УДК 535.55

ДВОЙНОЕ ЛУЧЕПРЕЛОМЛЕНИЕ В МОДЕЛИ СИММЕТРИЧНОГО ЧЕТЫРЕХВАЛЕНТНОГО ТЕНЗОРА. ПРОЗРАЧНЫЕ ОПТИЧЕСКИ ОДНООСНЫЕ СРЕДЫ

Афанасьев И. И.

Приводится обобщенное описание изменения естественного двупреломления для случаев, когда независимо от физической природы, оно образуется в оптически одноосных средах за счет эффектов, связанных с симметричными четырехвалентными тензорами типа $[V^2]^2$. Элементы стандартных матриц указанных тензоров представлены в виде многочленов, содержащих инвариантные постоянные и базисные функции. Показано, что при произвольных направлениях распространения света в среде соответствующие оптические уравнения образуют невырожденную систему линейных уравнений, что позволяет количественно в компонентах определять причины, приводящие к изменению естественного двупреломления.

Индуцированное двойное лучепреломление для случаев распространения света вдоль оптической оси в ряде кристаллов изучено достаточно подробно [1–6]. Целью данной работы является рассмотрение возможностей решения уравнений, описывающих оптические эффекты в модели тензоров с внутренней симметрией $[V^2]^2$, в оптически одноосных средах на основе результатов [7], полученных для оптически изотропных сред любой симметрии.

Связь параметров двупреломления в возбужденной среде $\delta_1 = \Delta n'_e - \Delta n_0$, $\delta_2 = \Delta n'_{e0}$ и азимута осей φ для слоя толщиной $d=1$ запишем в виде уравнений

$$\psi \cos 2\varphi = \pi\lambda^{-1} [C_0 + (C_{m,\,ij} + C_{w,\,ij})\, w'_{ij}]^{(\delta)}, \tag{1}$$

$$\psi \sin 2\varphi = 2\pi\lambda^{-1} [C_0 + (C_{m,\,ij} + C_{w,\,ij})\, w'_{ij}]^{(\varphi)}, \tag{2}$$

где ψ — угол разности фаз, λ — длина волны излучения, w'_{ij} — компоненты тензора валентности 2 возбуждения различной физической природы, индексы (δ), (φ) относятся к каждой серии постоянных C_k и обозначают $\Delta n'_e - \Delta n'_0$ и $\Delta n'_{e0}$, выраженные через модели соответствующих тензоров.

Оба уравнения отнесены к произвольным осям u_i декартовой системы, связанной с главными осями x_j уравнением

$$u_i = a_{ij} x_j, \tag{3}$$

где C_0 определяют начальные условия двупреломления, требующие компенсации и относящиеся к невозбужденной среде

$$C_0^{(\delta)} = (n_e - n_0) \sin^2 \rho \cos 2\Phi, \tag{4}$$

$$C_0^{(\varphi)} = (n_e - n_0) \sin^2 \rho \sin 2\Phi. \tag{5}$$

Здесь $C_{m,ij}$ — коэффициенты, связанные с морфическими эффектами, каковыми могут быть, например, упругая деформация, электрострикция и т. п. Они определяют изменение толщины Δd под действием ω'_{ij}

$$C^{(\delta)}_{m,\,ij} = C_0^{(\delta)} S_{33,\,ij}, \tag{6}$$

$$C^{(\varphi)}_{m,\,ij} = C_0^{(\varphi)} S_{12,\,ij}, \tag{7}$$

где $S_{33,\,ij}$, $S_{12,\,ij}$ — функции от матриц соответствующих эффектов. $C_{w,\,ij}$ — коэффициенты, определяющие изменение оптических свойств среды под влиянием w'_{ij},

$$C^{(\delta)}_{w,\,ij} = -\varkappa(\rho)\,T_k \mu^{(k)}_{ij} F^{(k)}_{ij}, \tag{8}$$

$$C^{(\varphi)}_{w,\,ij} = -\varkappa(\rho)\,T_k \nu^{(k)}_{ij} f^{(k)}_{ij}, \tag{9}$$

в которых $\varkappa(\rho)$ — множитель, учитывающий начальные оптические свойства среды и зависящий от угла ρ между волновой нормалью и оптической осью среды; T_k — инвариантные постоянные двупреломления (ИПД), являющиеся линейными комбинациями стандартных матриц симметричных четырехвалентных тензоров; $[V^2]^2$, $F^{(k)}_{ij}$, $f^{(k)}_{ij}$ — базисные функции постоянных T_k с коэффициентами a_{ij} уравнения (3); $\mu^{(k)}_{ij}$, $\nu^{(k)}_{ij}$ — множители, связанные с преобразованиями четырехвалентных тензоров.

Индексы ij относятся к компонентам w'_{ij}, индексы k — к числу ИПД, содержащихся в данном разложении.

Учет начальных условий производится по формуле

$$\varkappa(\rho) = n_0^3 e_e^2 (N + n_e \sqrt{N})^{-1}, \tag{10}$$

где $N = n_0^2 + (n_e^2 - n_0^2)\cos^2\rho$.

Геометрическое многообразие изменений двупреломления включает шесть групп: 1) гексагональные и предельные высокосимметричные группы ΔH, 2) гексагональные и предельные низкосимметричные группы $\Delta H + \Delta h$, 3) тригональные высокосимметричные группы ΔRh, 4) тетрагональные высокосимметричные ΔQ, 5) тетрагональные низкосимметричные Δq и 6) тригональные низкосимметричные группы Δrh (табл. 1). Для получения величин $C^{(\delta,\varphi)}_{w,\,ij}$ необходимо произвести суммирование по индексам k, ij всех членов в формулах (8) и (9) в соответствии с табл. 2.

Таблица 1

Связь групп симметрии индуцированного двупреломления с кристаллографическими точечными группами

№ п/п	Симметрия четырехвалентного тензора	Точечные группы	Число постоянных
1	ΔH	$(D_6,\ D_{6h},\ D_\infty,\ D_{\infty h})$	4
2	$\Delta H + \Delta h$	$(C_6,\ C_{6h},\ C_\infty,\ C_{\infty h})$	6
3	$\Delta H + \Delta Rh$	$(D_3,\ D_{3d})$	6
4	$\Delta H + \Delta h + \Delta Rh + \Delta rh$	$(C_3,\ C_{3i})$	10
5	$\Delta H + \Delta Q$	$(D_4,\ D_{4h})$	5
6	$\Delta H + \Delta Q + \Delta q$	$(C_4,\ C_{4h})$	8

В табл. 2 представлены все ИПД и базисные функции. Кроме элементов матрицы a_{ij} (3) здесь имеются элементы матриц b_{ij}, которые сопряжены с a_{ij}, но не ортогональны с ней. В отличие от оптически изотропных сред [7] при наличии естественной оптической анизотропии поворот оптической индикатрисы как целого очень мал [8, 9], поэтому наклонное просвечивание, обусловленное распространением света вдоль направлений, заданных матрицей b_{ij}, необходимо производить за счет поворота вокруг направлений, перпендикулярных главным сечениям оптической индикатрисы. Это условие налагает определенные ограничения на число параметров вращения, определяющих матрицы типа b_{ij}. На основании формул (4) и (5) для всех оптически одноосных сред следует, что

$$b_{ij} = [\Omega_{u'_e}(\rho')]\,a_{ij}, \tag{11}$$

где $\Omega_{u'_2}(\rho)$ — оператор поворота на дополнительные углы (ρ'), независимые от углов ρ, входящих в величины a_{ij}.

Для каждой из шести групп симметрии оптических одноосных сред (табл. 1) можно построить систему линейных уравнений типа (1). В отличие от оптически

Таблица 2

Инвариантные постоянные и базисные функции двупреломления оптически одноосных сред в модели тензора $[V^2]^2$

ΔT_{ij}	ИПД	$F^{(k)}_{m,\,ij}$	$\mu^{(k)}_{ij}$		$f^{(k)}_{ij}$	$\gamma^{(k)}_{ij}$	
			$i=j$	$i \neq j$		$i=j$	$i \neq j$
ΔH	T_{44}*	$(a_{ik}b_{1k})(a_{jk}b_{1k}) - (a_{ik}b_{2k})(a_{jk}b_{2k})$*	1	2	$(a_{ik}b_{1k})(a_{jk}b_{2k}) + (a_{ik}b_{2k})(a_{jk}b_{1k})$	1/2	1
	$T_{11} - T_{12} - T_{44}$*	$(a_{i1}b_{11} + a_{12}b_{12})(a_{j1}b_{11} + a_{j2}b_{12}) - (a_{j1}b_{21} + a_{i2}b_{22})(a_{j1}b_{21} + a_{j2}b_{22})$	1	2	$(a_{i1}b_{11} + a_{i2}b_{12})(a_{j1}b_{21} + a_{j2}b_{22}) + (a_{i1}b_{21} + a_{i2}b_{22})(a_{j1}b_{11} + a_{j2}b_{12})$	1/2	1
	$T_{31} - T_{12}$	$b_{13}^2 - b_{23}^2$	1	0	$b_{13}b_{23}$	1	0
	$T_{33} - T_{13} - T_{31} - T_{44} + T_{12}$	$a_{i3}a_{j3}(b_{13}^2 - b_{23}^2)$	1	2	$a_{i3}a_{j3}b_{13}b_{23}$	1	2
ΔQ	T_{44}	см. ΔH			см. ΔH		
	$T_{11} - T_{12} - T_{44}$*	$a_{ik}a_{jk}(b_{1k}^2 - b_{2k}^2)$*	1	2	$a_{ik}a_{jk}b_{1k}b_{2k}$*	1	2
	$T_{31} - T_{12}$	см. ΔH			см. ΔH		
	$T_{33} - T_{13} - T_{11} - T_{31} + 2T_{12}$	см. ΔH			см. ΔH		
	$T_{66} - T_{44}$	$(a_{i1}a_{j2} + a_{i2}a_{j1})(b_{11}b_{12} - b_{21}b_{22})$	1	2	$(a_{i1}a_{j2} + a_{i2}a_{j1})(b_{11}b_{22} + b_{12}b_{21})$	1/2	1
Δh	T_{62}	$2[(a_{i1}a_{j2} + a_{i2}a_{j1})(b_{11}^2 + b_{22}^2 - b_{12}^2 - b_{21}^2) - 2(a_{i1}a_{j1} - a_{i2}a_{j2}) \times (b_{11}b_{12} - b_{21}b_{22})]$	1/2	1	$2[(a_{i1}a_{j2} + a_{i2}a_{j1}) \times (b_{11}b_{21} - b_{12}b_{22}) - (a_{i1}a_{j1} - a_{i2}a_{j2}) \times (b_{11}b_{22} + b_{12}b_{31})]$	1/2	1
	T_{45}	$2[(a_{i1}a_{j3} + a_{i3}a_{j1}) \times (b_{12}b_{13} - b_{22}b_{23}) - (a_{i2}a_{j3} + a_{i3}a_{j2}) \times (b_{11}b_{13} - b_{21}b_{23})]$	1/2	1	$(a_{i1}a_{j3} + a_{i3}a_{j1})(b_{12}b_{23} + b_{13}b_{22}) - (a_{i2}a_{j3} + a_{i3}a_{j2})(b_{13}b_{21} + b_{11}b_{13})$	1/2	1
ΔRh	T_{14}	$(a_{i2}a_{j3} + a_{i3}a_{j2})(b_{11}^2 + b_{22}^2 - b_{12}^2 - b_{21}^2) + 2(a_{i1}a_{j3} + a_{i3}a_{j1}) \times (b_{11}b_{12} - b_{21}b_{22})$	1/2	1	$(a_{i2}a_{j3} + a_{i3}a_{j2})(b_{11}b_{21} - b_{12}b_{22}) + (a_{i1}a_{j3} + a_{i3}a_{j1})(b_{11}b_{22} + b_{12}b_{21})$	1/2	1
	T_{41}	$4[(a_{i1}a_{j1} - a_{i2}a_{j2}) \times (b_{12}b_{13} - b_{22}b_{23}) + (a_{i1}a_{j2} + a_{i2}a_{j1}) \times (b_{11}b_{13} - b_{21}b_{23})]$	1/2	1	$2[(a_{i1}a_{j1} - a_{i2}a_{j2}) \times (b_{12}b_{23} + b_{13}b_{22}) + (a_{i1}a_{j2} + a_{i2}a_{j1}) \times (b_{11}b_{23} + b_{13}b_{21})]$	1/2	1
Δq	T_{16}	$(a_{i1}a_{j2} + a_{i2}a_{j1})(b_{11}^2 + b_{22}^2 - b_{12}^2 - b_{21}^2)$ (см. T_{62} Δh)	1/2	1	$(a_{i1}a_{j2} + a_{i2}a_{j1}) \times (b_{11}b_{21} - b_{12}b_{22})$ (см. T_{62} Δh)	1/2	1
	T_{61}	$4(a_{i1}a_{j1} - a_{i2}a_{j2}) \times (b_{11}b_{12} - b_{21}b_{22})$ (см. T_{62} Δh)	1/2	1	$2(a_{j1}a_{j1} - a_{i2}a_{j2}) \times (b_{11}b_{22} + b_{12}b_{21})$ (см. T_{62} Δh)	1/2	1
	T_{45}	см. Δh			см. Δh		
Δrh	T_{25}	$2(a_{i2}a_{j3} + a_{i3}a_{j2}) \times (b_{11}b_{12} - b_{21}b_{22}) - (a_{i1}a_{j3} + a_{i3}a_{j1}) \times (b_{11}^2 + b_{22}^2 - b_{12}^2 - b_{21}^2)$	1/2	1	$(a_{i2}a_{j3} + a_{i3}a_{j2}) \times (b_{11}b_{22} + b_{12}b_{21}) - (a_{i1}a_{j3} + a_{i3}a_{j1}) \times (b_{11}b_{21} - b_{12}b_{22})$	1/2	1
	T_{52}	$4[(a_{i2}a_{j2} - a_{i1}a_{j1}) \times (b_{11}b_{13} - b_{21}b_{23}) + (a_{i1}a_{j2} + a_{i2}a_{j1}) \times (b_{12}b_{13} - b_{22}b_{23})]$	1/2	1	$2[(a_{i2}a_{j2} - a_{i1}a_{j1}) \times (b_{11}b_{23} + b_{13}b_{21}) + (a_{i1}a_{j2} + a_{i2}a_{j1}) \times (b_{12}b_{23} + b_{13}b_{22})]$	1/2	1

Примечание. * Отмечены ИПД и функции, повторяющие результаты для кубических кристаллов [10].

изотропных сред [7] в общем случае система уравнений не является вырожденной, поскольку для любых одноосных сред

$$\sum_{i=1}^{3} C^{(\delta)}_{w,\,ii} = \sum_{i=1}^{3} C^{(\varphi)}_{w,\,ii} = (T_{33} + 2T_{31} - T_{11} - T_{12} - T_{13}) \begin{cases} (b_{13}^2 - b_{23}^2)^{(\delta)} \\ (b_{13}b_{23})^{(\varphi)} \end{cases} . \qquad (12)$$

Правая часть выражения (12) равна нулю лишь в том случае, если $b_{ij}=a_{ij}=\delta_{ij}$, т. е. при просвечивании одноосных сред вдоль их оптических осей, поскольку неравенство $T_{33}+2T_{31}-T_{11}-T_{12}-T_{13}\neq 0$ обусловлено термодинамически. Следовательно, при просвечивании любых оптически одноосных сред в произвольном направлении и при достаточном числе наклонов можно получить систему уравнений, пригодную для определения по отдельности всех шести компонентов любого из тензоров w'_{ij} в исследуемой точке. Этим свойством индуцированное двупреломление оптически одноосных сред принципиально отличается от оптически изотропных [7].

Заметим, что понижение порядка точечной группы симметрии одноосной среды и связанное с этим увеличение числа постоянных не повышают информативности систем уравнений, которая остается одинаковой как у гексагональных (4 постоянных), так и у низкосимметричных тригональных (10 постоянных). Таким образом, прямое решение оптических уравнений с коэффициентами тензора $[V^2]^2$, как хорошо известно, зависит от кристаллографической симметрии, в то время как результат (12) показывает, что обратное решение зависит не от кристаллографической, а только от оптической симметрии среды и потому оно одинаково у всех прозрачных оптически одноосных сред. В этом смысле наблюдается полная аналогия с оптически изотропными средами [10].

Полученные результаты полностью описывают изменение естественного двупреломления в модели симметричного четырехвалентного тензора. Предложенные уравнения могут быть использованы для анализа причин, приводящих к изменению естественного двупреломления, в частности для анализа напряженно-деформированного состояния методом фотоупругости.

Литература

[1] Krishan R. S. — Progress in Crystal Physics, 1958, v. 1.
[2] Инденбом В. Л., Томиловский Г. Н. — Кристаллография, 1958, т. 3, № 5, с. 593—600.
[3] Чернышева М. А. — В кн.: Методы и приборы для контроля качества кристаллов рубина. М., 1968, с. 78—84.
[4] Мустель Е. Р., Парыгин В. Н. Методы модуляции и сканирования света. М., 1770.
[5] Горбач С. С., Пахнев А. В., Шаскольская М. П. — ЦНИИ «Электроника». Обзоры по электронной технике. Сер. Материалы. М., 1974, в. 16 (236).
[6] Рубин и сапфир / Под ред. М. В. Классен-Неклюдовой и Х. С. Багдасарова. М., 1974.
[7] Афанасьев И. И., Грах И. И. — В кн.: Тр. VII Всесоюз. конф. по поляризационно-оптическому методу исследования напряжений. Таллин, 1971, т. 4, с. 134—139.
[8] Афанасьев И. И., Андрианова Л. К., Мамонтов И. Я., Рейтеров В. М. — ФТТ, 1975, т. 17, в. 10, с. 3025—3027.
[9] Афанасьев И. И., Андрианова Л. К., Недашковская Н. Д. — В кн.: Тр. VIII Всесоюз. конф. по методу фотоупругости. Таллин, 1980, т. 4, с. 23—27.
[10] Афанасьев И. И. — Опт. и спектр., 1983, т. 55, в. 3, с. 525—531.

Поступило в Редакцию 20 июня 1984 г.