Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6 (111), 2018

УДК 519.171

Инварианты связных графов и векторные пространства циклов и разрезов

Л.Н. Марченко, В.В. Подгорная, И.В. Близнец

Представлены результаты применения свойств векторного пространства простых циклов графа и их реберно-непересекающихся объединений и векторного пространства разрезов графа и их реберно-непересекающихся объединений для решения задачи распознавания изоморфизма простых связных графов. При установлении взаимно-однозначного соответствия между множествами вершин изоморфных графов использовался дивизимный алгоритм классификации.
Ключевые слова: связный граф, базисный цикл графа, базисный разрез, расстояние Хемминга, классификация вершин.

The results of applying the properties of the vector space of simple cycles of a graph and their edge-disjoint unions and the vector space of cuts of a graph and their edge-disjoint unions to solve the isomorphism recognition problem of simple connected graphs are presented. When establishing a one-to-one correspondence between sets of vertices of isomorphic graphs, a divisional classification algorithm was used.
Keywords: connected graph, graph base cycle, base cut, Hamming distance, classification of vertices.

Введение. Изоморфизм графов есть отношение эквивалентности на множестве всех графов одинакового порядка. Распознавание изоморфных графов требуется в различных областях теоретических и прикладных знаний [1]–[5], однако данный вопрос до сих пор остается неразрешенным окончательно. В настоящее время известны методы выявления изоморфизма для определенных видов графов [6], [7]: деревьев, регулярных, сильно связных орграфов и других, для которых удалось либо построить полиномиальный алгоритм, либо доказать принадлежность проблемы классу NP-полных задач [5]. Одним из подходов к выявлению изоморфизма произвольных графов является применение инвариантов.

У изоморфных графов, согласно определению, все характеристики и свойства совпадают. Характеристика графа называется инвариантом, если она принимает одинаковые значения на изоморфных графах. Инвариант называют полным, если его совпадение для графов обеспечивает существование изоморфного отображения между множествами их вершин.

Основными легко вычисляемыми инвариантами графа являются: число вершин и ребер графа, вектор локальных степеней вершин, число компонент связности. Также рядом авторов использовались: число вершин наибольшего полного подграфа (плотность), наибольшее число попарно несмежных вершин графа (неплотность), хроматическое число и хроматический индекс графа, число Хадвигера и другие [8], а также их совокупности. Имеется также ряд работ, посвященных собственным числам, векторам матриц смежности графа, спектру графа [9]. Равенство перечисленных характеристик является необходимым условием изоморфизма графов. Так известны контрпримеры неизоморфных графов для инвариантов [9].

В качестве «условных» полных инвариантов многими авторами рассматриваются матрицы смежности, инцидентности и Кирхгофа [10]. Известна следующая теорема.

Теорема 1. Графы изоморфны тогда и только тогда, когда их матрицы смежности (инцидентности, Кирхгофа) перестановочно подобны, то есть их можно получить одну из другой перестановками строк и соответствующих столбцов.

В проблеме установления изоморфизма следует различать две основные задачи: распознавание изоморфизма двух графов и построение взаимно-однозначного соответствия между множествами вершин графов, сохраняющего смежность. Единственным известным на данный момент достаточным условием изоморфизма графов в общем случае является теорема 1. Однако такое преобразование требует порядка $n!$ шагов.

Для установления биективного отображения между множествами вершин графов наиболее перспективным считается подход Е.М. Лакса [11], на основе которого Л. Бабай предлагает свой метод построения изоморфизма графов [12] за «почти полиномиальное» время. Таким образом, поиск достаточного условия изоморфизма графов, который может быть вычислен за полиномиальное время или, хотя бы, почти полиномиальное, является актуальным. Статья посвящена новым необходимым условиям изоморфизма графов и их применению.

Основная часть. Приведем необходимые определения и свойства. Будем рассматривать абстрактный граф (граф) $G = (V, E)$ с совокупностью множества вершин $V = \{ v \}$ и множества ребер $E = \{ e = (u, v) \mid u, v \in V \}$ *порядка n*, где $| V | = n$, $| E | = m$. Все рассматриваемые графы полагаются без кратных ребер и петель, то есть простые графы.

Определение. Графы $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ называются *изоморфными* если существует взаимно-однозначное соответствие $h : V_1 \to V_2$, сохраняющее смежность соответствующих вершин: $e_1 = (u, v) \in E_1 \Leftrightarrow e_2 = (h(u), h(v)) \in E_2$. Обозначают $G \cong H$.

Изоморфное отображение графа на себя называется автоморфизмом.

Для рассматриваемых векторов и матриц операции сложения и умножения действуют в поле Галуа $GF(2)$ по модулю 2, если не оговорено другое.

Из доказательства теоремы 2.2 [10] вытекает, что если граф является связным, то он имеет, по крайней мере, один остов. Верно и обратное утверждение (теорема 2.3, [10]). Число компонент связности графа G будем обозначать $k(G)$. Для связного графа $k(G) = 1$.

Разрезающим множеством S связного графа G называется минимальное множество ребер, удаление которых делает граф G несвязным.

Пусть T – произвольный остов (остовное дерево), $T^* = G \setminus T$ – соответствующий коостов графа G. И пусть e_i^* – хорда (ребро) коостова T^*. Так как T – ациклчный граф, то граф $T \cup e_i^*$ содержит точно один цикл C_i. Цикл C_i состоит из хорды e_i^* и тех ребер остова T, которые образуют единственную простую цепь между концевыми вершинами хорды e_i^*. Цикл C_i называется *базисным циклом* относительно хорды e_i^* и остова T. Число всех базисных циклов в произвольном графе равно цикломатическому числу графа $v(G)= m - n + k$, где k – число компонент связности. Множество всех базисных циклов называется *фундаментальной системой циклов* относительно выбранного остова T. Фундаментальная система циклов связана с конкретным остовом. Количество остовов равно алгебраическому дополнению любого элемента матрицы Кирхгофа. Если взять другой остов, то ему будет соответствовать другой набор циклов, образующих фундаментальную систему. Удаление ветви e_j из остова T разбивает его на 2 компоненты связности T_1 и T_2. Разрезающее множество S_j, составленное из ребер, связывающих вершины компонент T_1 и T_2 остова, называется *базисным разрезом* графа G. Множество всех базисных разрезов называется *фундаментальной системой разрезов* графа G относительно остова T. Число базисных разрезов в произвольном графе равно *рангу* графа $\nu^*(G) = n - k$.

Пусть $(e_1, e_2, \ldots, e_m)$ есть последовательность всех ребер графа G.

Базисный цикл C_i, $i = 1, \ldots, \nu$, определяет вектор $(c_{i1}, c_{i2}, \ldots, c_{im})$, где $c_{ij} = 1$, если $e_j \in C_i$, и $c_{ij} = 0$, если $e_j \notin C_i$. Фундаментальной системе циклов соответствует *матрица циклов* $C(G) = [c_{ij}]$, $i = 1, \ldots, \nu$, $j = 1, \ldots, m$. Так как каждый базисный цикл C_i содержит ровно одну хорду, то матрица $C(G)$ путем перестановки столбцов преобразуется к каноническому виду

$$\hat{C}(G)_{\nu \times m} \sim \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & \ldots & 0 & a_{1\nu+1} & \ldots & a_{1m-\nu} \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & a_{2\nu+1} & \ldots & a_{2m-\nu} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & a_{\nu\nu+1} & \ldots & a_{\nu m-\nu} \end{array} \right) = [\, \mathbf{E}_\nu \mid \mathbf{C}^* \,], \qquad (1)$$

где $a_{ij} \in \{ 0, 1 \}$, для $i = 1, \ldots, \nu$, $j = 1, \ldots, m$.

В матрице $C(G)_{\nu \times m}$ столбцы единичной подматрицы $\mathbf{E}_\nu$ соответствуют ребрам коостова T^*, далее идут столбцы, соответствующие ребрам остова T. Заметим, что матрица циклов не задает граф однозначно. Например, ребра графа инцидентные вершинам степени 1 не будут в ней присутствовать.

Базисному разрезу S_i, для $i = 1, \ldots, v^*$, поставим в соответствие вектор $(s_{i1}, s_{i2}, \ldots, s_{im})$, где $s_{ij} = 1$, если ребро $e_j \in S_i$, и $s_{ij} = 0$, если $e_j \notin S_i$. Для фундаментальной системы разрезов можно записать *матрицу разрезов* $S(G) = [s_{ij}]$, где $i = 1, \ldots, v^*$, $j = 1, \ldots, m$, которая путем перестановки столбцов также преобразуется к каноническому виду

$$\hat{S}(G)_{v^* \times m} \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} b_{11} & \ldots & b_{1v} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ b_{21} & \ldots & b_{2v} & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{v^*1} & \ldots & b_{v^*v} & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{array}\right) = [\mathbf{S}^* \,|\, \mathbf{E}_{v^*}], \qquad (2)$$

где $b_{ij} \in \{ 0, 1 \}$, для $i = 1, \ldots, v^*$, $j = 1, \ldots, m$.

Матрица разрезов также не задает граф однозначно.

Дальше будем рассматривать простые связные графы.

Для графа G булеан (набор всех подмножеств) множества ребер E, включая и пустое множество $\varnothing$, обозначим W_G. Множество W_G образует абелеву группу с операцией сложения по модулю 2, если все элементы представлены в виде векторов из 0 и 1 длины $|E| = m$ по правилу: i-ая координата равна 1, если ребро e_i принадлежит подмножеству, иначе – 0. Сложение векторов выполняется покоординатно. Если добавить операцию умножения векторов на элементы поля Галуа $GF(2) = \{ 0, 1 \}$, то все аксиомы линейного пространства для множества W_G будут также выполнены. Умножение на 0 дает нулевой вектор, соответствующий нуль-графу. Размерность такого пространства равна $|E| = m$, и в качестве одного из базисов можно взять векторы, соответствующие ребрам графа (теорема 4.2, [10]).

Множество всех простых циклов графа, включая нуль-граф и их реберно-непересекающиеся объединения над полем $GF(2)$, образует линейное подпространство W_C размерности $v = m - n + k$ пространства W_G (теорема 4.3, [10]), которое будем называть пространством циклов графа. Так же множество всех разрезов, соответствующих выбранному остову графа, и их реберно-непересекающихся объединений над полем $GF(2)$ есть линейное подпространство W_S размерности $v^* = n - k$ пространства W_G (теоремы 4.4, 4.5, [10]), которое будем называть пространством разрезов. При этом фундаментальная система циклов и фундаментальная система разрезов связного графа являются базисами пространств циклов W_C и разрезов W_S соответственно. Элементы линейных подпространств W_C и W_S находятся как линейные комбинации векторов фундаментальных систем циклов и разрезов соответственно (теорема 4.6, [10]).

Линейные подпространства W_C и W_S графа ортогональны над полем $GF(2)$ (теорема 4.9, [10]), поэтому верна следующая теорема.

Теорема 2. Для простого графа G любая строка матрицы $C = C(G)_{v \times m}$ ортогональна любой строке матрицы $S = S(G)_{v^* \times m}$, то есть $C \cdot S^T = S \cdot C^T = \mathbf{0}$, где C^T, S^T – транспонированные матрицы, $\mathbf{0}$ – нулевая матрица соответствующей размерности.

Теорема 3. Пусть для некоторого остова T связного графа $G = (V, E)$, $|V| = n$, $|E| = m$, задан канонический вид (1) матрицы циклов $C(G) = [\, \mathbf{E}_{m-n+k} \,|\, \mathbf{C}^* \,]$. Тогда канонический вид (2) матрицы разрезов графа может быть определен как $S(G) = [\, \mathbf{S}^* \,|\, \mathbf{E}_{n-k}]$, где $\mathbf{S}^* = (\mathbf{C}^*)^T$.

Доказательство вытекает из свойств матриц и векторных пространств над полем $GF(2)$. Так получаем

$$C \cdot S^T = [\, \mathbf{E}_{m-n+k} \,|\, \mathbf{C}^* \,] \cdot [\, \mathbf{S}^* \,|\, \mathbf{E}_{n-k}]^T = [\, \mathbf{E}_{m-n+k} \,|\, \mathbf{C}^* \,] \cdot [\, (\mathbf{C}^*)^T \,|\, \mathbf{E}_{n-k}]^T = \mathbf{0},$$

так как $\mathbf{C}^* + \mathbf{C}^* = \mathbf{0}$. Аналогично доказывается и равенство $S \cdot C^T = \mathbf{0}$.

Теорема 4. 1. Порядок линейного подпространства W_C всех простых циклов графа, включая нуль-граф, и их реберно-непересекающиеся объединения, равен 2^{m-n+k}.

2. Порядок линейного подпространства W_S всех разрезов графа, включая нуль-граф, и их реберно-непересекающихся объединений равен 2^{n-k}.

Доказательство. Так как элементы линейного подпространства W_C находятся как линейные комбинации векторов фундаментальной системы циклов, то их можно получить в виде суммы по модулю 2 всех возможных наборов строк матрицы $C(G)$. Из равенства

$$C_n^{\,0} + C_n^{\,1} + +C_n^{\,2} + \ldots + C_n^{\,n} = 2^n$$

получаем требуемое утверждение. Аналогично и во втором случае.

Следствие 1. Количество всех ненулевых простых циклов и их реберно-непересекающихся объединений графа равно $2^{\,m-n+k} - 1$. Количество всех ненулевых разрезов графа и их реберно-непересекающихся объединений равен $2^{\,n-k} - 1$.

Из определения изоморфизма графов вытекает следующее утверждение.

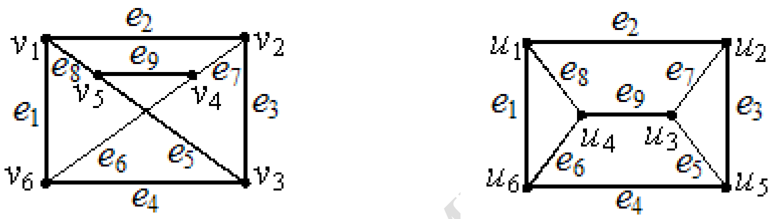
Теорема 5. У изоморфных графов совпадают:

1) упорядоченные числовые последовательности длин всех простых циклов и их реберно-непересекающихся объединений;

2) упорядоченные числовые последовательности длин всех разрезов и их реберно-непересекающихся объединений.

Предложенные числовые последовательности можно использовать в качестве двух инвариантов при распознавании изоморфизма графов. Применение только последовательности длин всех простых циклов и их реберно-непересекающихся объединений не работает для произвольных графов, например, для графов с висячими вершинами (степени 1).

Пример 1. Рассмотрим использование предложенных инвариантов на известной паре неизоморфных графов $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ (рисунок 1).



а) G_1 б)

Рисунок 1 – Графы G_1 и G_2 примера 1

Для графов $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ имеем $|\,V_1\,| = |\,V_2\,| = 6$, $|\,E_1\,| = |\,E_2\,| = 9$, $k_1 = k_2 = 1$. Отметим, что графы G_1 и G_2 являются регулярными степени 3, то есть векторы степеней вершин графов равны (3; 3; 3; 3; 3; 3). Данные инварианты не дают ответа на вопрос об изоморфизме графов.

Упорядоченная последовательность длин всех простых циклов и их реберно-непересекающихся объединений пространства $W_C(G_1)$ для графа G_1 имеет вид:

$$(0, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6).$$

Аналогично для графа G_2 упорядоченная последовательность длин всех простых циклов и их реберно-непересекающихся объединений пространства $W_C(G_2)$ имеет вид:

$$(0, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6).$$

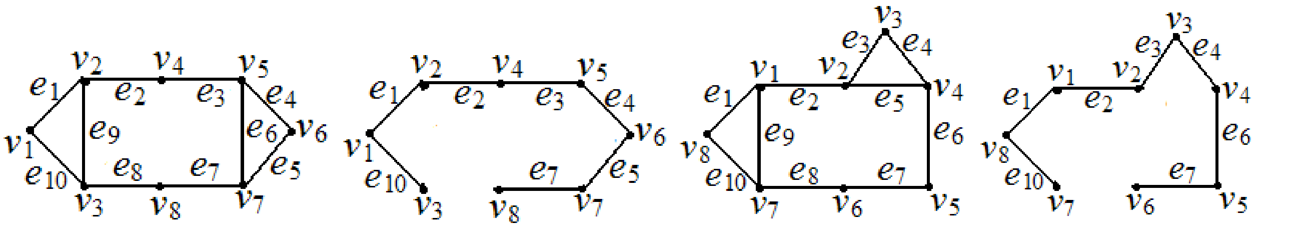
Полученные последовательности не совпадают, поэтому на основании необходимого условия (теорема 5) данные графы неизоморфны.

Таким образом, для обнаружения изоморфизма следует построить матрицу циклов графа по одному из остовов. С ее помощью получить векторное пространство циклов графа размерности 2^{ν}, где $\nu = m - n + k$ есть цикломатический ранг графа. Отметим, что векторные представления циклов будут зависеть от нумерации вершин графа и порядка их рассмотрения. Здесь можно определить длины всех простых циклов в графе и их реберно-непересекающихся объединений. Для изоморфных графов упорядоченные, например, по неубыванию, последовательности длин всех простых циклов и их реберно-непересекающихся объединений совпадают. Несовпадение позволяет дать ответ об отсутствии изоморфизма.

Так как все вершины степени 1 не будут участвовать в векторной записи циклов графа, целесообразно рассматривать и матрицу базисных разрезов. Так строится линейное пространство разрезов W_S с помощью матрицы базисных разрезов за $2^{n-k} - 1$ шага. Аналогично случаю с циклами, у изоморфных графов упорядоченные по неубыванию последовательности длин всех разрезов и их реберно-непересекающихся объединений должны совпадать. Несовпадение позволяет сделать вывод об отсутствии изоморфизма графов.

Отметим, что равенства данных инвариантов используются как необходимые условия изоморфизма графов. Так указанные равенства не позволяют установить отсутствие изоморфизма для графов G_3 и G_4 примера 2.

Пример 2. Графы G_3 и G_4 неизоморфны, но имеют одинаковые упорядоченные по неубыванию числовые последовательности длин векторов пространств циклов и разрезов.



G_3 T_3 G_4 T_4

Рисунок 2 – Неизоморфные графы G_3 и G_4 и их остовные деревья T_3 и T_4 для примера 2

Приведенные на рисунке 4 графы имеют одинаковое количество вершин $|V_3| = |V_4| = 8$, ребер $|E_3| = |E_4| = 10$, компонент связности $k_3 = k_4 = 1$, одинаковые упорядоченные степенные последовательности вершин (3; 3; 3; 3; 2; 2; 2; 2), равные плотности 3 и неплотности 4, хроматические числа равные 3, числа Хадвигера 3. Построим пространство $W_C(G_3)$ простых циклов и их реберно-непересекающихся объединений для графа G_3. Цикломатический ранг графа G_3 равен $\nu(G_3) = 10 - 8 + 1 = 3$. Следовательно, любой остов (остовное дерево) графа содержит 7 ветвей, а коостов – 3 хорды.

Выбрав следующие остовы T_3 и T_4 (рисунок 2), получили следующие матрицы циклов

$$C(G_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ C(G_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что матрицы $C(G_3)_{3\times 10}$ и $C(G_4)_{3\times 10}$ графов G_3 и G_4 соответственно при таком выборе остовов состоят из одинаковых столбцов, и потому их можно получить одна из другой путем перестановки соответствующих столбцов. Тогда векторные пространства циклов графов G_3 и G_4 совпадут: $W_C(G_3) = W_C(G_4)$. И как следствие, совпадут векторные пространства разрезов: $W_S(G_3) = W_S(G_4)$. Следовательно, числовые последовательности длин всех простых циклов и их реберно-непересекающихся объединений, а также длин всех разрезов и их реберно-непересекающихся объединений окажутся одинаковыми для графов G_3 и G_4. При этом несложно заметить, что указанные графы не являются изоморфными. Данный факт обнаруживается с помощью расчета метрических характеристик графа.

Теперь предложим алгоритм установления взаимно-однозначного соответствия множеств вершин изоморфных графов по пространствам циклов и разрезов в случае изоморфных графов. Как известно, изоморфные графы отличаются обозначением вершин. Построим пространства W_C и W_S для каждого из графов. Для каждой вершины графа устанавливается, каким ребрам циклов пространства W_C и разрезам пространства W_S она инцидентна. Составляется матрица «вершина-свойство», где свойствами являются циклы и разрезы пространств W_C и W_S графа. Элемент такой матрицы принимает значение 1, если рассматриваемая вершина инцидентна ребру цикла или разреза пространств W_C и W_S, и 0 в противном случае. Далее, на основе расстояния Хэмминга, определяются матрицы расстояний $H(G_5)$ и $H(G_6)$ между вершинами. Используя дивизимный алгоритм, строится дерево классификации вершин. Сравнивая построенные деревья, устанавливается взаимно-однозначное соответствие между вершинами изоморфных графов. При этом следует учитывать наличие нескольких автоморфизмов на множестве вершин графа.

Реализацию описанного алгоритма рассмотрим на примере 3.

Пример 3. Рассмотрим изоморфные графы G_5 и G_6 (рисунок 3).

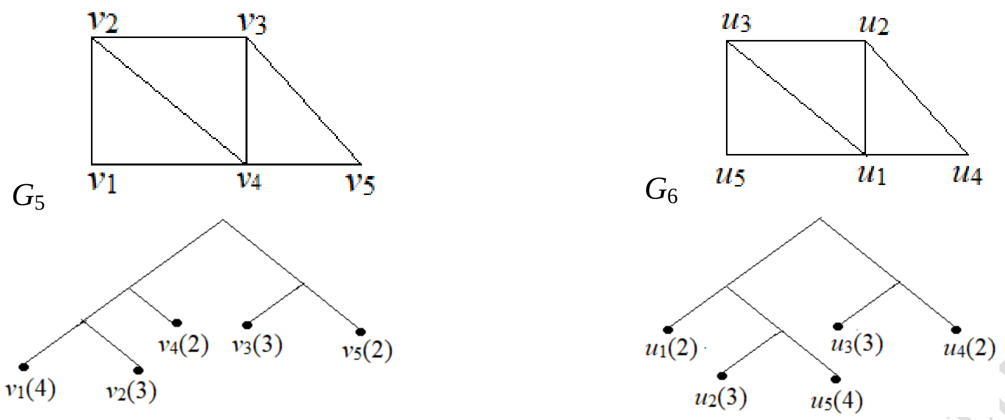


Рисунок 3 – Изоморфные графы G_5 и G_6 и соответствующие деревья классификации вершин

Упорядоченные по неубыванию числовые последовательности длин простых циклов и реберно-непересекающихся циклов и разрезов и реберно-непересекающихся разрезов полностью совпадают и имеют вид:

$$L_C(G_5) = L_C(G_6) =\{ 3, 3, 3, 4, 4, 5, 6 \},$$

$$L_S\,(G_5) = L_S(G_6) = \{ 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5 \}.$$

Найдем взаимно-однозначное соответствие между множествами вершин графов G_5 и G_6, сохраняющее смежность вершин.

Матрицы расстояний Хемминга между вершинами по свойству инцидентности ребрам циклов и разрезов пространств W_C и W_S графов G_5 и G_6 имеют соответственно вид

$$H(G_5) = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 8 & 12 & 6 \\ 4 & 0 & 4 & 8 & 2 \\ 8 & 4 & 0 & 4 & 2 \\ 12 & 8 & 4 & 0 & 6 \\ 6 & 2 & 2 & 6 & 0 \end{pmatrix},\ H(G_6) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 6 & 6 \\ 2 & 0 & 4 & 4 & 8 \\ 2 & 4 & 0 & 8 & 4 \\ 6 & 4 & 8 & 0 & 10 \\ 6 & 8 & 4 & 10 & 0 \end{pmatrix}.$$

Используя дивизимный алгоритм классификации, получим деревья классификации вершин (рисунок 3), где в скобках указаны степени вершин. Учитывая степени вершин и автоморфизм, получили следующее взаимно-однозначное отображение вершин графов G_5 и G_6, сохраняющее смежность вершин: $v_1 \leftrightarrow u_5$, $v_2 \leftrightarrow u_2$, $v_3 \leftrightarrow u_3$, $v_4 \leftrightarrow u_1$, $v_5 \leftrightarrow u_4$.

Таким образом, в качестве числового инварианта графа рекомендуется рассматривать вектор степеней графа в совокупности с упорядоченными последовательностями длин простых циклов и разрезов графа. Однако при полном совпадении предложенных инвариантов графов потребуются дополнительные исследования для распознавания изоморфизма.

Заключение. В статье описаны следующие новые результаты.

1. Построены линейные пространства всех простых циклов и их реберно-непересекающихся объединений простого графа, а также всех разрезов графа и их реберно-непересекающихся объединений. Дана новая оценка размерностей этих пространств.

2. Предложены новые инварианты обнаружения изоморфизма графов в виде упорядоченных по неубыванию последовательностей длин всех простых циклов графа (и их реберно-непересекающихся объединений) и всех разрезов графа (и их реберно-непересекающихся объединений). Показано, что совпадение соответствующих инвариантов дает необходимое условие изоморфизма графов.

3. Описан метод построения изоморфного отображения графов в случае его существования на основе расстояния Хэмминга и дивизимного алгоритма классификации.

Литература

1. Алгоритмы и программы решения задач на графах и сетях / М.И. Нечепуренко [и др.]. – Новосибирск : Наука, 1990. – 515 с.

2. Карелин, В.П. Теория и средства поддержки принятия решений в организационно-технологических системах: дис. … д-ра техн. наук : 05.13.16 / В.П. Карелин. – Таганрог : ТРТУ, 1995. − 36 с.: ил.

3. Бернштейн Л.С. Модели и методы принятия решений в интегрированных интеллектуальных системах / Л.С. Бернштейн, В.П. Карелин, А.Н. Целых. – Ростов/Д. : Изд-во РГУ, 1999. – 278 с.

4. Пинчук, В.П. Табличные инварианты на графах и их применение / В.П. Пинчук // Кибеpенетика и системный анализ. – 2001. – № 4. – С. 33–44.

5. Карелин, В.П. Задача распознавания изоморфизма графов. Прикладное значение и подходы к решению / В.П. Карелин // Вестник Таганрогского института управления и экономики. – 2015. – № 1. – С. 102–106.

6. Пономаренко, И.Н. Проблема изоморфизма графов: Алгоритмические аспекты [Электронный ресурс]. – Режим доступа : http://logic.pdmi.ras.ru/csclub/sites/default/files/graph_isomorphism_ponomarenko lecture_notes.pdf. – Дата доступа : 06.12.2016.

7. Погребной, Ан.В. Метод дифференциации вершин графа и решение проблемы изоморфизма / Ан.В. Погребной, В.К. Погребной // Известия Томского политехнического университета. Инжиниринг георесурсов. – 2015. – Т. 326, № 6. – С. 34–45.

8. Батенков, К.А. Числовые характеристики структур сетей связи / К.А. Батенков // Труды СПИИРАН. – 2017. – Вып. 53. – С. 5–28.

9. Ландо, С.К. Графы и топология / С.К. Ландо. – М. : ВШЭ, 2018. – 78 с.

10. Свами, М. Графы, сети и алгоритмы / М. Свами, К. Тхуласираман. – М. : Мир. 1984. – 455 с.

11. Babai, L. Canonical labeling of graphs / L. Babai, E.M. Luks // Proc. 15th ACM Symp. on Theory of Computing. – 1983. – P. 171–183.

12. Babai, L. Graph isomorphism in quasipolynomial time [Electronic resource] / L. Babai // Submitted 19 January, 2016; v1 submitted 11 December, 2015; originally announced December 2015. – Access mode : https://arxiv.org/search/cs?searchtype=author&query=Babai%2C+L. – Date of access : 30.10.2018.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступила в редакцию 13.09.2018