напомним, что $\mathfrak{F}$*-инъектором* группы *G* называют такую её подгруппу *V*, что для любой субнормальной подгруппы *N* группы *G* пересечение $V \cap N$ является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой *N*.

Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют нормальным [1, определение 1.1], если для любой разрешимой группы *G* её $\mathfrak{F}$-инъектор является нормальной подгруппой *G*, т. е. для любой разрешимой группы её $\mathfrak{F}$-радикал является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой *G*.

Основополагающий результат в теории нормальных классов Фиттинга был получен Блессенолем и Гашюцом [1, теорема 6.2] о том, что пересечение всех неединичных нормальных классов Фиттинга есть неединичный нормальный класс Фиттинга. Из теоремы следует, что существует наименьший неединичный нормальный класс Фиттинга. Значимость понятия нормального класса Фиттинга подчеркивает тот факт, что, используя наименьший нормальный класс Фиттинга, Гашюц в работе [2] выявил новые свойства разрешимых радикалов произвольных групп.

В последующем Лауэ [3], развивая теорию нормальных классов Фиттинга в общем случае неразрешимых групп, была предложена локализация понятия свойства нормальности классов Фиттинга в смысле следующего определения.

***Определение* 0.1** [3, определение 1.1]. Пусть $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга. Класс $\mathfrak{F}$ назовем $\mathfrak{X}$*-нормальным* или нормальным в классе групп $\mathfrak{X}$ (обозначают $\mathfrak{F} \trianglelefteq \mathfrak{X}$), если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$ и для любой группы $G \in \mathfrak{X}$ её $\mathfrak{F}$-радикал является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой *G*. Заметим, что в случае, когда $\mathfrak{X} = \mathfrak{S}$, где $\mathfrak{S}$ – класс всех разрешимых групп, $\mathfrak{F}$ является *нормальным* в смысле определения Блессеноля – Гашюца из [1].

Напомним, что *классом Фишера* называют класс Фиттинга $\mathfrak{F}$, если из того, что $K \trianglelefteq G$, $G \in \mathfrak{F}$, $K \leq H \leq G$ и H / K – *p*-группа для некоторого простого *p*, следует $H \in \mathfrak{F}$.

Класс групп $\mathfrak{F}$ называют *гомоморфом*, если из условия $G \in \mathfrak{F}$, $K \trianglelefteq G$ следует $G / K \in \mathfrak{F}$.

Произведением классов Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ называют класс групп $\mathfrak{F}\mathfrak{H} = (G : G / G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{H})$. Хорошо известно, что произведение классов Фиттинга является классом Фиттинга и операция умножения классов Фиттинга ассоциативна [4, теорема IX.1.12 (a), (c)].

Пусть $\mathfrak{F}$ – класс групп и $\sigma(\mathfrak{F})$ – множество всех простых делителей всех групп из $\mathfrak{F}$. Тогда символом $\mathfrak{S}^{\sigma(\mathfrak{F})}$ будем обозначать класс всех $\sigma(\mathfrak{F})$-разрешимых групп.

В работе [5] нами было получено развитие теоремы Блессеноля – Гашюца [1, теорема 6.2] для произвольных классов Фиттинга. Пусть $\mathfrak{X}$ – класс Фишера, $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ – множество $\mathfrak{X}$-нормальных классов Фиттинга, которые являются гомоморфами, и $\mathfrak{F} = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{F}_i$. Было установлено [5], что если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{S}^{\sigma(\mathfrak{F})}$, то $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{X}$-нормальным классом Фиттинга. Понятно, что теорема Блессеноля – Гашюца является специальным случаем указанной теоремы при $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{S}$.

Заметим, что в работе [1] (см. также [4, глава X.3]) изучались пересечения неединичных нормальных классов Фиттинга. Однако, как показывает следующий пример, не всегда пересечение неединичных нормальных классов Фиттинга будет неединичным классом Фиттинга.

Символом $\mathfrak{N}_p$ будем обозначать класс всех *p*-групп (*p* – простое число), (1) – класс всех единичных групп.

***Пример* 0.2** [6, замечание 3.1.12]. Пусть $\mathbb{N}$ – множество всех натуральных чисел, $\{p_1, p_2, ...\}$ – множество всех простых чисел и $\mathfrak{X} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathfrak{N}_{p_i} \cdots \mathfrak{N}_{p_1}$. Как установлено в [6] $\mathfrak{F}_k = \bigcup_{i \in \mathbb{N}, i \geq k} \mathfrak{N}_{p_i} \cdots \mathfrak{N}_{p_k}$ – $\mathfrak{X}$-нормальный класс Фиттинга для любого $k \in \mathbb{N}$ и $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathfrak{F}_k = (1)$.

Очевидно, что в примере 0.2 $\mathfrak{X} \neq \mathfrak{X}^2$. В связи с этим, Дёрком и Хоуксом была сформулирована следующая проблема.

***Проблема* 0.3** [4, с. 716]. Пусть $\mathfrak{X}$ – класс Фиттинга и $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}^2$. Является ли пересечение двух неединичных $\mathfrak{X}$-нормальных классов Фиттинга неединичным $\mathfrak{X}$-нормальным классом Фиттинга? В частности, верно ли это для случая $X = \mathfrak{E}$, где $\mathfrak{E}$ – класс всех групп?

Пример 0.2 показывает, что если $\mathfrak{X} \neq \mathfrak{X}^2$, то проблема Дёрка – Хоукса в общем случае решается отрицательно. Это приводит к постановке задачи нахождения семейств классов Фиттинга, для которых проблема 0.3 решается положительно без условия $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}^2$. Решение такой задачи – основной результат настоящей работы.

Нами определены условия, при которых указанная проблема 0.3 решается положительно даже в случае, когда $\mathfrak{X} \neq \mathfrak{X}^2$ в универсуме обобщенно разрешимых групп. Доказана

***Теорема* 0.4.** *Пусть* $\mathfrak{X}$ *– класс Фишера,* $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ *– семейство неединичных* $\mathfrak{X}$*-нормальных классов Фишера,* $\mathfrak{F} = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ *и* $\mathfrak{N}_p \mathfrak{X} = \mathfrak{X}$ *для некоторого простого числа p. Если* $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{S}^{\sigma(\mathfrak{F})}$, *то* $\mathfrak{F}$ *является неединичным* $\mathfrak{X}$*-нормальным классом Фиттинга.*

1 Предварительные сведения

В определениях и обозначениях мы следуем [4]. Приведем некоторые основные понятия и в качестве лемм известные утверждения, которые мы будем использовать для описания методов построения локально нормальных классов Фиттинга и доказательства основного результата.

***Лемма* 1.1** [4, лемма A.1.2 (a)]. *Пусть U, V и W – подгруппы группы G. Тогда* $U \cap VW = (U \cap V)(U \cap W)$ *эквивалентно* $UV \cap UW = U(V \cap W)$.

***Лемма* 1.2** [4, лемма IX.1.1 (a)]. *Пусть G – группа,* $\mathfrak{F}$ *– непустой класс Фиттинга. Если* $N \trianglelefteq\trianglelefteq G$, *то* $N_{\mathfrak{F}} = N \cap G_{\mathfrak{F}}$.

Пусть $\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел, $\pi \in \mathbb{P}$ и $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$.

Напомним, что если $\mathfrak{F}$ – класс групп и *G* – группа, то $\sigma(G) = \{p : p \in \mathbb{P}$ и $p \mid |G|\}$ и $\sigma(\mathfrak{F}) = \bigcup\{\sigma(F) : F \in \mathfrak{F}\}$.

Символом $\mathfrak{S}^{\pi}$ будем обозначать класс всех π-разрешимых групп.

Приведем вначале следующие леммы, которые представляют свойства $\mathfrak{F}$-инъектора группы *G*.

***Лемма* 1.3.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– класс Фиттинга и* $\varnothing \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

(1) [7, теорема A(1)] *если* $G \in \mathfrak{F}\mathfrak{S}^{\sigma(\mathfrak{F})}$, *то в G существует* $\mathfrak{F}$*-инъектор и любые два* $\mathfrak{F}$*-инъектора сопряжены в G*;

(2) [8, теорема 2.4.27] *если G – группа такая, что* $G/G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{S}$, *то в G существуют* $\mathfrak{F}$*-инъекторы и любые два из них сопряжены в G.*

Мы используем следующую модификацию теорем Шеметкова [9].

***Лемма* 1.4.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– класс Фиттинга, G –* π*-разрешимая группа, где* $\pi = \sigma(\mathfrak{F})$. *Справедливы следующие утверждения:*

(1) [9, теорема 2.2] *группа G обладает по крайней мере одним* $\mathfrak{F}$*-инъектором и любые два* $\mathfrak{F}$*-инъектора сопряжены в G*;

(2) [9, теорема 2.3(1)] *если V –* $\mathfrak{F}$*-инъектор G и* $V \le R \le G$, *то V –* $\mathfrak{F}$*-инъектор R.*

***Лемма* 1.5.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– класс Фиттинга, тогда справедливы следующие утверждения*:

(1) [4, замечание IX.1.3 (a)] *если K – субнормальная подгруппа группы G и V –* $\mathfrak{F}$*-инъектор G, то* $V \cap K$ *–* $\mathfrak{F}$*-инъектор K*;

(2) [4, замечание IX.1.3 (b)] *если V –* $\mathfrak{F}$*-инъектор G и* $\alpha : G \to G^{\alpha}$ *– изоморфизм, то* V^{α} *–* $\mathfrak{F}$*-инъектор* G^{α};

(3) [10, теорема 2.5.11] *если* $G \in \mathfrak{F}\mathfrak{S}^{\sigma(\mathfrak{F})}$ *и V –* $\mathfrak{F}$*-инъектор G, причем U – подгруппа G, содержащая V, то V –* $\mathfrak{F}$*-инъектор U.*

Напомним, что для каждого непустого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ через $\mathfrak{F}^{*}$ обозначают наименьший из классов Фиттинга, содержащий $\mathfrak{F}$, такой, что для всех групп *G* и *H* справедливо равенство $(G \times H)_{\mathfrak{F}^{*}} = G_{\mathfrak{F}^{*}} \times H_{\mathfrak{F}^{*}}$. Если класс $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^{*}$, то класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют *классом Локетта* [11].

Через $G \wr H$ мы будем обозначать регулярное сплетение групп *G* и *H*, через $G^{\natural}$ – базисную группу $G \wr H$.

***Лемма* 1.6** [4, предложение X.2.1 (a)]. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– класс Локетта и группа* $G \notin \mathfrak{F}$. *Тогда* $(G \wr H)_{\mathfrak{F}} = (G_{\mathfrak{F}})^{\natural}$ *для любой группы H.*

Используемые нами в дальнейшем свойства операторов Локетта, представляет следующая лемма.

***Лемма* 1.7.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– класс Фиттинга.*

(1) [4, лемма X.1.3] *Если группа* $G \in \mathfrak{F}^{*}$, *то* $G/G_{\mathfrak{F}}$ *– абелева группа.*

(2) [4, теорема X.1.15] $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}^{*}$.

Пусть $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга. Тогда символом $R(\mathfrak{F})$ обозначим класс всех групп *G*, в которых $G_{\mathfrak{F}}$ является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой *G*, символом Z_p – циклическую группу простого порядка *p*.

Если $\mathfrak{X}$ – класс групп, то $\mathrm{S_n}\,\mathfrak{X} = (G : G \trianglelefteq\trianglelefteq H$ для некоторой $H \in \mathfrak{X})$. Класс $\mathfrak{X}$ называется замкнутым относительно субнормальных подгрупп, если $\mathrm{S_n}\,\mathfrak{X} = \mathfrak{X}$.

***Лемма* 1.8** [6, лемма 3.1.6 (a)]. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– класс Фиттинга,* $\mathfrak{X}$ *– класс, замкнутый относительно субнормальных подгрупп такой, что* $\mathfrak{X} \not\subseteq R(\mathfrak{F})$. *Если G – разрешимая группа минимального порядка такая, что* $G \in \mathfrak{X} \setminus R(\mathfrak{F})$, *и V –* $\mathfrak{F}$*-инъектор G, то в G существует единственная максимальная нормальная подгруппа N такая, что* $G = VN$, $V \cap N = G_{\mathfrak{F}}$ *и* $V/G_{\mathfrak{F}} \cong Z_p$ *для некоторого* $p \in \mathbb{P}$.

Напомним, что подгруппа *H* группы *G* называется π*-холловой подгруппой*, если $|H|$ является π-числом, а индекс $|G:H|$ – π'-числом.

Пусть $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга и $\pi \in \mathbb{P}$. Для построения $\mathfrak{X}$-нормальных классов Фиттинга мы будем использовать конструкцию класса Фиттинга $\mathfrak{F}^{\pi}$, которая была определена Локеттом в [12] следующим образом: разрешимая группа $G \in \mathfrak{F}^{\pi}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$-инъектор *G* содержит некоторую холлову π-подгруппу *G*. В частности, если $\pi = \{p\}$, то класс $\mathfrak{F}^{\{p\}}$ будем обозначать $\mathfrak{F}^{p}$.

Характеристикой класса групп $\mathfrak{F}$ называется множество $\mathrm{Char}(\mathfrak{F}) = \{p \in \mathbb{P} : Z_p \in \mathfrak{F}\}$.

***Лемма* 1.9** [12, теорема 3.2]. *Пусть* $\mathfrak{X}$ *и* $\mathfrak{Y}$ *– классы Фиттинга разрешимых групп, G – разрешимая группа и* $\pi = \mathrm{Char}(\mathfrak{Y})$. *Пусть группа T –* $\mathfrak{X}$*-инъектор* $G_{\mathfrak{X}^{\pi}}$ *такая, что T нормализуется некоторой холловой* π*-подгруппой* G_{π} *группы G. Если* V/T *–* $\mathfrak{Y}$*-инъектор* TG_{π}/T, *то V –* $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$*-инъектор G. В частности, если* $\mathrm{Char}(\mathfrak{Y}) = \mathbb{P}$ *и* $U/G_{\mathfrak{X}}$ *–* $\mathfrak{Y}$*-инъектор* $G/G_{\mathfrak{X}}$, *то U –* $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$*-инъектор группы G.*

***Лемма* 1.10** [13, лемма 2.2]. *Если* $\mathfrak{F}$ *– класс Фишера, то* $\sigma(\mathfrak{F}) = \mathrm{Char}(\mathfrak{F})$.

***Лемма* 1.11** [4, предложение X.1.25]. *Каждый класс Фишера является классом Локетта.*

2 О методах построения $\mathfrak{X}$-нормальных классов Фиттинга

В настоящем разделе мы докажем ряд утверждений, которые описывают методы построения $\mathfrak{X}$-нормальных классов Фиттинга.

Заметим, что для класса групп $\mathfrak{X}$, в котором существуют $\mathfrak{F}$-инъекторы, ввиду [7, лемма 2.2 (1), (2)] понятие $\mathfrak{X}$-нормальности (см. определение 0.1) совпадает с понятием $\mathfrak{X}$-нормальности в смысле следующего определения.

***Определение* 2.1.** Пусть $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга. Класс $\mathfrak{F}$ называют $\mathfrak{X}$*-нормальным* или нормальным в классе групп $\mathfrak{X}$, если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$ и для любой группы $G \in \mathfrak{X}$ её $\mathfrak{F}$-инъекторы являются нормальными подгруппами G.

Символом $\mathfrak{N}$ будем обозначать класс всех нильпотентных групп.

***Предложение* 2.2.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга и $\mathfrak{X} = \mathfrak{F}\mathfrak{N}$. Тогда $\mathfrak{F} \trianglelefteq \mathfrak{X}$. В частности, если $\mathfrak{X} = \mathfrak{F}^*$, то $\mathfrak{F} \trianglelefteq \mathfrak{F}^*$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{X} = \mathfrak{F}\mathfrak{N}$. Очевидно, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$. Пусть $G \in \mathfrak{X}$. Тогда $G / G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{N}$. Так как $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{S}$, то $G \in \mathfrak{F}\mathfrak{S}$ и по утверждению (2) леммы 1.3 в G существуют $\mathfrak{F}$-инъекторы и любые два из них сопряжены в G. Пусть V – $\mathfrak{F}$-инъектор группы G, то $V / G_{\mathfrak{F}} \trianglelefteq\trianglelefteq G / G_{\mathfrak{F}}$. Следовательно, $V \trianglelefteq\trianglelefteq G$ и $V \leq G_{\mathfrak{F}}$. С другой стороны, $V \geq G_{\mathfrak{F}}$. Значит, $V = G_{\mathfrak{F}}$ и $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{X}$-нормальным классом Фиттинга.

Пусть $\mathfrak{X} = \mathfrak{F}^*$. По утверждению (2) леммы 1.7 имеем $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$. Пусть $G \in \mathfrak{X}$. Тогда по утверждению (1) леммы 1.7 $G / G_{\mathfrak{F}}$ – абелева группа и $G / G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{N}$. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{F}$ – $\mathfrak{X}$-нормальный класс Фиттинга. □

***Предложение* 2.3.** *Пусть $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{X}$ – классы Фиттинга и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{X}$. Тогда справедливы следующие утверждения*:

(1) *если $\mathfrak{F} \trianglelefteq \mathfrak{X}$, то $\mathfrak{F} \trianglelefteq \mathfrak{H}$*;

(2) *если $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{N}$, то $\mathfrak{H} \trianglelefteq \mathfrak{X}$.*

Доказательство. (1) По условию $\mathfrak{F}$ нормален в $\mathfrak{X}$. Значит, для любой группы $G \in \mathfrak{X}$ её $\mathfrak{F}$-радикал является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой G. Пусть $H \in \mathfrak{H}$. Так как $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{X}$, то $\mathfrak{F}$-радикал группы H является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой H и класс $\mathfrak{F} \trianglelefteq \mathfrak{H}$. Утверждение (1) доказано.

(2) Пусть $\mathfrak{H}$ – класс Фиттинга такой, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{X}$. Так как $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{H}\mathfrak{N}$ и по предложению 2.2 $\mathfrak{H} \trianglelefteq \mathfrak{H}\mathfrak{N}$, то ввиду (1) $\mathfrak{H} \trianglelefteq \mathfrak{X}$. □

***Предложение* 2.4.** *Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – классы Фиттинга такие, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{S}^{\sigma(\mathfrak{F})}$, $\mathfrak{M}$ – класс Фиттинга $\sigma(\mathfrak{F})$-разрешимых групп. Справедливы следующие утверждения.*

(1) *Если $\sigma(\mathfrak{F}) \cap \sigma(\mathfrak{M}) = \varnothing$ и $\mathfrak{F} \trianglelefteq \mathfrak{H}$, то $\mathfrak{F} \trianglelefteq \mathfrak{H}\mathfrak{M}$. В частности, $\mathfrak{F} \trianglelefteq \mathfrak{F}\mathfrak{M}$.*

(2) *Если $\mathfrak{F} \trianglelefteq \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$, то $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{M} \trianglelefteq \mathfrak{M}$.*

Доказательство. (1) Пусть $\sigma(\mathfrak{F}) = \pi$ и $G \in \mathfrak{H}\mathfrak{M}$. По утверждению (1) леммы 1.4 в группе G существуют $\mathfrak{F}$-инъекторы и любые два из них сопряжены в G. Тогда V – $\mathfrak{F}$-инъектор G. Так как $V \in \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}_{\sigma(\mathfrak{F})}$ и $\sigma(\mathfrak{F}) = \pi$, то по теореме Чунихина $V = V_{\pi} \leq G_{\pi}$, где G_{π} и V_{π} – холловы π-подгруппы групп G и V соответственно. Так как $G \in \mathfrak{H}\mathfrak{M}$, то $G / G_{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{S}^{\pi}$. Тогда ввиду условия $\sigma(\mathfrak{F}) \cap \sigma(\mathfrak{M}) = \varnothing$ следует, что $G / G_{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{E}_{\pi'}$ и $G_{\pi} \leq G_{\mathfrak{H}}$. Следовательно, $V \leq G_{\mathfrak{H}} \leq G$ и по утверждению (2) леммы 1.4 V – $\mathfrak{F}$-инъектор $G_{\mathfrak{H}}$.

По условию $\mathfrak{F} \trianglelefteq \mathfrak{H}$, и поэтому $G_{\mathfrak{F}}$ – $\mathfrak{F}$-инъектор G. Следовательно, $\mathfrak{F} \trianglelefteq \mathfrak{H}\mathfrak{M}$. Утверждение (1) доказано.

(2) Пусть $G \in \mathfrak{M}$. Так как по условию $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F} \trianglelefteq \mathfrak{H}$, то $G \in \mathfrak{H}$ и $G_{\mathfrak{F}}$ является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой G. По свойству радикалов получаем $G_{\mathfrak{F} \cap \mathfrak{M}} \leq G_{\mathfrak{F}}$. Так как $G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F} \cap \mathfrak{M}$ и $G_{\mathfrak{F}} \trianglelefteq G$, то $G_{\mathfrak{F}}$ – нормальная $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{M}$-подгруппа G. По определению $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{M}$-радикала получаем $G_{\mathfrak{F}} \leq G_{\mathfrak{F} \cap \mathfrak{M}}$. Значит, $G_{\mathfrak{F}} = G_{\mathfrak{F} \cap \mathfrak{M}}$.

Пусть существует группа K такая, что $K \in \mathfrak{F} \cap \mathfrak{M}$ и $G_{\mathfrak{F} \cap \mathfrak{M}} \leq K \leq G$. Так как $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$, то $K \in \mathfrak{F}$ и $G_{\mathfrak{F} \cap \mathfrak{M}} \in \mathfrak{F}$. Ввиду $G_{\mathfrak{F}} = G_{\mathfrak{F} \cap \mathfrak{M}}$, по определению $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппы $K = G_{\mathfrak{F} \cap \mathfrak{M}}$. Значит, $G_{\mathfrak{F} \cap \mathfrak{M}}$ – $(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{M})$-максимальна в G. Утверждение (2) доказано. □

В следующих трёх утверждениях мы опишем методы построения $\mathfrak{X}$-нормальных классов Фиттинга в универсуме $\mathfrak{S}$ всех разрешимых групп.

***Предложение* 2.5.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга и $\mathfrak{X} = \mathfrak{F}\mathfrak{N}^2$. Если $\mathfrak{F} \trianglelefteq \mathfrak{X}$, то либо $\mathfrak{F} \trianglelefteq \mathfrak{S}$, $\mathfrak{F} = (1)$.*

Доказательство. Предположим, что класс $\mathfrak{F}$ не является нормальным классом Фиттинга. Пусть G – группа минимального порядка такая, что её $\mathfrak{F}$-радикал не совпадает с $\mathfrak{F}$-инъектором G. Ввиду леммы 1.8 существуют простые числа p и q такие, что $G \in \mathfrak{F}\mathfrak{N}_q\mathfrak{N}_p$. Так как $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_q\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{N}^2$, то получаем противоречие с условием $\mathfrak{F} \trianglelefteq \mathfrak{X}$. Следовательно, $\mathfrak{F}$ является нормальным классом Фиттинга. □

***Предложение* 2.6.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга и $\mathfrak{X}$ – класс Фишера. Тогда следующие утверждения эквиваленты*:

(1) $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{N}$;

(2) *если $\mathfrak{F} \trianglelefteq \mathfrak{X}$, то для всех классов Фиттинга $\mathfrak{H}$ таких, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{X}$, класс $\mathfrak{H} \trianglelefteq \mathfrak{X}$.*

Доказательство. $(1) \Rightarrow (2)$. Пусть $\mathfrak{H}$ – класс Фиттинга такой, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{X}$. По утверждению (2) предложения 2.3 получаем $\mathfrak{H} \trianglelefteq \mathfrak{X}$.

Докажем, что $(2) \Rightarrow (1)$. Предположим от противного, что $\mathfrak{X} \not\subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{N}$. Пусть G – группа минимального порядка из класса $\mathfrak{X} \setminus \mathfrak{F}\mathfrak{N}$.

Если предположить, что в G существуют две различные максимальные нормальные подгруппы M_1 и M_2, то ввиду выбора G имеем $M_1 \in \mathfrak{FN}$ и $M_2 \in \mathfrak{FN}$. Следовательно, $M_1M_2 = G \in \mathfrak{FN}$. Полученное противоречие доказывает, что $G_{\mathfrak{FN}}$ – единственная максимальная нормальная подгруппа группы G.

Тогда $|G / G_{\mathfrak{FN}}| = p$ и $O^{p'}(G) = G$. Так как $\mathfrak{F}$ нормален в $\mathfrak{X}$, то $G_{\mathfrak{F}}$ – $\mathfrak{F}$-инъектор G и по утверждению (3) леммы 1.5 $G_{\mathfrak{F}}$ – $\mathfrak{F}$-инъектор группы $G_{\mathfrak{F}^p}$. Следовательно, по лемме 1.9 подгруппа $G_{\mathfrak{F}}G_p$ – $\mathfrak{FN}_p$-инъектор G, где G_p – силовская p-подгруппа группы G. Так как $\mathfrak{X}$ – класс Фишера, то $G_{\mathfrak{F}}G_p \in \mathfrak{X}$. Следовательно, $G_{\mathfrak{F}}G_p$ – $\mathfrak{FN}_p \cap \mathfrak{X}$-инъектор G. Так как $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{FN}_p \cap \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{X}$, то по условию утверждения (2) $G_{\mathfrak{F}}G_p \trianglelefteq G$. Ввиду $O^{p'}(G) = G$, $G = G_{\mathfrak{F}}G_p \trianglelefteq G \in \mathfrak{FN}_p \subseteq \mathfrak{FN}$. Получили противоречие с выбором группы G. Таким образом, $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{FN}$. □

Напомним, что символом $O_p(G)$ обозначают наибольшую нормальную p-подгруппу группы G, символом $G_{\mathfrak{N}}$ – нильпотентный радикал G.

***Предложение* 2.7.** *Пусть* $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{H}$ *и* $\mathfrak{M}$ – *классы Фиттинга такие, что* $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$. *Справедливы следующие утверждения.*

(1) *Если* $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F}$ *и* $\mathfrak{F} \trianglelefteq \mathfrak{H}$, *то для любого класса* $\mathfrak{M}$ *верно* $\mathfrak{MF} \trianglelefteq \mathfrak{MH}$.

(2) *Пусть* $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F}$. *Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

(a) $\mathfrak{F} \trianglelefteq \mathfrak{H}$;

(b) $\mathfrak{NF} \trianglelefteq \mathfrak{NH}$.

Доказательство. (1) Пусть $G \in \mathfrak{MH}$. По утверждению (1) леммы 1.4 в группе G существуют $\mathfrak{F}$-инъекторы и любые два из них сопряжены в G. Покажем, что для любой группы G её $\mathfrak{MF}$-инъектор совпадает с $G_{\mathfrak{MF}}$. Так как $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F}$, то $\mathrm{Char}(\mathfrak{F}) = \mathbb{P}$. Если подгруппа $V / G_{\mathfrak{M}}$ – $\mathfrak{F}$-инъектор группы $G / G_{\mathfrak{M}}$, то по лемме 1.9 получаем, что V – $\mathfrak{MF}$-инъектор группы G. По определению произведения классов Фиттинга $G / G_{\mathfrak{M}} \in \mathfrak{H}$. По условию $\mathfrak{F} \trianglelefteq \mathfrak{H}$. Следовательно, $V / G_{\mathfrak{M}} \trianglelefteq G / G_{\mathfrak{M}}$ и $V \trianglelefteq G$. Это означает, что $\mathfrak{MF} \trianglelefteq \mathfrak{MH}$. Утверждение (1) доказано.

(2) Пусть $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F} \trianglelefteq \mathfrak{H}$. Тогда по утверждению (1) получаем, что $\mathfrak{NF} \trianglelefteq \mathfrak{NH}$.

Обратно, пусть $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{NF} \trianglelefteq \mathfrak{NH}$. Докажем, что $\mathfrak{F} \trianglelefteq \mathfrak{H}$. Пусть $G \in \mathfrak{H}$ и p – простое такое, что $p \nmid |G|$. Тогда $O_p(G) = 1$. Пусть M – точный G-модуль группы над $GF(p)$ и $H = MG$ – полупрямое произведение групп M и G. Очевидно, что $H_{\mathfrak{N}} = M$. Пусть V – $\mathfrak{F}$-инъектор группы G. Так как $MG / H_{\mathfrak{N}} = MG / M \cong G$, то $MV / H_{\mathfrak{N}}$ – $\mathfrak{F}$-инъектор группы $MG / H_{\mathfrak{N}}$. Следовательно по лемме 1.9 MV – $\mathfrak{NF}$-инъектор группы H. Ввиду $H \in \mathfrak{NH}$ и $\mathfrak{NF} \trianglelefteq \mathfrak{NH}$, получаем $MV \trianglelefteq H$. Следовательно,

$$MV / M \trianglelefteq H / M = MG / M \cong G / (G \cap M) \cong G.$$

Ввиду изоморфизма $MV / M \cong V / V \cap M \cong V$, по утверждению (2) леммы 1.5 получаем $V \trianglelefteq G$. Следовательно, $\mathfrak{F} \trianglelefteq \mathfrak{H}$. Утверждение (2) доказано.□

3 Доказательство теоремы 0.4

Вначале определим условия, когда пересечение неединичных $\mathfrak{X}$-нормальных классов Фишера является неединичным классом Фиттинга.

***Лемма* 3.1.** *Пусть* $\mathfrak{X}$ – *класс Фиттинга и* $\{\mathfrak{F}_i\}_{i \in I}$ – *семейство неединичных* $\mathfrak{X}$-*нормальных классов Фишера. Если существует простое* p *такое, что* $\mathfrak{N}_p\mathfrak{X} = \mathfrak{X}$, *то* $\bigcap_{\in I} \mathfrak{F}_i \neq (1)$.

Доказательство. Предположим, что $p \notin \sigma(\mathfrak{F}_i)$. Так как по лемме 1.10 $\sigma(\mathfrak{F}_i) = \mathrm{Char}(\mathfrak{F}_i)$, то $Z_p \notin \mathfrak{F}_i$. По лемме 1.11 класс Фишера $\mathfrak{F}_i$ является классом Локетта для каждого $i \in I$. Следовательно, для любой группы $G \in \mathfrak{F}_i$ по лемме 1.6 $Z_p \wr G \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{X} \setminus R(\mathfrak{F}_i)$ для всех $i \in I$. По условию $\mathfrak{F}_i$ является $\mathfrak{X}$-нормальным классом Фиттинга для любого $i \in I$. Следовательно, $\mathfrak{X} \subseteq R(\mathfrak{F}_i)$ и $\mathfrak{N}_p\mathfrak{X} \setminus R(\mathfrak{F}_i) = \varnothing$ для всех $i \in I$. Полученное противоречие доказывает, что $p \in \sigma(\mathfrak{F}_i)$ для любого $i \in I$. Таким образом, $\cap_{i \in I} \sigma(\mathfrak{F}_i) = \cap_{i \in I} \mathrm{Char}(\mathfrak{F}_i) \neq \varnothing$ и $\bigcap_{i \in I} \mathfrak{F}_i \neq (1)$. □

Доказательство теоремы 0.4.

Проведем индукцию по порядку групп из $\mathfrak{X}$. Пусть G – группа минимального порядка из $\mathfrak{X}$ такая, для которой теорема неверна. Так как $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{S}^{\sigma(\mathfrak{F})}$, то группа $G / G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{S}^{\sigma(\mathfrak{F})}$ и по утверждению (1) леммы 1.3 в G существуют $\mathfrak{F}$-инъекторы и любые два из них сопряжены в G. Пусть V – такой $\mathfrak{F}$-инъектор группы G, который не нормален в G. Так как $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_i$ для всех $i \in I$, то $G_{\mathfrak{F}} \leq G_{\mathfrak{F}_i}$. Ввиду изоморфизма

$$(G / G_{\mathfrak{F}}) / (G_{\mathfrak{F}_i} / G_{\mathfrak{F}}) \cong G / G_{\mathfrak{F}_i} \in \mathfrak{S}^{\sigma(\mathfrak{F}_i)}.$$

Следовательно, по утверждению (1) леммы 1.3 в группе G существует $\mathfrak{F}_i$-инъектор V_i для любого $i \in I$. Так как $\mathfrak{F}_i \trianglelefteq \mathfrak{X}$, то $V_i \trianglelefteq G$ для всех $i \in I$ и $\bigcap_{i \in I} V_i \trianglelefteq G$. Кроме того, $\bigcap_{i \in I} V_i \trianglelefteq V_i \in \mathfrak{F}_i$ для всех $i \in I$. Следовательно, $\bigcap_{i \in I} V_i \in \bigcap_{i \in I} \mathfrak{F}_i = \mathfrak{F}$. По определению $\mathfrak{F}$-радикала получаем $\bigcap_{i \in I} V_i \leq G_{\mathfrak{F}}$.

С другой стороны, $G_{\mathfrak{F}} \le G_{\mathfrak{F}_i} = V_i$ для всех $i \in I$. Значит, $G_{\mathfrak{F}} = \bigcap_{i\in I} V_i$. Так как V – $\mathfrak{F}$-инъектор G, то $G_{\mathfrak{F}} \le V$, и поэтому $\bigcap_{i\in I} V_i \le V$.

Пусть M – любая максимальная нормальная подгруппа группы G. Далее доказательство теоремы разобьем на несколько шагов.

(1) $V\cap M = (\bigcap_{i\in I} V_i)\cap M$. Так как $M \in \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{S}^{\sigma(\mathfrak{F})}$, то $M / M_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{S}^{\sigma(\mathfrak{F})}$. По утверждению (1) леммы 1.3 в M существуют $\mathfrak{F}$-инъекторы и любые два из них сопряжены в M. Так как V – $\mathfrak{F}$-инъектор G, то ввиду утверждения (1) леммы 1.5 $V \cap M$ – $\mathfrak{F}$-инъектор M. По индукции получаем $V \cap M \lhd M$. Ввиду леммы 1.2 имеем $M_{\mathfrak{F}} = G_{\mathfrak{F}} \cap M$. Следовательно, $V \cap M = G_{\mathfrak{F}} \cap M = (\bigcap_{i\in I} V_i) \cap M$.

(2) $V \not\le N$ для любой $N \trianglelefteq\trianglelefteq G$. Предположим от противного, что $V \le N \trianglelefteq\trianglelefteq G$. Так как $G \in \mathfrak{X}$ и $N \trianglelefteq\trianglelefteq G$, то по определению класса Фиттинга $\mathfrak{X}$ получаем $N \in \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{S}^{\sigma(\mathfrak{F})}$. По утверждению (3) леммы 1.5 V – $\mathfrak{F}$-инъектор N. По индукции $V \trianglelefteq N$. Следовательно, $V \trianglelefteq\trianglelefteq G$ и $V = G_{\mathfrak{F}}$. Получили противоречие с тем, что $V \ntrianglelefteq G$.

(3) $G = RV$, *где R – любая из нормальных подгрупп группы G такая, что G / R является либо элементарной абелевой p-группой для $p \in \sigma(\mathfrak{F})$, либо $\sigma'(\mathfrak{F})$-группой*. Вначале докажем существование такой подгруппы R. Если $G_{\mathfrak{F}} = G$, то $G \in \mathfrak{F}$ и утверждение доказано. Пусть $G_{\mathfrak{F}} \ne G$. Тогда $G / G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{S}^{\sigma(\mathfrak{F})}$. Значит, найдется максимальная нормальная подгруппа R такая, что $G_{\mathfrak{F}} \le R$. Следовательно, $(G / G_{\mathfrak{F}}) / (R / G_{\mathfrak{F}}) \cong G / R$. Так как факторгруппа по максимальной нормальной подгруппе является главным фактором группы G, то этот фактор либо элементарная абелева p-группа для $p \in \sigma(\mathfrak{F})$, либо $\sigma'(\mathfrak{F})$-группа. Этим существование подгруппы R с указанными выше свойствами доказано.

Предположим, что $G \ne RV$. Значит, $RV < G$. Если G / R – элементарная абелева p-группа для $p \in \sigma(\mathfrak{F})$, то G / R – нильпотентная группа. Следовательно, $RV / R \trianglelefteq\trianglelefteq G / R$ и $RV \trianglelefteq\trianglelefteq G$. Таким образом, $V \le RV \trianglelefteq\trianglelefteq G$. Это противоречит ранее доказанному утверждению (2).

Пусть $G / R \in \mathfrak{E}_{\sigma'(\mathfrak{F})}$, где $\mathfrak{E}_{\sigma'(\mathfrak{F})}$ – класс всех $\sigma'(\mathfrak{F})$-групп. Так как ввиду изоморфизма $V / (V \cap R) \cong RV / R < G / R$ и $G / R \in \mathfrak{E}_{\sigma'(\mathfrak{F})}$, то $V / (V \cap R) \in \mathfrak{E}_{\sigma'(\mathfrak{F})}$. С другой стороны, $V \in \mathfrak{F}$ и, значит, $V \in \mathfrak{E}_{\sigma(\mathfrak{F})}$. Класс $\mathfrak{E}_{\sigma(\mathfrak{F})}$ – формация. Следовательно, $V / (V \cap R) \in \mathfrak{E}_{\sigma(\mathfrak{F})}$. Итак, $V / (V \cap R) \in \mathfrak{E}_{\sigma(\mathfrak{F})} \cap \mathfrak{E}_{\sigma'(\mathfrak{F})} = (1)$ и $V = V \cap R$. Следовательно, $V \le R \trianglelefteq G$, что противоречит утверждению (2).

(4) *Группа G комонолитична*. Предположим, что существуют максимальные нормальные подгруппы M_1 и M_2 группы G и $M_1 \ne M_2$. Тогда возможны следующие случаи:

(4.1) $G_{\mathfrak{F}} \le M_1$ и $G_{\mathfrak{F}} \not\le M_2$;

(4.2) $G_{\mathfrak{F}} \not\le M_1$ и $G_{\mathfrak{F}} \le M_2$;

(4.3) $G_{\mathfrak{F}} \le M_1$ и $G_{\mathfrak{F}} \le M_2$;

(4.4) $G_{\mathfrak{F}} \not\le M_1$ и $G_{\mathfrak{F}} \not\le M_2$.

(4.1) Пусть $G_{\mathfrak{F}} \le M_1$ и $G_{\mathfrak{F}} \not\le M_2$. Так как по условию теоремы $G \in \mathfrak{F}\mathfrak{S}^{\sigma(\mathfrak{F})}$, то ввиду изоморфизма $(G / G_{\mathfrak{F}}) / (M_1 / G_{\mathfrak{F}}) \cong G / M_1$ и группа G / M_1 – $\sigma(\mathfrak{F})$-разрешима.

Тогда G / M_1 – главный фактор группы G, который является либо элементарной абелевой p-группой для некоторого $p \in \sigma(\mathfrak{F})$, либо $\sigma'(\mathfrak{F})$-группой. Пусть G / M_1 – элементарная абелева p-группа. Тогда, G / M_1 – нильпотентная группа, и по доказанному выше утверждению (3) получаем $G = VM_1$. Ввиду предположения $G_{\mathfrak{F}} \not\le M_2$ имеем $G = G_{\mathfrak{F}} M_2$. Следовательно, $G = VM_2$. Ввиду изоморфизмов

$$G / M_1 = VM_1 / M_1 \cong V / (V \cap M_1)$$

и $G / M_2 = VM_2 / M_2 \cong V / (V \cap M_2)$ имеем $V \cap M_1$ и $V \cap M_2$ являются максимальными нормальными подгруппами группы V. Пусть $V \cap M_1 \ne V \cap M_2$. Ввиду максимальности подгрупп $V \cap M_1$ и $V \cap M_2$ получаем $V = (V \cap M_1)(V \cap M_2)$. Следовательно, по утверждению (1)

$$V = ((\bigcap_{i\in I} V_i) \cap M_1)((\bigcap_{i\in I} V_i) \cap M_2) \lhd G.$$

Последнее противоречит предположению о том, что $V \ntrianglelefteq G$. Поэтому остается признать, что $V \cap M_1 = V \cap M_2$. Тогда $G / M_1 \cong V / (V \cap M_1) = V / (V \cap M_2) \cong G / M_2$ и G / M_2 нильпотентна. Следовательно, по определению формации $G / (M_1 \cap M_2)$ – нильпотентная группа. Ввиду (3), $G = V(M_1 \cap M_2) = VM_1 \cap VM_2$. Отсюда по лемме 1.1 $V \cap M_1 M_2 = (V \cap M_1)(V \cap M_2) = V = V \cap M_1$. Значит, $V \le M_1$, что невозможно ввиду (2). Итак, $M_1 = M_2 = M$ и группа G в данном случае комонолитична.

Предположим, что фактор G / M_1 – $\sigma'(\mathfrak{F})$-группа. Тогда $V / (V \cap M_1) = V / (V \cap M_2) \in \mathfrak{E}_{\sigma'(\mathfrak{F})}$. Так как V – $\mathfrak{F}$-инъектор G, то $V / (V \cap M_1) =$

$= V/(V \cap M_2) \in \mathfrak{E}_{\sigma(\mathfrak{F})}$. Следовательно, $V/(V \cap M_1) = V/(V \cap M_2) \in \mathfrak{E}_{\sigma'(\mathfrak{F})} \cap \mathfrak{E}_{\sigma(\mathfrak{F})} = (1)$ и $V = V \cap M_1$. Значит, $V \le M_1$. Это противоречит утверждению (2). Получаем снова $M_1 = M_2 = M$ и группа G комонолитична.

(4.2) Доказательство комонолитичности группы G аналогично доказательству в случае (4.1).

(4.3) Пусть $G_{\mathfrak{F}} \le M_1$ и $G_{\mathfrak{F}} \le M_2$. Так как $G \in \mathfrak{F}\mathfrak{S}^{\sigma(\mathfrak{F})}$, то ввиду изоморфизмов $(G/G_{\mathfrak{F}})/(M_1/G_{\mathfrak{F}}) \cong G/M_1$ и $(G/G_{\mathfrak{F}})/(M_2/G_{\mathfrak{F}}) \cong G/M_2$, группы G/M_1 и G/M_2 – $\sigma(\mathfrak{F})$-разрешимы.

Тогда G/M_1 и G/M_2 – главные факторы группы G, каждый из которых является либо элементарной абелевой примарной группой, либо $\sigma'(\mathfrak{F})$-группой. Пусть G/M_1 и G/M_2 – примарные группы. Тогда группы G/M_1 и G/M_2 нильпотентны и по доказанному выше утверждению (3) получаем $G = VM_1 = VM_2$. Следовательно, $G/M_1 \cong V/(V \cap M_1) = V/(V \cap M_2) \cong G/M_2 \in \mathfrak{N}$. По определению формации $G/(M_1 \cap M_2) \in \mathfrak{N}$. Значит, ввиду (3), $G = V(M_1 \cap M_2) = VM_1 \cap VM_2$ и по лемме 1.1 имеем $V \cap M_1M_2 = (V \cap M_1)(V \cap M_2) = V = V \cap M_1$. Итак, $V \le M_1$, что противоречит (2).

Пусть $G/M_1 \in \mathfrak{E}_{\sigma'(\mathfrak{F})}$ и $G/M_2 \in \mathfrak{E}_{\sigma'(\mathfrak{F})}$. Тогда ввиду (3), рассуждая аналогично случаю (4.1), получаем $V/(V \cap M_1) = V/(V \cap M_2) \in \mathfrak{E}_{\sigma'(\mathfrak{F})}$. С другой стороны, $V/(V \cap M_1) = V/(V \cap M_2) \in \mathfrak{E}_{\sigma(\mathfrak{F})}$. Следовательно,

$$V/(V \cap M_1) = V/(V \cap M_2) \in \mathfrak{E}_{\sigma'(\mathfrak{F})} \cap \mathfrak{E}_{\sigma(\mathfrak{F})} = (1).$$

Таким образом, $V = V \cap M_1$ и $V \le M_1$, что невозможно ввиду (2).

Если один из факторов G/M_1 или G/M_2 примарен, а второй является $\sigma'(\mathfrak{F})$-группой, то доказательство комонолитичности группы G аналогично доказательству случаев (4.1) и (4.2).

(4.4) Пусть $G_{\mathfrak{F}} \not\le M_1$ и $G_{\mathfrak{F}} \not\le M_2$. Так как $V \ge G_{\mathfrak{F}}$, то ввиду максимальности нормальных подгрупп M_1 и M_2, справедливы равенства

$$G = M_1G_{\mathfrak{F}} = M_2G_{\mathfrak{F}} = VM_1 = VM_2.$$

Отсюда G/M_1 и G/M_2 – нильпотентные группы. Тогда, следуя доказательству (4.3), получаем, что $V \le M_1$, что противоречит (2).

Таким образом, в каждом из случаев (4.1)–(4.4) $M_1 = M_2 = M$ и группа G комонолитична. Отсюда следует, что для каждого $i \in I$ подгруппа $V_i \le M$. Следовательно, $V \cap M = ((\bigcap_{i \in I} V_i \cap M) = \bigcap_{i \in I} V_i$. Но тогда, учитывая изоморфизм $G/M \cong V/\bigcap_{i \in I} V_i$, заключаем, что $V/\bigcap_{i \in I} V_i$ – циклическая группа простого порядка p.

Заключительный шаг. Вначале покажем, что $VV_i \ne G$ для некоторого $i \in I$.

Предположим от противного, что для всех $i \in I$ верно равенство $VV_i = G$. Если для некоторого $j \in I$ имеет место $V_j = G$, то $G \in \mathfrak{F}$ и G является $\mathfrak{F}$-инъектором G, то есть, $V = G \trianglelefteq G$. Получили противоречие с тем, что подгруппа V не нормальна в G. Следовательно, $V_j \ne G$ для всех $j \in I$. По условию $V_j \trianglelefteq G$. Значит, $G/V_j \cong V/(V \cap V_j)$. Так как $V/\bigcap_{i \in I} V_i$ – циклическая группа простого порядка p, то ввиду изоморфизма $(V/\bigcap_{i \in I} V_i)/((V \cap V_j)/\bigcap_{i \in I} V_i) \cong V/(V \cap V_j) \cong G/V_j$ имеем G/V_j – циклическая группа простого порядка p. Следовательно, V_j – максимальная нормальная подгруппа группы G. Значит, $V_j = M$.

Нетрудно заметить, что $V_j \in \mathfrak{F} = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{F}_i$. Действительно, если найдется такое $i \ne j$ и $i \in I$, что $V_i \ne G$, то как и ранее мы заключаем, что $V_i = M = V_j$ и $V_j \in \mathfrak{F}_i$ для всех $i \ne j$. Значит, $V_i \in \bigcap_{i \in I} \mathfrak{F}_i = \mathfrak{F}$. Следовательно, $V_j \le G_{\mathfrak{F}} \le V$. Но тогда ввиду предположения $VV_i = G$ получаем, что $G \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие утверждению (2).

Итак, существуют $i \in I$ такие, что $VV_i \ne G$. Покажем, что в этом случае $VV_i \in \mathfrak{X}$. Так как $V/\bigcap_{i \in I} V_i$ простая группа, то ее нормальная подгруппа $(V \cap V_i)/\bigcap_{i \in I} V_i$ либо совпадает с группой $V/\bigcap_{i \in I} V_i$, либо является единичной. Если $(V \cap V_i)/\bigcap_{i \in I} V_i = V/\bigcap_{i \in I} V_i$, то $V = V \cap V_i \le V_i$. Снова получаем противоречие с утверждением (2). Значит, $V \cap V_i = \bigcap_{i \in I} V_i$. Тогда, ввиду изоморфизма $VV_i/V \cong V/V \cap V_i$, заключаем, что VV_i/V – p-группа для $p \in \sigma(\mathfrak{F})$.

Так как $G \in \mathfrak{X}$ и $\mathfrak{X}$ – класс Фишера, то $VV_i \in \mathfrak{X}$. Теперь имеем $|VV_i| < |G|$ и по утверждению (3) леммы 1.5 V является $\mathfrak{F}$-инъектором группы VV_i. Следовательно, по индукции $V \trianglelefteq VV_i$. Отсюда, так как $V \in \mathfrak{F}_i$, следует $V \le (VV_i)_{\mathfrak{F}_i}$. Применяя снова утверждение (3) леммы 1.5, получаем, что подгруппа V_i является $\mathfrak{F}_i$-инъектором группы VV_i. Следовательно, $(VV_i)_{\mathfrak{F}_i} = V_i$. Таким образом, $V \le V_i$, что противоречит (2). Полученное противоречие завершает доказательство того, что $\mathfrak{F} \trianglelefteq \mathfrak{X}$.

Так как по условию $\mathfrak{F}_i$ – класс Фишера для любого $i \in I$ и $\mathfrak{N}_p\mathfrak{X} = \mathfrak{X}$ для некоторого простого p, то по лемме 3.1 $\mathfrak{F} \neq (1)$. □

***Теорема* 3.2.** *Пусть* $\mathfrak{X}$ *– класс Фишера,* $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ *– семейство* $\mathfrak{X}$*-нормальных классов Фиттинга и* $\mathfrak{F} = \bigcap_{i\in I}\mathfrak{F}_i$*. Если* $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{S}^{\sigma(\mathfrak{F})}$*, то* $\mathfrak{F}$ *является* $\mathfrak{X}$*-нормальным классом Фиттинга.*

Доказательство теоремы 3.2 аналогично доказательству теоремы 0.4.

В случае $\sigma(\mathfrak{F}) = \mathbb{P}$ получаем

***Следствие* 3.3** [14, теорема 2.1]. *Пусть* $\mathfrak{X}$ *– класс Фишера,* $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ *– семейство* $\mathfrak{X}$*-нормальных классов Фиттинга. Если* $\mathfrak{F} = \bigcap_{i\in I}\mathfrak{F}_i$ *и* $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{S}$*, то* $\mathfrak{F} \trianglelefteq \mathfrak{X}$.

Так как каждый неединичный нормальный класс Фиттинга содержит класс всех нильпотентных групп (см. [1, теорема 5.1]), то в случае $\mathfrak{X} = \mathfrak{S}$ получаем известный результат в теории нормальных классов Фиттинга – теорему Блессеноля – Гашюца.

***Следствие* 3.4** (Блессеноль – Гашюц [1, теорема 6.2]). *Пересечение всех неединичных нормальных классов Фиттинга есть неединичный нормальный класс Фиттинга.*

Заключение

В работе описаны методы построения нетривиальных $\mathfrak{X}$-нормальных классов Фиттинга конечных групп. Определены условия, при которых пересечение неединичных $\mathfrak{X}$-нормальных классов Фиттинга является неединичным $\mathfrak{X}$-нормальным классом Фиттинга. Установлено, что если $\mathfrak{X}$ – такой класс Фишера, что $\mathfrak{N}_p\mathfrak{X} = \mathfrak{X}$ для некоторого простого p, $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ – семейство неединичных $\mathfrak{X}$-нормальных классов Фишера, $\mathfrak{F} = \bigcap_{i\in I}\mathfrak{F}_i$ и $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{S}^{\sigma(\mathfrak{F})}$, то $\mathfrak{F}$ является неединичным $\mathfrak{X}$-нормальным классом Фиттинга. В частности, при указанных условиях теорема даёт положительное решение проблемы Дёрка – Хоукса о пересечении неединичных $\mathfrak{X}$-нормальных классов Фиттинга (см. [4, с. 716]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Blessenohl*, *D*. Über normale Schunk- und Fittingklassen / D. Blessenohl, W. Gaschütz // Math. Z. – 1970. – № 118 (1). – S. 1–8.

2. *Gaschütz*, *W*. Zwei Bemerkungen über normale Fittingklassen / W. Gaschütz // J. Algebra. – 1974. – Vol. 30. – P. 277–278.

3. *Laue*, *H*. Über nichtauflösbare normale Fittingklassen / H. Laue // J. Algebra. – 1977. – Vol. 45. – P. 274–283.

4. *Doerk*, *K*. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New-York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

5. *Воробьев*, *Н.Т.* О пересечении локально-нормальных классов Фиттинга / Н.Т. Воробьев, Е.Н. Залесская, А.В. Турковская // Весн. Віцеб. дзярж. ун-та. – 2010. – № 3 (57). – С. 7–12.

6. *Reifferscheid*, *S*. On the theory of Fitting classes of finite groups: dis. ... Doktors der Naturwissenschaften / S. Reifferscheid. – Tübingen, 2001. – 131 p.

7. *Yang*, *N*. On $\mathfrak{F}$-injectors of fitting set of a finite group / N. Yang, W. Guo, N.T. Vorob'ev // Communications in Algebra. – 2018. – Vol. 46, № 1. – P. 217–229.

8. *Ballester-Bolinches*, *A*. Classes of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, L.M. Ezquerro. – Dordrecht: Springer, 2006. – 385 p.

9. *Шеметков*, *Л.А.* О подгруппах π-разрешимых групп / Л.А. Шеметков // В кн.: Конечные группы. Мн.: Наука и техника, 1975. – С. 207–212.

10. *Wenbin*, *Guo*. Theory of Classes of Groups / Guo Wenbin. – Science Press. – Kluwer Acad. Publ. Dordrecht-Boston-London, 1997. – 258 p.

11. *Lockett*, *F.P.* The Fitting class $\mathfrak{F}^*$ / F.P. Lockett // Math. Z. – 1974. – № 137. – P. 131–136.

12. *Lockett*, *F.P.* On the Theory of Fitting Classes of Finite Soluble Groups / F.P. Lockett // Math. Z. – 1973. – № 131. – P. 103–115.

13. *Залесская*, *Е.Н.* О произведениях классов Фишера / Е.Н. Залесская, С.Н. Воробьев // Весн. Віцеб. дзярж. ун-та. – 2008. – № 3 (49). – С. 101–105.

14. *Shpakov*, *V.V.* On intersection of normal Fitting classes of finite groups / V.V. Shpakov, N.N. Vorob'ev, N.T. Vorob'ev // Acta Academiae Paedagogicae Agriensis, Sectio Mathematicae. – 2003. – Vol. 30. – P. 167–171.

Исследования выполнены при поддержке БРФФИ (проект Ф17М-064) и Государственной программы научных исследований Республики Беларусь «Конвергенция» (2016–2020).

Поступила в редакцию 23.07.18.