Учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»

В. В. АНИСЬКОВ, И. В. БЛИЗНЕЦ

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Практическое пособие

для студентов специальности
1-31 03 01-02 «Математика (научно-педагогическая деятельность)»

Гомель
ГГУ им. Ф. Скорины
2023

УДК 514.12(076)
ББК 22.151.54я73
А674

Рецензенты:

кандидат физико-математических наук И. М. Дергачева;
кандидат физико-математических наук М. С. Белокурский

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом
учреждения образования «Гомельский государственный
университет имени Франциска Скорины»

Аниськов, В. В.

А674 Аналитическая геометрия : практическое пособие / В. В. Аниськов, И. В. Близнец ; Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2023. – 50 с.

ISBN 978-985-577-943-9

Пособие содержит задания для лабораторных работ по разделам «Векторная алгебра» и «Линии и поверхности первого порядка». Задания каждой лабораторной работы разбиты на варианты, что позволяет использовать индивидуальный подход при изучении учебного материала. В начале каждой лабораторной работы дается теоретический материал, необходимый для выполнения заданий.

Адресовано студентам первого курса специальности 1-31 03 01-02 «Математика (научно-педагогическая деятельность)».

УДК 514.12(076)
ББК 22.151.54я73

ISBN 978-985-577-943-9

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Дисциплина «Аналитическая геометрия» является одной из основных базовых дисциплин, которые составляют фундамент высшего математического образования. Особенно важными ее разделами являются разделы «Векторная алгебра» и «Линии и поверхности первого порядка», поскольку материал этих разделов используется при изучении любой математической дисциплины.

Задания каждой лабораторной работы разбиты на варианты, что позволяет использовать индивидуальный подход при изучении учебного материала. В начале каждой лабораторной работы дается теоретический материал, необходимый для выполнения заданий. Для успешного выполнения заданий лабораторных работ можно пользоваться практическим пособием (Аниськов В. В. Аналитическая геометрия : практическое пособие : в 3 ч. Ч. 1. Векторы. Линии и поверхности первого порядка / В. В. Аниськов. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, – 2007. – 87 с.). В указанном пособии даны примеры решения задач, схожих по условию с задачами настоящего издания. В лабораторной работе «Векторы и линейные операции над ними» представлены задачи, решение которых основано на геометрических определениях и понятиях, без использования метода координат. Лабораторная работа «Произведения векторов» содержит задачи, для решения которых необходимо владеть понятиями скалярного, векторного и смешанного произведений и, как следствие, использовать эти понятия для овладения практическими навыками применения главного метода дисциплины «Аналитическая геометрия» – метода координат, который в данной работе реализуется при применении прямоугольных декартовых координат.

Лабораторные работы «Прямая на плоскости», «Плоскость в пространстве» и «Плоскость и прямая в пространстве» содержат задачи, которые используют координатные способы задания и взаимного расположения прямых, плоскостей, прямой и плоскости. Представлены также задачи, в которых требуется найти некоторые характеристики геометрических объектов, которые рассматривались еще при изучении планиметрических и стереометрических задач школьного курса. Материал пособия опробирован на практике. Значительная часть заданий составлена авторами самостоятельно.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 1
ВЕКТОРЫ И ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

Связанным вектором называется отрезок AB, о котором однозначно известно, какая точка является его началом, а какая – концом. Если A является началом, а B концом, то пишут $\overrightarrow{AB}$.

Длиной или *модулем* связанного вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка AB. Обозначается длина связанного вектора через $|\overrightarrow{AB}|$.

Связанный вектор $\overrightarrow{AB}$ называется *нулевым*, если его начало и конец совпадают. Связанный вектор, не являющийся нулевым, называется *ненулевым*.

Два ненулевых связанных вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называются *эквивалентными* (пишут $\overrightarrow{AB} : \overrightarrow{CD}$), если они сонаправлены и их длины равны.

Множество всех связанных векторов разбивается на непересекающиеся множества эквивалентных друг другу связанных векторов. Поэтому возможно следующее определение.

Свободным вектором или просто *вектором* называется множество всех эквивалентных друг другу связанных векторов. Для задания такого множества достаточно взять один из связанных векторов, который называют *представителем вектора*. Для обозначения свободных векторов используют малые буквы латинского алфавита, например, $\vec{a}$.

Углом φ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется наименьший угол между их любыми двумя представителями, взятыми таким образом, что их началами является одна и та же точка.

Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ называются *коллинеарными*, если их представители параллельны одной и той же прямой.

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *ортогональными*, если угол между ними равен $\frac{\pi}{2}$.

Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ называются *компланарными*, если их представители параллельны одной и той же плоскости.

Произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ на действительное ненулевое число α называется такой вектор $\vec{b}$, что выполняются следующие условия:

1) $|\vec{b}| = |\alpha||\vec{a}|$;

2) $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны;

3) если $\alpha > 0$, то $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, и если $\alpha < 0$, то $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

Будем также считать, что для любого вектора $\vec{a}$, $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$ и для любого действительного числа α, $\alpha \cdot \vec{a} = \vec{0}$.

Суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой вектор $\vec{c}$, что если $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ – представители соответственно векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то $\overrightarrow{AC}$ – представитель вектора $\vec{c}$.

Приведённое определение сложения векторов даёт так называемое *правило параллелограмма* (так как сумма векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ представляет собой вектор, являющийся диагональю параллелограмма, построенного на этих векторах).

Вектор, модуль которого равен единице, называется *единичным вектором*.

Свойства линейных операций над векторами:

1) для любого вектора $\vec{a}$ и любых двух чисел α и β справедливо равенство $\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$;

2) для любого ненулевого вектора $\vec{a}$ и для любого коллинеарного ему вектора $\vec{b}$ существует единственное действительное число λ такое, что $\vec{b} = \lambda\vec{a}$;

3) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (коммутативность);

4) $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (ассоциативность);

5) $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$ для любого действительного числа α и любых двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (дистрибутивность);

6) для любых действительных чисел α и β и любого вектора $\vec{a}$ справедливо утверждение $(\alpha + \beta)\,\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$.

Пусть дана некоторая ось l и некоторый вектор $\vec{a}$, заданный представителем $\overrightarrow{AB}$. Через точки A и B проведём соответственно плоскости π_1 и π_2, перпендикулярные оси l. Ось l пересечёт плоскости π_1 и π_2 соответственно в точках A_1 и B_1. Связанный вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ является представителем некоторого вектора $\vec{b}$. Вектор $\vec{b}$ называется *векторной проекцией* вектора $\vec{a}$ на ось l.

Пусть длина векторной проекции некоторого вектора $\vec{a}$ на ось l равна m. Число p такое, что $p = m$, если эта проекция сонаправлена с осью l и $p = -m$, если проекция с осью противоположно направлена, называется *проекцией* вектора $\vec{a}$ на ось l.

Векторная проекция вектора на ось не зависит от выбора представителя этого вектора.

Проекция вектора на ось обладает следующими свойствами:

1) $Pr_l\vec{a} = |\vec{a}|\cos(\vec{a}, l)$;

2) $Pr_l(\lambda\vec{a}) = \lambda Pr_l\vec{a}$ для любого действительного числа λ;

3) $Pr_l(\vec{a}+\vec{b}) = Pr_l\vec{a} + Pr_l\vec{b}$.

Базисом на плоскости называется всякая пара ненулевых неколлинеарных векторов, взятых в определенном порядке.

Базисом в пространстве называется тройка ненулевых некомпланарных векторов, взятых в определенном порядке.

Задачи

1. Дан правильный восьмиугольник *ABCDEFGH*. Разложить по векторам $\vec{p} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{q} = \overrightarrow{AB}$ вектор.

1) $\overrightarrow{BC}$; 2) $\overrightarrow{CD}$; 3) $\overrightarrow{DE}$; 4) $\overrightarrow{EF}$; 5) $\overrightarrow{FG}$; 6) $\overrightarrow{GH}$; 7) $\overrightarrow{CB}$; 8) $\overrightarrow{DC}$; 9) $\overrightarrow{ED}$; 10) $\overrightarrow{FE}$.

2. Дан правильный шестиугольник *ABCDEFGH*. Найти все возможные разложения по векторам $\vec{a} = \overrightarrow{AO}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BO}$, $\vec{c} = \overrightarrow{CO}$, $\vec{d} = \overrightarrow{DO}$, $\vec{e} = \overrightarrow{EO}$, $\vec{f} = \overrightarrow{FO}$ вектора.

1) $\overrightarrow{AB}$; 2) $\overrightarrow{BC}$; 3) $\overrightarrow{CD}$; 4) $\overrightarrow{DE}$; 5) $\overrightarrow{EF}$; 6) $\overrightarrow{FA}$; 7) $\overrightarrow{BE}$; 8) $\overrightarrow{CF}$; 9) $\overrightarrow{DA}$; 10) $\overrightarrow{AC}$.

3. Дан тетраэдр *ABCD*. Найти сумму векторов.

1) $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$;

2) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DC}$;

3) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$;

4) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD}$;

5) $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC}$.

4. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Написать разложение вектора $\vec{m}$ по всем возможным тройкам некомпланарных векторов, представителями которых являются связанные векторы, построенные на ребрах куба.

1) $\vec{m} = \overrightarrow{AC_1}$; 2) $\vec{m} = \overrightarrow{DB_1}$;

3) $\vec{m} = \overrightarrow{CA_1}$; 4) $\vec{m} = \overrightarrow{BD_1}$;

5) $\vec{m} = \overrightarrow{C_1A}$; 6) $\vec{m} = \overrightarrow{A_1C}$;

7) $\vec{m} = \overrightarrow{D_1B}$; 8) $\vec{m} = \overrightarrow{B_1D}$;

9) $\vec{m} = \overrightarrow{BC_1}$; 10) $\vec{m} = \overrightarrow{D_1A}$.

5. Дан тетраэдр *ABCD*. Доказать, что $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC}$.

6. В треугольнике ABC проведены медианы $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{CK}$. Доказать, что $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CK}=\vec{0}$.

7. Точки E и F – середины сторон AB и CD четырехугольника $ABCD$. Доказать, что $\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}\right)$.

8. Точки E и F – середины диагоналей AC и BD четырехугольника $ABCD$. Доказать, что $\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}\right)$.

9. Точки E и F – середины диагоналей AC и BD четырехугольника $ABCD$. Доказать, что $\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}\right)$.

10. Докажите, что если A, B, C, D – середины последовательных сторон четырехугольника, то $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\vec{0}$.

11. Дан четырехугольник $ABCD$. Найти такую точку M, чтобы $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\vec{0}$.

12. Две перпендикулярные прямые, проходящие через точку M, пересекают окружность в точках A, B, C, D. Доказать, что $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{OM}$, где O – центр окружности.

13. Пусть S – точка пересечения средних линий четырехугольника $ABCD$ и M – произвольная точка плоскости. Доказать, что $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MS}$.

14. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$. Доказать, что $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{AD}$.

15. Каким условиям должны удовлетворять векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, чтобы выполнялись следующие соотношения:

1) $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$; 2) $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|>\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$;

3) $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|<\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$; 4) $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|$;

5) $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|-\left|\vec{b}\right|$; 6) $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|$;

7) $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|-\left|\vec{b}\right|$; 8) $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\left|\vec{b}\right|-\left|\vec{a}\right|$;

9) $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{b}\right|-\left|\vec{a}\right|$; 10) $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|<\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|$?

16. Дана ПДСК-2. Вектор $\vec{a}$ образует с вектором $\vec{i}$ угол α. Вычислить прямоугольные координаты вектора $\vec{a}$ на плоскости.

1) $\alpha=0°, \left|\vec{a}\right|=3$; 2) $\alpha=90°, \left|\vec{a}\right|=2$;

3) $\alpha = 180°, |\vec{a}| = \dfrac{3}{2};$

4) $\alpha = -90°, |\vec{a}| = \dfrac{1}{2};$

5) $\alpha = 45°, |\vec{a}| = 1;$

6) $\alpha = 60°, |\vec{a}| = 2;$

7) $\alpha = -120°, |\vec{a}| = 5;$

8) $\alpha = -30°, |\vec{a}| = 4;$

9) $\alpha = -150°, |\vec{a}| = 3;$

10) $\alpha = 270°, |\vec{a}| = 3.$

17. Дана ПДСК-3. Найти прямоугольные координаты вектора $\vec{a}$, если известны углы $\alpha = (\vec{a}, \vec{i})$, $\beta = (\vec{a}, \vec{j})$, $\gamma = (\vec{a}, \vec{k})$.

1) $\alpha = 60°, \beta = 45°, \gamma = 60°, |\vec{a}| = 4;$

2) $\alpha = 135°, \beta = 60°, \gamma = 60°, |\vec{a}| = 8;$

3) $\alpha = 120°, \beta = 45°, \gamma = 45°, |\vec{a}| = 5;$

4) $\alpha = 120°, \beta = 45°, \gamma = 120°, |\vec{a}| = 2;$

5) $\alpha = 120°, \beta = 60°, \gamma = 45°, |\vec{a}| = 6;$

6) $\alpha = 180°, \beta = 45°, \gamma = 60°, |\vec{a}| = 7;$

7) $\alpha = 135°, \beta = 180°, \gamma = 60°, |\vec{a}| = 9;$

8) $\alpha = 60°, \beta = 45°, \gamma = 180°, |\vec{a}| = 4;$

9) $\alpha = 270°, \beta = 30°, \gamma = 45°, |\vec{a}| = 8;$

10) $\alpha = 45°, \beta = 270°, \gamma = 60°, |\vec{a}| = 5.$

18. Даны векторы $\vec{a} = a\vec{m} + b\vec{n}$ и $\vec{b} = c\vec{m} + d\vec{n}$, где $|\vec{m}| = k$, $|\vec{n}| = l$, $\left(\vec{m}, \vec{n}\right) = \varphi$. Найти $Pr_{\vec{b}}\left(g\vec{a} + h\vec{b}\right)$.

1) $a = -5, b = -4, c = 3, d = 6, k = 3, l = 5, \varphi = \dfrac{5\pi}{3}, g = 1, h = 2;$

2) $a = -2, b = 3, c = 4, d = -1, k = 1, l = 3, \varphi = \pi, g = 3, h = 2;$

3) $a = 5, b = -2, c = -3, d = -1, k = 4, l = 5, \varphi = \dfrac{4\pi}{3}, g = 1, h = 5;$

4) $a = 5, b = 2, c = -6, d = -4, k = 3, l = 2, \varphi = \dfrac{5\pi}{3}, g = 2, h = 3;$

5) $a = 3, b = -2, c = -4, d = 5, k = 2, l = 3, \varphi = \dfrac{\pi}{3}, g = 5, h = 1;$

6) $a = 2, b = -5, c = -3, d = 4, k = 2, l = 5, \varphi = \dfrac{4\pi}{3}, g = 0{,}5, h = 1{,}5;$

7) $a = 3, b = 2, c = -4, d = -2, k = 2, l = 4, \varphi = \dfrac{2\pi}{3}, g = -1, h = 1{,}5;$

8) $a = 5, b = 2, c = 1, d = -4, k = 3, l = 2, \varphi = \pi, g = -0{,}5, h = 0{,}5;$

9) $a=-3,\ b=-2,\ c=1,\ d=5,\ k=3,\ l=6,\ \varphi=\dfrac{4\pi}{3},\ g=1{,}5,\ h=-0{,}5;$

10) $a=5,\ b=-3,\ c=4,\ d=2,\ k=4,\ l=1,\ \varphi=\dfrac{2\pi}{3},\ g=1{,}5,\ h=1{,}5.$

19. Доказать, что векторы $\vec a$ и $\vec b$ образуют базис на плоскости, и найти координаты вектора $\vec c$ в этом базисе.

1) $\vec a=2\vec i+4\vec j,\ \vec b=3\vec i+5\vec j,\ \vec c=4\vec i+5\vec j;$

2) $\vec a=3\vec i+5\vec j,\ \vec b=2\vec i+5\vec j,\ \vec c=2\vec i+4\vec j;$

3) $\vec a=4\vec i-2\vec j,\ \vec b=4\vec i+7\vec j,\ \vec c=2\vec i-5\vec j;$

4) $\vec a=3\vec i-5\vec j,\ \vec b=4\vec i+6\vec j,\ \vec c=4\vec i-2\vec j;$

5) $\vec a=2\vec i+5\vec j,\ \vec b=4\vec i-6\vec j,\ \vec c=5\vec i-5\vec j;$

6) $\vec a=4\vec i-8\vec j,\ \vec b=4\vec i+8\vec j,\ \vec c=8\vec i+8\vec j;$

7) $\vec a=2\vec i+6\vec j,\ \vec b=3\vec i-9\vec j,\ \vec c=3\vec i+3\vec j;$

8) $\vec a=3\vec i-6\vec j,\ \vec b=3\vec i+6\vec j,\ \vec c=2\vec i+3\vec j;$

9) $\vec a=3\vec i+3\vec j,\ \vec b=3\vec i-3\vec j,\ \vec c=3\vec i+4\vec j;$

10) $\vec a=6\vec i-6\vec j,\ \vec b=6\vec i+6\vec j,\ \vec c=4\vec i+3\vec j.$

20. Доказать, что векторы $\vec a,\ \vec b,\ \vec c$ образуют базис в пространстве, и найти координаты вектора $\vec d$ в этом базисе.

1) $\vec a=5\vec i+4\vec j+\vec k;\ \vec b=-3\vec i+5\vec j+2\vec k;\ \vec c=2\vec i-\vec j+3\vec k;\ \vec d=7\vec i+23\vec j+4\vec k;$

2) $\vec a=2\vec i-\vec j+4\vec k;\ \vec b=-3\vec i-2\vec k;\ \vec c=4\vec i+5\vec j-3\vec k;\ \vec d=11\vec i-14\vec k;$

3) $\vec a=-\vec i+\vec j+2\vec k;\ \vec b=2\vec i-3\vec j-5\vec k;\ \vec c=-6\vec i+3\vec j-\vec k;\ \vec d=28\vec i-19\vec j-7\vec k;$

4) $\vec a=\vec i+3\vec j+4\vec k;\ \vec b=-2\vec i+5\vec j;\ \vec c=3\vec i-2\vec j-4\vec k;\ \vec d=13\vec i-5\vec j-4\vec k;$

5) $\vec a=\vec i-\vec j+\vec k;\ \vec b=-5\vec i-3\vec j+\vec k;\ \vec c=2\vec i-\vec j;\ \vec d=-15\vec i-10\vec j+5\vec k;$

6) $\vec a=3\vec i+\vec j+2\vec k;\vec b=-7\vec i-2\vec j-4\vec k;\vec c=-4\vec i+3\vec k;\vec d=16\vec i+6\vec j+15\vec k;$

7) $\vec a=-3\vec i+\vec k;\ \vec b=2\vec i+7\vec j-3\vec k;\ \vec c=-4\vec i+3\vec j+5\vec k;\ \vec d=-16\vec i+33\vec j+13\vec k;$

8) $\vec a=5\vec i+\vec j+2\vec k;\ \vec b=-2\vec i+\vec j-3\vec k;\ \vec c=4\vec i-3\vec j+5\vec k;\ \vec d=15\vec i-15\vec j+24\vec k;$

9) $\vec a=2\vec j-3\vec k;\ \vec b=4\vec i-3\vec j-2\vec k;\ \vec c=5\vec i-4\vec j;\ \vec d=-19\vec i-5\vec j-4\vec k;$

10) $\vec a=3\vec i-\vec j+2\vec k;\ \vec b=-2\vec i+3\vec j+\vec k;\ \vec c=4\vec i-5\vec j-3\vec k;\ \vec d=-3\vec i+2\vec j-3\vec k.$

Распределение задач по вариантам

1 вариант: 1.1, 1.6, 2.1, 2.6, 3.1, 4.1, 4.6, 5, 10, 15.1, 15.6, 16.1, 16.6, 17.1, 17.6, 18.1, 18.6, 19.1, 19.6, 20.1, 20.6;

2 вариант: 1.2, 1.7, 2.2, 2.7, 3.2, 4.2, 4.7, 6, 11, 15.2, 15.7, 16.2, 16.7, 17.2, 17.7, 18.2, 18.7, 19.2, 19.7, 20.2, 20.7;

3 вариант: 1.3, 1.8, 2.3, 2.8, 3.3, 4.3, 4.8, 7, 12, 15.3, 15.8, 16.3, 16.8, 17.3, 17.8, 18.3, 18.8, 19.3, 19.8, 20.3, 20.8;

4 вариант: 1.4, 1.9, 2.4, 2.9, 3.4, 4.4, 4.9, 8, 13, 15.4, 15.9, 16.4, 16.9, 17.4, 17.9, 18.4, 18.9, 19.4, 19.9, 20.4, 20.9;

5 вариант: 1.5, 1.10, 2.5, 2.10, 3.5, 4.5, 4.10, 9, 14, 15.5, 15.10, 16.5, 16.10, 17.5, 17.10, 18.5, 18.10, 19.5, 19.10, 20.5, 20.10.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 2
ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – это число, которое обозначается $\vec{a}\vec{b}$ и вычисляется по формуле $\vec{a}\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)$.

Скалярное произведение обладает следующими свойствами:

1) $|a|=\sqrt{\vec{a}^2}$;

2) $\vec{a}\vec{b}=\vec{b}\vec{a}$;

3) $\forall\lambda\in\mathbb{R},\ (\lambda\vec{a})\vec{b}=\lambda\left(\vec{a}\vec{b}\right)$;

4) $\vec{a}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\vec{b}+\vec{a}\vec{c}$;

5) $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$;

6) $\vec{a}\vec{b}=|\vec{a}|Pr_{\vec{a}}\vec{b}$;

7) для того чтобы ненулевые векторы были перпендикулярны (ортогональны), необходимо и достаточно, чтобы их скалярное произведение было равно нулю.

Пусть векторы $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$ заданы своими прямоугольными координатами, тогда их скалярное произведение находится по формуле

$$\vec{a}\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2,$$

модуль вектора, заданного прямоугольными координатами, –

$$|\vec{a}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}.$$

Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой вектор $\vec{c}$, что выполняются следующие условия:

1) $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$;

2) $\vec{c} \perp \vec{a},\ \vec{c} \perp \vec{b}$;

3) векторы $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ образуют правую тройку.

Обозначается векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ через $\vec{a} \times \vec{b}$.

Векторное произведение обладает следующими свойствами:

1) модуль векторного произведения равен площади параллелограмма, построенного на представителях этих векторов;

2) для того чтобы ненулевые векторы были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы их векторное произведение было равно нулю;

3) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ (антикоммутативность);

4) $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \lambda\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$ (линейность);

5) $\vec{a} \times \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ (дистрибутивность).

Пусть векторы $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$ заданы своими прямоугольными координатами, тогда их векторное произведение находится по формуле

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = (y_1 z_2 - y_2 z_1)\vec{i} + (x_2 z_1 - x_1 z_2)\vec{j} + (x_1 y_2 - x_2 y_1)\vec{k}.$$

Смешанным произведением трёх ненулевых векторов $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ называется скалярное произведение векторного произведения первых двух векторов на третий вектор. Обозначается смешанное произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

Смешанное произведение обладает следующими свойствами:

1) модуль смешанного произведения равен объёму параллелепипеда, построенного на представителях векторов-сомножителей;

2) если смешанное произведение положительно, то векторы образуют правую тройку; если смешанное произведение отрицательно, то тройка левая;

3) для того чтобы три вектора были компланарны, необходимо и достаточно, чтобы их смешанное произведение было равно нулю;

4) $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)\vec{c} = \vec{a}\left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$;

5) $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a}$;

6) $(\vec{a}_1 + \vec{a}_2)\vec{b}\vec{c} = \vec{a}_1\vec{b}\vec{c} + \vec{a}_2\vec{b}\vec{c}$;

7) $(\lambda\vec{a})\vec{b}\vec{c} = \lambda\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)$.

Пусть векторы $\vec{a}(x_1, x_2, x_3)$, $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$ и $\vec{c}(x_3, y_3, z_3)$ заданы своими прямоугольными координатами, тогда их смешанное произведение находится по формуле

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = x_1 y_2 z_3 + x_3 y_1 z_2 + x_2 y_3 z_1 - x_3 y_2 z_1 - x_2 y_1 z_3 - x_1 y_3 z_2.$$

Далее если векторы заданы в координатной форме, то речь идет о прямоугольном базисе, состоящем из единичных векторов.

Задачи

1. Даны векторы $\vec{a} = a\vec{m} + b\vec{n}$ и $\vec{b} = c\vec{m} + d\vec{n}$, где $|\vec{m}| = k$, $|\vec{n}| = l$, $\left(\widehat{\vec{m}, \vec{n}}\right) = \varphi$.

Найти:

а) $\left(m\vec{a} + n\vec{b}\right) \cdot \left(g\vec{a} + h\vec{b}\right)$;

б) $\cos\left(\widehat{\vec{a}, h\vec{b}}\right)$.

1) $a = -2,\ b = 3,\ c = 3,\ d = -6,\ k = 6,\ l = 3,\ \varphi = \frac{5\pi}{3},\ m = 3,\ n = -1,\ g = 1, h = 2$;

2) $a = -2,\ b = -4,\ c = 3,\ d = 1,\ k = 3,\ l = 2,\ \varphi = \frac{7\pi}{3},\ m = -1,\ n = 3, g = 1,\ h = 2$;

3) $a = 4,\ b = 3,\ c = -1,\ d = 2,\ k = 4,\ l = 5,\ \varphi = \frac{3\pi}{3},\ m = 2,\ n = -3,\ g = 1,\ h = 2$;

4) $a = -2,\ b = 3,\ c = 5,\ d = 1,\ k = 2,\ l = 5,\ \varphi = 2\pi,\ m = -3,\ n = 4,\ g = 2,\ h = 3$;

5) $a = 4,\ b = -3,\ c = 5,\ d = 2,\ k = 4,\ l = 7,\ \varphi = \frac{4\pi}{3},\ m = -3,\ n = 2,\ g = 2,\ h = -1$;

6) $a = -5,\ b = 3,\ c = 2,\ d = 4,\ k = 5,\ l = 4,\ \varphi = \pi,\ m = -3,\ n = 1,\ g = -1,\ h = 1$;

7) $a = 5,\ b = -2,\ c = 3,\ d = 4,\ k = 2,\ l = 5,\ \varphi = \frac{\pi}{2},\ m = 2,\ n = 3,\ g = 1,\ h = -2$;

8) $a = 7,\ b = -3,\ c = 2,\ d = 6,\ k = 3,\ l = 4,\ \varphi = \frac{5\pi}{3},\ m = 3,\ n = -1,\ g = 2,\ h = 1$;

9) $a = 4,\ b = -5,\ c = -1,\ d = 3,\ k = 6,\ l = 3,\ \varphi = \frac{2\pi}{3},\ m = 2,\ n = -5,\ g = 1,\ h = 2$;

10) $a = 3,\ b = -5,\ c = -2,\ d = 3,\ k = 1,\ l = 6,\ \varphi = \frac{3\pi}{3},\ m = 4,\ n = 5,\ g = 1,\ h = -2$.

2. Используя скалярное произведение, доказать, что диагонали прямоугольника равны по длине.

3. Вычислить длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = 2\vec{m} + \vec{n}$ и $\vec{b} = \vec{m} - 2\vec{n}$, где $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 1$ и угол между этими векторами равен 60°.

4. Используя скалярное произведение, доказать, что высоты произвольного треугольника пересекаются в одной точке.

5. Длина гипотенузы треугольника равна c. Вычислить сумму $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$.

6. Используя скалярное произведение, доказать, что диагонали ромба взаимно перпендикулярны.

7. Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}(2, 1, 0)$ и $\vec{b}(0, -2, 1)$.

8. Доказать, что при любом расположении точек A, B, C, D на плоскости выполнимо $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.

9. Найти синус угла между вектором $\vec{a}(11, 10, 2)$ и вектором $\vec{b}(2, 2, 1)$.

10. Используя скалярное произведение, доказать, что в правильной треугольной пирамиде противоположные ребра взаимно перпендикулярны.

11. Зная векторы $\overrightarrow{AB}(3, -2, 6)$ и $\overrightarrow{BC}(-2, 4, 4)$, вычислить длину высоты AD треугольника ABC.

12. Даны два вектора $\vec{a}(8, 4, 1)$ и $\vec{b}(2, -2, 1)$. Найти вектор $\vec{x}$, компланарный векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, ортогональный вектору $\vec{a}$, равный ему по длине и образующий с вектором $\vec{b}$ тупой угол.

13. Найти координаты вектора $\vec{x}$, если он ортогонален векторам $\vec{a}(2, 3, -1)$ и $\vec{b}(1, -1, 3)$; образует тупой угол с вектором $\vec{i}$ и $|\vec{x}| = \sqrt{138}$.

14. Даны три вектора $\vec{a}(8, 4, 1)$, $\vec{b}(2, 2, 1)$, $\vec{c}(1, 1, 1)$. Найти единичный вектор $\vec{d}$, образующий с векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равные углы, перпендикулярный к вектору $\vec{c}$ и направленный так, чтобы упорядоченные тройки векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и $\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}$ обе были левыми или правыми.

15. Даны три вектора $\vec{a}(8, 4, 1)$, $\vec{b}(2, -2, 1)$, $\vec{c}(1, 1, 1)$. Найти единичный вектор $\vec{d}$, компланарный векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, ортогональный вектору $\vec{c}$ и направленный так, чтобы упорядоченные тройки векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и $\vec{a}, \vec{d}, \vec{c}$ имели противоположную ориентацию.

16. Даны два вектора $\vec{a}(11, 10, 2)$ и $\vec{b}(4, 0, 3)$. Найти единичный вектор $\vec{c}$, ортогональный векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и направленный так, чтобы упорядоченная тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ была правой.

17. Известны координаты точек *A*, *B*, *C*. Найти:

а) модуль вектора $\vec{a}$;

б) скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

в) проекцию вектора $\vec{c}$ на вектор $\vec{d}$;

г) координаты точки *M*, делящей отрезок *l* в отношении α : β.

1) $A(4, 6, 3)$, $B(-5, 2, 6)$, $C(4, -4, -3)$,

$\vec{a} = 4\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{CB}$, $\vec{d} = \overrightarrow{AC}$, $l = AB$, $\alpha = 5$, $\beta = 4$;

2) $A(4, 3, -2)$, $B(-3, -1, 4)$, $C(2, 2, 1)$,

$\vec{a} = -5\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{CB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{d} = \overrightarrow{CB}$, $l = BC$, $\alpha = 2$, $\beta = 3$;

3) $A(-2, -2, 4)$, $B(1, 3, -2)$, $C(1, 4, 2)$,

$\vec{a} = 2\overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{BA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{c} = \vec{b}$, $\vec{d} = \overrightarrow{AC}$, $l = BA$, $\alpha = 2$, $\beta = 1$;

4) $A(2, 4, 3)$, $B(3, 1, -4)$, $C(-1, 2, 2)$,

$\vec{a} = 2\overrightarrow{BA} + 4\overrightarrow{AC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BA}$, $\vec{c} = \vec{b}$, $\vec{d} = \overrightarrow{AC}$, $l = BA$, $\alpha = 1$, $\beta = 4$;

5) $A(3, 2, 4)$, $B(-2, 1, 3)$, $C(2, -2, 1)$,

$\vec{a} = 4\overrightarrow{BC} - 3\overrightarrow{AC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BA}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{d} = \overrightarrow{BC}$, $l = AC$, $\alpha = 2$, $\beta = 4$;

6) $A(-1, -2, 4)$, $B(-1, 3, 5)$, $C(1, 4, 2)$,

$\vec{a} = 3\overrightarrow{AC} - 7\overrightarrow{BC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \vec{b}$, $\vec{d} = \overrightarrow{AC}$, $l = AC$, $\alpha = 1$, $\beta = 7$;

7) $A(5, 4, 4)$, $B(-5, 2, 3)$, $C(4, 2, -5)$,

$\vec{a} = 11\overrightarrow{AC} - 6\overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{d} = \overrightarrow{AC}$, $l = BC$, $\alpha = 3$, $\beta = 1$;

8) $A(2, -4, 3)$, $B(-3, -2, 4)$, $C(0, 0, -2)$,

$\vec{a} = 3\overrightarrow{AC} - 4\overrightarrow{CB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \vec{b}$, $\vec{d} = \overrightarrow{CB}$, $l = AC$, $\alpha = 2$, $\beta = 1$;

9) $A(3, 4, 6)$, $B(-4, 6, 4)$, $C(5, -2, -3)$,

$\vec{a} = -7\overrightarrow{BC} + 4\overrightarrow{CA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BA}$, $\vec{c} = \overrightarrow{CA}$, $\vec{d} = \overrightarrow{BC}$, $l = BA$, $\alpha = 5$, $\beta = 3$;

10) $A(0, 2, 5)$, $B(2, -3, 4)$, $C(3, 2, -5)$,

$\vec{a} = 3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{CB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{c} = \vec{b}$, $\vec{d} = \overrightarrow{AB}$, $l = AC$, $\alpha = 3$, $\beta = 2$.

18. Даны векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

а) вычислить смешанное произведение трех векторов;

б) найти модуль векторного произведения двух векторов;

в) вычислить скалярное произведение двух векторов;

г) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны два вектора;

д) проверить, будут ли компланарны три вектора.

1) $\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k},\quad \vec{b}=\vec{j}+4\vec{k};\quad \vec{c}=5\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k};$

а) $\vec{a}, 3\vec{b}, \vec{c};$ б) $3\vec{a}, 2\vec{c};$ в) $\vec{b}, -4\vec{c};$ г) $\vec{a}, \vec{c};$ д) $\vec{a}, 2\vec{b}, 3\vec{c};$

2) $\vec{a}=3\vec{i}+4\vec{j}+\vec{k},\quad \vec{b}=\vec{i}-2\vec{j}+7\vec{k};\quad \vec{c}=3\vec{i}-6\vec{j}+21\vec{k};$

а) $5\vec{a}, 2\vec{b}, \vec{c};$ б) $4\vec{b}, 2\vec{c};$ в) $\vec{a}, \vec{c};$ г) $\vec{b}, \vec{c};$ д) $2\vec{a}, -3\vec{b}, \vec{c};$

3) $\vec{a}=2\vec{i}-4\vec{j}-2\vec{k},\quad \vec{b}=7\vec{i}+3\vec{j};\quad \vec{c}=3\vec{i}+5\vec{j}-7\vec{k};$

а) $\vec{a}, 2\vec{b}, 3\vec{c};$ б) $3\vec{a}, -7\vec{b};$ в) $\vec{c}, -2\vec{a};$ г) $\vec{a}, \vec{c};$ д) $3\vec{a}, 2\vec{b}, 3\vec{c};$

4) $\vec{a}=-7\vec{i}+2\vec{k},\quad \vec{b}=2\vec{i}-6\vec{j}+4\vec{k};\quad \vec{c}=\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k};$

а) $\vec{a}, -2\vec{b}, -7\vec{c};$ б) $4\vec{b}, 3\vec{c};$ в) $2\vec{a}, -7\vec{c};$ г) $\vec{b}, \vec{c};$ д) $2\vec{a}, 4\vec{b}, 3\vec{c};$

5) $\vec{a}=-4\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k},\quad \vec{b}=3\vec{i}+5\vec{j}-2\vec{k};\quad \vec{c}=\vec{j}+5\vec{k};$

а) $\vec{a}, 6\vec{b}, 3\vec{c};$ б) $2\vec{b}, 2\vec{a};$ в) $\vec{a}, -4\vec{c};$ г) $\vec{a}, \vec{b};$ д) $\vec{a}, 6\vec{b}, 3\vec{c};$

6) $\vec{a}=3\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k},\quad \vec{b}=2\vec{i}-3\vec{k};\quad \vec{c}=-3\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k};$

а) $\vec{a}, -3\vec{b}, 2\vec{c};$ б) $5\vec{a}, 3\vec{c};$ в) $-2\vec{a}, 4\vec{b};$ г) $\vec{a}, \vec{c};$ д) $5\vec{a}, 4\vec{b}, 3\vec{c};$

7) $\vec{a}=4\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k},\quad \vec{b}=2\vec{i}+3\vec{j}-5\vec{k};\quad \vec{c}=7\vec{i}+2\vec{j}+4\vec{k};$

а) $7\vec{a}, -4\vec{b}, 2\vec{c};$ б) $3\vec{a}, 5\vec{c};$ в) $2\vec{b}, 4\vec{c};$ г) $\vec{b}, \vec{c};$ д) $7\vec{a}, 2\vec{b}, 5\vec{c};$

8) $\vec{a}=4\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k},\quad \vec{b}=2\vec{i}+\vec{k};\quad \vec{c}=-12\vec{i}-6\vec{j}+9\vec{k};$

а) $2\vec{a}, 3\vec{b}, \vec{c};$ б) $4\vec{a}, 3\vec{b};$ в) $\vec{b}, -4\vec{c};$ г) $\vec{a}, \vec{c};$ д) $2\vec{a}, 3\vec{b}, -4\vec{c};$

9) $\vec{a}=-\vec{i}+5\vec{k},\quad \vec{b}=-3\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k};\quad \vec{c}=-2\vec{i}-4\vec{j}+\vec{k};$

а) $3\vec{a}, -4\vec{b}, 2\vec{c};$ б) $7\vec{a}, -3\vec{c};$ в) $2\vec{b}, 3\vec{a};$ г) $\vec{b}, \vec{c};$ д) $7\vec{a}, 2\vec{b}, -3\vec{c};$

10) $\vec{a}=6\vec{i}-4\vec{j}+6\vec{k},\quad \vec{b}=9\vec{i}-6\vec{j}+9\vec{k};\quad \vec{c}=\vec{i}-8\vec{k};$

а) $2\vec{a}, -4\vec{b}, 3\vec{c};$ б) $3\vec{b}, -9\vec{c};$ в) $3\vec{a}, -5\vec{c};$ г) $\vec{a}, \vec{b};$ д) $3\vec{a}, -4\vec{b}, -9\vec{c}.$

19. Вершины пирамиды находятся в точках *A*, *B*, *C*, *D*. Вычислить:

а) площадь указанной грани;

б) площадь сечения, проходящего через середину ребра и две вершины пирамиды;

в) объем пирамиды.

1) $A(3, 4, 5);\ B(1, 2, 1);\ C(-2, -3, 6);\ D(3, -6, -3);$

а) $ACD;$ б) $l = AB,\ C$ и $D;$

2) $A(-7, -5, 6);\ B(-2, 5, -3);\ C(3, -2, 4);\ D(1, 2, 2);$

а) $BCD;$ б) $l = CD,\ A$ и $B;$

3) $A(1, 3, 1);\ B(-1, 4, 6);\ C(-2, -3, 4);\ D(3, 4, -4);$

а) $ACD;$ б) $l = BC,\ A$ и $D;$

4) $A(2, 4, 1);\ B(-3, -2, 4);\ C(3, 5, -2);\ D(4, 2, -3);$

а) $ABD;$ б) $l = AC,\ B$ и $D;$

5) $A(-5, -3, -4);\ B(1, 4, 6);\ C(3, 2, -2);\ D(8, -2, 4);$

а) $ACD;$ б) $l = BC,\ A$ и $D;$

6) $A(3,4,2)$; $B(-2,3,-5)$; $C(4,-3,6)$; $D(6,-5,3)$;
а) *ABD*; б) *l* = *BD*, *A* и *C*;
7) $A(-4,6,3)$; $B(3,-5,1)$; $C(2,6,-4)$; $D(2,4,-5)$;
а) *ACD*; б) *l* = *AD*, *B* и *C*;
8) $A(7,5,8)$; $B(-4,-5,3)$; $C(2,-3,5)$; $D(5,1,-4)$;
а) *BCD*; б) *l* = *BC*, *A* и *D*;
9) $A(3,-2,6)$; $B(-6,-2,3)$; $C(1,1,-4)$; $D(4,6,-7)$;
а) *ABD*; б) *l* = *BD*, *A* и *C*;
10) $A(-5,-4,-3)$; $B(7,3,-1)$; $C(6,-2,0)$; $D(3,2,-7)$;
а) *BCD*; б) *l* = *AD*, *B* и *C*.

Распределение задач по вариантам

1 вариант: 1.1, 1.6, 2, 3, 12, 17.1, 17.6, 18.1, 18.6, 19.1, 19.6;
2 вариант: 1.2, 1.7, 4, 5, 13, 17.2, 17.7, 18.2, 18.7, 19.2, 19.7;
3 вариант: 1.3, 1.8, 6, 7, 14, 17.3, 17.8, 18.3, 18.8, 19.3, 19.8;
4 вариант: 1.4, 1.9, 8, 9, 15, 17.4, 17.9, 18.4, 18.9, 19.4, 19.9;
5 вариант: 1.5, 1.10, 10, 11, 16, 17.5, 17.10, 18.5, 18.10, 19.5, 19.10.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 3
СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

Если по геометрическим свойствам плоской линии *l* удается найти в некоторой ПДСК-2 такое уравнение

$$F(x, y) = 0, \tag{1}$$

что координаты любой точки линии *l* в этой ПДСК-2 определяют некоторое решение уравнения (1) и, с другой стороны, всякое решение этого уравнения определяет некоторую точку данной линии, то говорят, что (1) – *уравнение линии l*.

Если по геометрическим свойствам поверхности *s* удается найти в некоторой ПДСК-3 такое уравнение

$$F(x, y, z) = 0, \tag{2}$$

что координаты любой точки поверхности *s* в этой ПДСК-3 определяют некоторое решение уравнения (2) и, с другой стороны, всякое решение этого уравнения определяет некоторую точку данной поверхности, то говорят, что (2) – *уравнение поверхности s*.

Пусть $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ – две различные точки, данные в некоторой ПДСК-3. Тогда $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$. Поскольку расстояние между точками A и B равно модулю связанного вектора $\overrightarrow{AB}$, то получим *формулу расстояния между точками:*

$$AB = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2 + \left(z_2 - z_1\right)^2}.$$

Пусть нужно найти такую точку C, которая лежит на отрезке AB и делит его в заданном соотношении λ. Пусть $C(x, y, z)$. Тогда *формулы деления отрезка в данном соотношении* имеют вид

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}; \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

Если точка C – середина отрезка AB, то $\lambda = 1$ и тогда получаем *формулы середины отрезка:*

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}; \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Если точки A и B даны в некоторой ПДСК-2, т. е. $A\left(x_1, y_1\right)$ и $B\left(x_2, y_2\right)$, то в формулах деления отрезка в данном соотношении и формулах середины отрезка аппликата не используется.

Формулы перехода:

– от полярных координат к прямоугольным

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi;$$

– от прямоугольных координат к полярным

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

– от сферических координат к прямоугольным

$$x = r\cos\psi\cos\varphi, \quad y = r\cos\psi\sin\varphi, \quad z = \sin\psi;$$

– от прямоугольных координат к сферическим

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$\sin\psi = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \cos\psi = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$\sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Задачи

1. Найти полярные координаты точек, заданных в прямоугольной системе координат.

1) $A\left(\sqrt{3},1\right)$; $B(2,2)$; $C\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$; $D(3,0)$;

2) $A\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$; $B(2,-2)$; $C(0,4)$; $D(-3,0)$;

3) $A\left(-1,\sqrt{3}\right)$; $B(-3,3)$; $C(0,-2)$; $D(4,0)$;

4) $A\left(1,-\sqrt{3}\right)$; $B(4,4)$; $C\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$; $D(5,0)$;

5) $A\left(-\sqrt{3},1\right)$; $B(-3,-3)$; $C(0,-3)$; $D(-4,0)$;

6) $A\left(2\sqrt{3},2\right)$; $B(13,13)$; $C\left(0,\dfrac{1}{21}\right)$; $D(30,0)$;

7) $A\left(3\sqrt{2},3\sqrt{2}\right)$; $B(12,-12)$; $C\left(0,\dfrac{13}{2}\right)$; $D(-30,0)$;

8) $A\left(-4,4\sqrt{3}\right)$; $B(-15,-15)$; $C\left(0,\dfrac{1}{12}\right)$; $D(45,0)$;

9) $A\left(-3\sqrt{3},3\right)$; $B(-14,14)$; $C\left(0,\dfrac{3}{22}\right)$; $D(-37,0)$;

10) $A\left(2,-2\sqrt{3}\right)$; $B(11,11)$; $C\left(0,\dfrac{2}{21}\right)$; $D(56,0)$.

2. Найти прямоугольные координаты точек, заданных в полярной системе координат.

1) $A\left(2,\dfrac{\pi}{3}\right)$; $B\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$; $C(1,0)$;

2) $A\left(3,\dfrac{\pi}{6}\right)$; $B\left(0,\dfrac{\pi}{3}\right)$; $C(2,0)$;

3) $A\left(4,\dfrac{2\pi}{3}\right)$; $B\left(0,\dfrac{2\pi}{3}\right)$; $C(3,0)$;

4) $A\left(2,\dfrac{5\pi}{6}\right)$; $B\left(0,\dfrac{3\pi}{4}\right)$; $C(4,0)$;

5) $A\left(3,\dfrac{3\pi}{2}\right)$; $B\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$; $C(5,0)$;

6) $A\left(10, \frac{3\pi}{2}\right)$; $B\left(0, \frac{\pi}{16}\right)$; $C(15, 0)$;

7) $A\left(11, \frac{\pi}{2}\right)$; $B\left(0, \frac{\pi}{17}\right)$; $C(14, 0)$;

8) $A(12, \pi)$; $B\left(0, \frac{\pi}{18}\right)$; $C(13, 0)$;

9) $A\left(13, \frac{3\pi}{4}\right)$; $B\left(0, \frac{\pi}{19}\right)$; $C(12, 0)$;

10) $A\left(14, \frac{\pi}{4}\right)$; $B\left(0, \frac{\pi}{10}\right)$; $C(11, 0)$.

3. Найти полярные координаты середины отрезка AB, координаты концов которого также заданы в полярной системе координат.

1) $A\left(3, \frac{2\pi}{3}\right)$; $B\left(5, \frac{\pi}{3}\right)$;

2) $A\left(8, \frac{\pi}{4}\right)$; $B\left(6, \frac{\pi}{2}\right)$;

3) $A\left(4, \frac{\pi}{2}\right)$; $B(4, \pi)$;

4) $A(8, \pi)$; $B\left(6, \frac{3\pi}{2}\right)$;

5) $A\left(5, \frac{3\pi}{4}\right)$; $B\left(6, \frac{\pi}{4}\right)$;

6) $A\left(3, \frac{\pi}{4}\right)$; $B\left(5, \frac{5\pi}{4}\right)$;

7) $A\left(6, \frac{\pi}{6}\right)$; $B\left(6, \frac{7\pi}{6}\right)$;

8) $A\left(8, \frac{\pi}{3}\right)$; $B\left(6, \frac{4\pi}{3}\right)$;

9) $A\left(3, \frac{\pi}{2}\right)$; $B\left(5, \frac{3\pi}{2}\right)$;

10) $A(5, \pi)$; $B\left(5, \frac{3\pi}{2}\right)$.

4. Найти полярные координаты точки, симметричной точке A относительно полярной оси.

1) $A\left(3, \frac{\pi}{4}\right)$;

2) $A\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$;

3) $A\left(4, \frac{\pi}{6}\right)$;

4) $A\left(6, \frac{\pi}{2}\right)$;

5) $A(5, \pi)$;

6) $A\left(3, \frac{3\pi}{4}\right)$;

7) $A\left(2, \frac{2\pi}{3}\right)$;

8) $A\left(6, \frac{5\pi}{4}\right)$;

9) $A\left(4, \frac{7\pi}{4}\right)$;

10) $A\left(5, \frac{5\pi}{3}\right)$.

5. Найти сферические координаты точек, если известны прямоугольные.

1) $A(1,-2,7)$; $B(2,-2,4)$; 2) $A(3,-5,4)$; $B(4,6,3)$;

3) $A(1,2,-7)$; $B(2,8,4)$; 4) $A(3,-2,3)$; $B(-4,-2,8)$;

5) $A(-1,4,7)$; $B(-2,-3,4)$; 6) $A(-3-1,-2)$; $B(-4,8,-3)$;

7) $A(5,2,3)$; $B(-7,4,2)$; 8) $A(5,9,1)$; $B(-5,6,-3)$;

9) $A(3,7,-2)$; $B(-8,1,-1)$; 10) $A(4,-2,3)$; $B(-2,4,2)$.

6. Составить уравнение, определяющее множество точек плоскости, находящихся на одинаковом расстоянии от точек *A* и *B*.

1) $A(5,7)$; $B(-2,4)$; 2) $A(-5,4)$; $B(6,3)$;

3) $A(2,-7)$; $B(8,4)$; 4) $A(-2,3)$; $B(-2,8)$;

5) $A(4,7)$; $B(-3,4)$; 6) $A(-1,-2)$; $B(8,-3)$;

7) $A(5,2)$; $B(-7,4)$; 8) $A(5,9)$; $B(-5,6)$;

9) $A(3,7)$; $B(-8,1)$; 10) $A(4,-2)$; $B(-2,4)$.

7. Составить уравнение, определяющее множество точек пространства, находящихся на одинаковом расстоянии от точек *A* и *B*.

1) $A(1,5,7)$; $B(2,-2,4)$; 2) $A(3,-5,4)$; $B(4,6,3)$;

3) $A(1,2,-7)$; $B(2,8,4)$; 4) $A(3,-2,3)$; $B(-4,-2,8)$;

5) $A(-1,4,7)$; $B(-2,-3,4)$; 6) $A(-3,-1,-2)$; $B(-4,8,-3)$;

7) $A(5,2,3)$; $B(-7,4,2)$; 8) $A(5,9,1)$; $B(-5,6,-3)$;

9) $A(3,7,-2)$; $B(-8,1,-1)$; 10) $A(4,-2,3)$; $B(-2,4,2)$.

8. Составить уравнение, определяющее множество точек плоскости, для которых расстояние от точки *A* вдвое меньше расстояния от точки *B*.

1) $A(-5,7)$; $B(2,4)$; 2) $A(5,4)$; $B(-6,3)$;

3) $A(-2,-7)$; $B(-8,4)$; 4) $A(2,3)$; $B(2,8)$;

5) $A(-4,7)$; $B(3,4)$; 6) $A(1,-2)$; $B(-8,-3)$;

7) $A(-5,2)$; $B(7,4)$; 8) $A(-5,9)$; $B(5,6)$;

9) $A(-3,7)$; $B(8,1)$; 10) $A(-4,-2)$; $B(2,4)$.

9. Составить уравнение, определяющее множество точек пространства, для которых расстояние от точки *A* втрое меньше расстояния от точки *B*.

1) $A(1,5,7)$; $B(2,-2,4)$; 2) $A(3,-5,4)$; $B(4,6,3)$;

3) $A(1,2,-7)$; $B(2,8,4)$; 4) $A(3,-2,3)$; $B(-4,-2,8)$;

5) $A(-1,4,7)$; $B(-2,-3,4)$; 6) $A(-3,-1,-2)$; $B(-4,8,-3)$;

7) $A(5, 2, 3)$; $B(-7, 4, 2)$; 8) $A(5, 9, 1)$; $B(-5, 6, -3)$;
9) $A(3, 7, -2)$; $B(-8, 1, -1)$; 10) $A(4, -2, 3)$; $B(-2, 4, 2)$.

Распределение задач по вариантам

1 вариант: 1.1, 2.1, 3.1, 4.1, 5.1, 6.1, 7,1, 8.1, 9.1; 1.6, 2.6, 3.6, 4.6, 5.6, 6.6, 7,6, 8.6, 9.6;

2 вариант: 1.2, 2.2, 3.2, 4.2, 5.2, 6.2, 7,2, 8.2, 9.2; 1.7, 2.7, 3.1, 4.7, 5.7, 6.7, 7,7, 8.7, 9.7;

3 вариант: 1.3, 2.3, 3.3, 4.3, 5.3, 6.3, 7,3, 8.3, 9.3; 1.8, 2.8, 3.8, 4.8, 5.8, 6.8, 7,8, 8.8, 9.8;

4 вариант: 1.4, 2.4, 3.4, 4.4, 5.4, 6.4, 7,4, 8.4, 9.4; 1.9, 2.9, 3.9, 4.9, 5.9, 6.9, 7,9, 8.9, 9.9;

5 вариант: 1.5, 2.5, 3.5, 4.5, 5.5, 6.5, 7,5, 8.5, 9.5; 1.10, 2.10, 3.10, 4.10, 5.10, 6.10, 7,10, 8.10, 9.10.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 4
ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ

Всякий ненулевой вектор, параллельный некоторой прямой, называется *направляющим вектором* этой прямой.

Всякий ненулевой вектор плоскости, перпендикулярный некоторой прямой из этой плоскости, называется *нормальным вектором* этой прямой.

Всякая прямая в некоторой ПДСК-2 определяется уравнением первой степени

$$Ax + By + C = 0,$$

где *A, B, C* – некоторые действительные числа, удовлетворяющие условию $A^2 + B^2 \neq 0$.

Всякому уравнению первой степени

$$Ax + By + C = 0,$$

где *A, B, C* – некоторые действительные числа, удовлетворяющие условию $A^2 + B^2 \neq 0$ в некоторой ПДСК-2, соответствует некоторая прямая.

Это уравнение первой степени называется общим уравнением прямой на плоскости.

Если в общем уравнении прямой отсутствует коэффициент *C*, то прямая проходит через начало координат. Если в общем уравнении равен нулю коэффициент при переменной *x*, то прямая параллельна оси *OX*; если при переменной *y*, то прямая параллельна оси *OY*.

Пусть в некоторой ПДСК-2 некоторая прямая задана своим общим уравнением $Ax+By+C=0.$ Все точки плоскости, для которых $Ax+By+C>0$ лежат в одной полуплоскости относительно данной прямой, а все точки плоскости для которых $Ax+By+C<0$ лежат в другой полуплоскости.

Если прямая не параллельна оси ординат, то она определяется уравнением

$$y-y_0=k(x-x_0),$$

где $k=\operatorname{tg}\alpha$ и α – угол между этой прямой и положительным направлением оси *OX*, а $M(x_0, y_0)$ – некоторая фиксированная точка этой прямой. Это уравнение называется *уравнением прямой по угловому коэффициенту и точке*.

Если $B(0, b)$ – точка пересечения прямой *a* с осью *OY*, то прямая определяется уравнением

$$y=kx+b,$$

которое называется *уравнением прямой с угловым коэффициентом*.

Если прямая параллельна оси *OY*, то у нее углового коэффициента не существует. Если прямая параллельна оси *OX*, то ее угловой коэффициент равен 1.

Если прямая *a* проходит через две различные точки $A(x_1,\ y_1)$ и $B(x_2,\ y_2),$ то она определяется уравнением

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1},$$

которое называется *уравнением прямой по двум точкам*.

Если $A(a,\ 0)$ – точка пересечения прямой *a* с осью *OX*, а $B(0,\ b)$ – точка пересечения с осью *OY*, то прямая определяется уравнением

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,$$

которое называется *уравнением прямой в отрезках по осям*.

Если $\vec{a}(a_1,\ a_2)$ – направляющий вектор прямой *a*, а $M_0(x_0,\ y_0)$ – некоторая её фиксированная точка, то прямая определяется уравнением

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2},$$

которое называется *каноническим уравнением прямой на плоскости*. Используя тот же вектор и ту же точку, прямую можно определить также двумя уравнениями

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t; \\ y = y_0 + a_2 t, \end{cases}$$

которые называются *параметрическими уравнениями прямой на плоскости*. Число t называется *параметром*.

Пусть α – угол между нормальным вектором прямой a и положительным направлением оси OX, p – расстояние от прямой до начала координат. Тогда прямая определяется уравнением

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0,$$

которое называется *нормальным уравнением прямой*. Для того чтобы получить из общего уравнения прямой её нормальное уравнение, необходимо это общее уравнение умножить на множитель

$$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

который называется *нормирующим множителем*. Знак этого множителя выбирается противоположным знаку C из общего уравнения.

Пусть две прямые – a_1 и a_2 – заданы своими общими уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ соответственно. Тогда

– *условие параллельности*

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2},$$

– *условие перпендикулярности*

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0.$$

Углом φ *между прямыми* a_1 и a_2 называется наименьший угол поворота, на который нужно повернуть прямую a_1 вокруг некоторой её точки так, чтобы прямая a_1 совпала с прямой a_2 или стала ей параллельной. Этот угол считается положительным, если поворот происходит против часовой стрелки, и отрицательным в противном случае.

Пусть k_1 и k_2 – угловые коэффициенты прямых a_1 и a_2. Тогда *формула угла между прямыми*

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2};$$

– *условие параллельности*

$$k_1 = k_2;$$

– *условие перпендикулярности*

$$k_1 = -\frac{1}{k_2}.$$

Если прямая параллельна оси *OX*, то ее угловой коэффициент равен 0, если прямая параллельна оси *OY*, то у нее углового коэффициента не существует.

Пусть в некоторой ПДСК-2 дана некоторая точка $M(x_1, y_1)$ и задана некоторая прямая *a* своим общим уравнением $Ax + By + C = 0$. Тогда расстояние от точки *M* до прямой *a* находится по формуле

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Если вектор $\vec{n}(x_1, y_1)$ является нормальным вектором прямой, то вектор $\vec{a}(-y_1, x_1)$ является направляющим вектором этой прямой. Направляющим вектором этой прямой будет также и вектор $\vec{a}(y_1, -x_1)$.

При решении задач на прямую необходимо сначала определиться, какой вид уравнения прямой следует искать. Важно освоить приемы перехода от одного вида уравнения прямой к другому.

Задачи

1. Найти параметрические уравнения прямой:

1) проходящей через точку $A(3, -2)$, параллельно вектору $\vec{a}(4, 5)$;

2) проходящей через точку $A(1, 2)$, перпендикулярно вектору $\vec{a}(-3, 4)$;

3) проходящей через начало координат, параллельно вектору $\vec{a}(7, -8)$;

4) проходящей через точки $A(4, -2)$ и $B(6, -2)$;

5) проходящей через точку $A(2,\ 5)$, параллельно вектору $\vec{a}(1,\ -2)$;

6) проходящей через точку $A(2,\ 2)$, перпендикулярно вектору $\vec{a}(3,\ 3)$;

7) проходящей через начало координат, перпендикулярно вектору $\vec{a}(7,\ 4)$;

8) проходящей через точки $A(4,\ -5)$ и $B(4,\ -3)$;

9) проходящей через точку $A(3,\ -2)$, параллельно вектору $\vec{a}(3,\ 4)$;

10) проходящей через точку $A(-1,\ 2)$, перпендикулярно вектору $\vec{a}(4,\ -5)$.

2. Прямая задана параметрическими уравнениями. Найти:

а) направляющий вектор прямой;

б) координаты точек прямой, для которых параметр принимает значения –2, 0, 1, 12;

в) значения параметра для точек пересечения прямой с осями координат;

г) среди данных точек *A*, *B*, *C*, *D*, *E* выяснить, какие принадлежат данной прямой.

1) $\begin{cases} x = 2 - 5t; \\ y = 2 + 2t. \end{cases}$ $A(-3,\ 4),\ B(-6,\ 2),\ C(2,\ 2),\ D(7,\ 0),\ E(4,\ 3);$

2) $\begin{cases} x = 3 + 4t; \\ y = 5 - 2t. \end{cases}$ $A(-3,\ 4),\ B(-6,\ 2),\ C(2,\ 2),\ D(7,\ 0),\ E(4,\ 3);$

3) $\begin{cases} x = 3 + 7t; \\ y = 4 - 5t. \end{cases}$ $A(-4,\ -1),\ B(6,\ 4),\ C(3,\ 4),\ D(3,\ 0),\ E(4,\ 4);$

4) $\begin{cases} x = 2 - 4t; \\ y = 3 + 6t. \end{cases}$ $A(2,\ 3),\ B(-2,\ 9),\ C(0,\ 6),\ D(6,\ -3),\ E(3,\ 3);$

5) $\begin{cases} x = 3 + 5t; \\ y = 3 - 4t. \end{cases}$ $A(8,\ 4),\ B(8,\ -1),\ C(5,\ 0),\ D(3,\ 3),\ E(-3,\ 7);$

6) $\begin{cases} x = -2 + 4t; \\ y = 5 - 6t. \end{cases}$ $A(-3,\ 7),\ B(-2,\ 5),\ C(2,\ -1),\ D(0,\ 2),\ E(4,\ -6);$

7) $\begin{cases} x = -5 - 3t; \\ y = 7 + 2t. \end{cases}$ $A(-3,\ 2),\ B(-8,\ 9),\ C(-5,\ 2),\ D(-5,\ 7),\ E(-2,\ 5);$

8) $\begin{cases} x = 5 - 4t; \\ y = 6 - 2t. \end{cases}$ $A(-7,\ 4),\ B(5,\ 6),\ C(3,\ 5),\ D(6,\ -1),\ E(7,\ 0);$

9) $\begin{cases} x = -3 + 4t; \\ y = 3 - 3t. \end{cases}$ $A(-5,\ 4),\ B(-3,\ 3),\ C(2,\ 2),\ D(1,\ 0),\ E(-7,\ 6);$

10) $\begin{cases} x = -2 - 5t; \\ y = -3 + 7t. \end{cases}$ $A(-2,\ -3),\ B(-7,\ 4),\ C(2,\ 2),\ D(3,\ 10),\ E(4,\ 3).$

3. Даны точка A и вектор $\vec{a}$. Найти:

а) общее уравнение прямой, проходящей через данную точку, параллельно данному вектору;

б) общее уравнение прямой, проходящей через данную точку, перпендикулярно данному вектору.

1) $A(1,\ 2)$ и $\vec{a}(-2,\ 5)$; 2) $A(3,\ 2)$ и $\vec{a}(2,\ -3)$;

3) $A(5,\ -2)$ и $\vec{a}(3,\ 7)$; 4) $A(3,\ -5)$ и $\vec{a}(-3,\ -5)$;

5) $A(3,\ -4)$ и $\vec{a}(5,\ 5)$; 6) $A(3,\ -3)$ и $\vec{a}(-7,\ 2)$;

7) $A(2,\ 3)$ и $\vec{a}(6,\ 2)$; 8) $A(2,\ 3)$ и $\vec{a}(-2,\ 5)$;

9) $A(3,\ 1)$ и $\vec{a}(2,\ -5)$; 10) $A(4,\ 2)$ и $\vec{a}(7,\ 1)$.

4. Треугольник ABC задан своими вершинами. Найти:

а) общие уравнения сторон;

б) уравнения медиан с угловым коэффициентом;

в) параметрические уравнения высот.

1) $A(12,\ 5)$, $B(2,\ -10)$, $C(5,\ 8)$;

2) $A(8,\ 6)$, $B(12,\ 6)$, $C(8,\ 8)$;

3) $A(10,\ 4)$, $B(5,\ -10)$, $C(6,\ 8)$;

4) $A(12,\ 5)$, $B(8,\ -8)$, $C(5,\ 7)$;

5) $A(-6,\ 6)$, $B(4,\ 10)$, $C(15,\ 8)$;

6) $A(10,\ 5)$, $B(6,\ -4)$, $C(7,\ 8)$;

7) $A(10,\ 3)$, $B(12,\ 4)$, $C(8,\ 10)$;

8) $A(-5,\ 5)$, $B(-12,\ -10)$, $C(6,\ -4)$;

9) $A(-8,\ 4)$, $B(5,\ -10)$, $C(4,\ 8)$;

10) $A(11,\ 6)$, $B(4,\ -8)$, $C(3,\ 7)$.

5. Выяснить взаимное расположение прямых: параллельны, перпендикулярны, просто пересекаются, совпадают. В случае пересечения найти их общую точку.

1) $3x+4y-7=0$ и $8x-6y+4=0$;

2) $-4x+3y-7=0$ и $8x-6y+4=0$;

3) $3x+4y-7=0$ и $8x+6y+4=0$;

4) $3x-4y-7=0$ и $-6x+8y+14=0$;

5) $5x+y-7=0$ и $2x-10y+4=0$;

6) $x+4y-9=0$ и $-2x-8y+5=0$;

7) $x-y+8=0$ и $5x-6y+3=0$;

8) $x+4y-2=0$ и $-2x-8y+4=0;$

9) $7x-4y-7=0$ и $4x+7y+4=0;$

10) $3x+4y-7=0$ и $8x+6y+4=0;$

11) $\begin{cases} x=2-t; \\ y=3+2t. \end{cases}$ и $\begin{cases} x=1-4t; \\ y=3+8t. \end{cases}$

12) $\begin{cases} x=2+t; \\ y=3-2t. \end{cases}$ и $\begin{cases} x=3-3t; \\ y=3+4t. \end{cases}$

13) $\begin{cases} x=2+2t; \\ y=3+2t. \end{cases}$ и $\begin{cases} x=1-4t; \\ y=2-4t. \end{cases}$

14) $\begin{cases} x=2-2t; \\ y=3+3t. \end{cases}$ и $\begin{cases} x=1-3t; \\ y=3-2t. \end{cases}$

15) $\begin{cases} x=2-3t; \\ y=3+2t. \end{cases}$ и $\begin{cases} x=1+6t; \\ y=3-4t. \end{cases}$

16) $\begin{cases} x=1-5t; \\ y=2+2t. \end{cases}$ и $\begin{cases} x=3+4t; \\ y=3+6t. \end{cases}$

17) $\begin{cases} x=2-t; \\ y=2t. \end{cases}$ и $\begin{cases} x=1-4t; \\ y=2+8t. \end{cases}$

18) $\begin{cases} x=2-t; \\ y=3+2t. \end{cases}$ и $\begin{cases} x=1-8t; \\ y=3-4t. \end{cases}$

19) $\begin{cases} x=1-3t; \\ y=2+2t. \end{cases}$ и $\begin{cases} x=1-6t; \\ y=3+4t. \end{cases}$

20) $\begin{cases} x=2-t; \\ y=3+2t. \end{cases}$ и $\begin{cases} x=1+4t; \\ y=2+t. \end{cases}$

21) $\begin{cases} x=2-t; \\ y=3+2t. \end{cases}$ и $4x-15y+7=0;$

22) $\begin{cases} x=2+t; \\ y=3-2t. \end{cases}$ и $13x+9y-6=0;$

23) $\begin{cases} x=2-7t; \\ y=3+5t. \end{cases}$ и $3x-17y+9=0;$

24) $\begin{cases} x=1-5t; \\ y=4+7t. \end{cases}$ и $11x+12y-3=0;$

25) $\begin{cases} x = 4 + 3t; \\ y = 3 - 7t. \end{cases}$ и $14x - 5y + 3 = 0;$

26) $\begin{cases} x = -2 + 4t; \\ y = 9 - 7t. \end{cases}$ и $-3x + 11y - 4 = 0;$

27) $\begin{cases} x = 3 - 3t; \\ y = 8 + 4t. \end{cases}$ и $9x - 7y + 11 = 0;$

28) $\begin{cases} x = 5 + 4t; \\ y = 6 - 5t. \end{cases}$ и $-9x + 11y - 16 = 0;$

29) $\begin{cases} x = 2 - 4t; \\ y = 3 - 6t. \end{cases}$ и $10x - 11y + 2 = 0;$

30) $\begin{cases} x = 3 + 6t; \\ y = 4 - 5t. \end{cases}$ и $7x + 9y - 7 = 0.$

6. Найти угол между прямыми.

1) $\begin{cases} x = 2 - t; \\ y = 3 + 2t. \end{cases}$ и $4x - 5y + 7 = 0;$

2) $\begin{cases} x = 2 + t; \\ y = 3 - 2t. \end{cases}$ и $3x + 2y - 2 = 0;$

3) $\begin{cases} x = 2 - 7t; \\ y = 3 + 5t. \end{cases}$ и $3x + 7y + 1 = 0;$

4) $\begin{cases} x = 1 - 5t; \\ y = 4 + 7t. \end{cases}$ и $x + 2y - 3 = 0;$

5) $\begin{cases} x = 2 + t; \\ y = 3 - 2t. \end{cases}$ и $\begin{cases} x = 3 - 3t; \\ y = 3 + 4t. \end{cases}$

6) $\begin{cases} x = 1 - 5t; \\ y = 2 + 2t. \end{cases}$ и $\begin{cases} x = 3 + 4t; \\ y = 3 + 6t. \end{cases}$

7) $\begin{cases} x = 2 - t; \\ y = 3 + 2t. \end{cases}$ и $\begin{cases} x = 1 - 8t; \\ y = 3 - 4t. \end{cases}$

8) $\begin{cases} x = 2 - t; \\ y = 3 + 2t. \end{cases}$ и $\begin{cases} x = 1 + 4t; \\ y = 2 + t. \end{cases}$

9) $x - y + 8 = 0$ и $5x - 6y + 3 = 0;$

10) $3x + 4y - 7 = 0$ и $8x + 6y + 4 = 0.$

7. Найти координаты точки, симметричной данной точке относительно данной прямой.

1) $A(4,\ 3)$ и $\begin{cases} x = 1 - 4t; \\ y = 3 + t. \end{cases}$ 2) $A(2,\ 3)$ и $\begin{cases} x = 1 + 4t; \\ y = 3 + 2t. \end{cases}$

3) $A(-4,\ 3)$ и $\begin{cases} x = 1 + 3t; \\ y = 3 - t. \end{cases}$ 4) $A(5,\ 3)$ и $\begin{cases} x = 2 - t; \\ y = 3 + 2t. \end{cases}$

5) $A(4,\ 2)$ и $\begin{cases} x = 1 - 4t; \\ y = 2 - 3t. \end{cases}$ 6) $A(4,\ 5)$ и $\begin{cases} x = 1 + 4t; \\ y = 5 - 2t. \end{cases}$

7) $A(-2,\ 3)$ и $\begin{cases} x = 1 - 3t; \\ y = 3 + 2t. \end{cases}$ 8) $A(-5,\ 3)$ и $\begin{cases} x = 2 + 4t; \\ y = 3 - 2t. \end{cases}$

9) $A(4,\ 4)$ и $\begin{cases} x = 3 + t; \\ y = 4 - t. \end{cases}$ 10) $A(4,\ -3)$ и $\begin{cases} x = -2 - 3t; \\ y = -3 + 2t. \end{cases}$

8. Найти координаты точки, лежащей на данной прямой и находящейся на расстоянии 5 единиц от данной точки.

1) $7x + 3y + 8 = 0$ и $A(-2,\ 3)$;

2) $5x - 4y - 7 = 0$ и $A(2,\ -3)$;

3) $-2x + 5y - 8 = 0$ и $A(-2,\ -3)$;

4) $3x + 5y - 9 = 0$ и $A(2,\ 3)$;

5) $3x + 7y + 8 = 0$ и $A(-3,\ 2)$;

6) $2x + 9y - 7 = 0$ и $A(3,\ -2)$;

7) $4x + 5y - 6 = 0$ и $A(-3,\ -2)$;

8) $3x - 7y + 5 = 0$ и $A(3,\ 2)$;

9) $7x + 7y - 8 = 0$ и $A(4,\ 2)$;

10) $-3x + 3y - 4 = 0$ и $A(2,\ 4)$.

9. Выяснить, лежат ли данные точки в одной полуплоскости относительно данной прямой или в разных полуплоскостях.

1) $A(11,\ 12)$, $B(-13,\ 12)$ и $y = 15x + 7$;

2) $A(13,\ -12)$, $B(-9,\ -10)$ и $y = 1{,}5x + 3$;

3) $A(-9,\ 17)$, $B(-14,\ 12)$ и $y = 3{,}5x + 17$;

4) $A(-7,\ 12)$, $B(14,\ 8)$ и $y = 9x + 11$;

5) $A(9,\ 15)$, $B(-10,\ 12)$ и $y = 17x + 9$;

6) $A(9,\ 16)$, $B(-8,\ 17)$ и $y = 10x + 7$;

7) $A(-11,\ -9),\ B(8,\ 14)$ и $y=8x+13;$

8) $A(-8,\ 13),\ B(-11,\ 15)$ и $y=-8x-13;$

9) $A(-14,\ 7),\ B(-5,\ 19)$ и $y=1{,}5x-9;$

10) $A(15,\ 9),\ B(-11,\ 10)$ и $y=14x+13.$

Распределение задач по вариантам

1 вариант: 1.1, 2.1, 3.1, 4.1, 5.1, 5.6, 5.11, 5.16, 5.21, 5.26, 6.1, 7,1, 8.1, 9.1; 1.6, 2.6, 3.6, 4.6, 5.6, 6.6, 7,6, 8.6, 9.6;
2 вариант: 1.2, 2.2, 3.2, 4.2, 5.2, 5.7, 5.12, 5.17, 5.22, 5.27, 6.2, 7,2, 8.2, 9.2; 1.7, 2.7, 3.1, 4.7, 5.7, 6.7, 7,7, 8.7, 9.7;
3 вариант: 1.3, 2.3, 3.3, 4.3, 5.3, 5.8, 5.13, 5.18, 5.23, 5.28, 6.3, 7,3, 8.3, 9.3; 1.8, 2.8, 3.8, 4.8, 5.8, 6.8, 7,8, 8.8, 9.8;
4 вариант: 1.4, 2.4, 3.4, 4.4, 5.4, 5.9, 5.14, 5.19, 5.24, 5.29, 6.4, 7,4, 8.4, 9.4; 1.9, 2.9, 3.9, 4.9, 5.9, 6.9, 7,9, 8.9, 9.9;
5 вариант: 1.5, 2.5, 3.5, 4.5, 5.5, 5.10, 5.15, 5.20, 5.25, 5.30, 6.5, 7,5, 8.5, 9.5; 1.10, 2.10, 3.10, 4.10, 5.10, 6.10, 7,10, 8.10, 9.10.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 5
ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

Всякий ненулевой вектор, перпендикулярный некоторой плоскости, называется *нормальным вектором* этой плоскости.

Любые два неколлинеарных вектора, параллельные некоторой плоскости, называются *направляющими векторами* этой плоскости.

Всякая плоскость в некоторой ПДСК-3 определяется уравнением первой степени

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

где A, B, C, D – некоторые действительные числа, удовлетворяющие условию $A^2+B^2+C^2\neq 0$.

Всякому уравнению первой степени

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

где A, B, C, D – некоторые действительные числа, удовлетворяющие условию $A^2+B^2+C^2\neq 0$ в некоторой ПДСК-3, соответствует некоторая плоскость.

Это уравнение называется *общим уравнением плоскости*.

В общем уравнении плоскости геометрический смысл знака выражения $Ax+By+Cz+D$ такой же, как и геометрический смысл знака трёхчлена $Ax+By+C$ в уравнении прямой.

Пусть в некоторой ПДСК-3 некоторая плоскость задана своим общим уравнением $Ax+By+Cz+D=0$. Все точки пространства, для которых $Ax+By+Cz+D>0$, лежат в одном полупространстве относительно данной плоскости, а все точки пространства, для которых $Ax+By+Cz+D<0$, лежат в другом полупространстве.

Если $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ – три различные точки, не лежащие на одной прямой, то плоскость α, проходящая через эти точки, определяется уравнением

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0,$$

которое называется *уравнением плоскости по трём точкам*.

Если плоскость α проходит через точки $A(a, 0, 0)$; $B(0, b, 0)$; $C(0, 0, c)$, то эта плоскость определяется уравнением

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,$$

которое называется *уравнением плоскости в отрезках по осям.*

Пусть α, β, γ – направляющие косинусы нормального вектора плоскости α, p – расстояние от плоскости до начала координат. Тогда плоскость определяется уравнением

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0,$$

которое называется *нормальным уравнением плоскости.* Для того чтобы получить из общего уравнения плоскости её нормальное уравнение, необходимо это общее уравнение умножить на множитель

$$\mu=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

который называется *нормирующим множителем.* Знак этого множителя выбирается противоположным знаку D из общего уравнения.

Пусть $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ – направляющие векторы некоторой плоскости α и $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – некоторая фиксированная точка этой плоскости. Тогда плоскость определяется уравнениями

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t + b_1 k; \\ y = y_0 + a_2 t + b_2 k; \\ z = z_0 + a_3 t + b_3 k, \end{cases}$$

которые называются *параметрическими уравнениями плоскости*. Числа t и k – параметры.

Пусть плоскости α_1 и α_2 заданы своими общими уравнениями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ соответственно. Тогда условием параллельности будет

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2};$$

условием перпендикулярности будет

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Углом φ между плоскостями α_1 и α_2 называется угол между их нормальными векторами.

Угол между плоскостями вычисляется по формуле угла между векторами:

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Пусть дана некоторая точка $M(x_1, y_1, z_1)$ и задана некоторая плоскость α своим общим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$. Тогда расстояние от точки M до плоскости α находится по формуле

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Пучком плоскостей называется совокупность всех плоскостей, проходящих через некоторую прямую a.

Для задания пучка достаточно задать любые две плоскости пучка.

Пусть две непараллельные плоскости заданы своими общими уравнениями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Тогда пучок плоскостей, проходящих через линию пересечения данных плоскостей, задаётся уравнением

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + t\left(A_2x + B_2y + C_2z + D_2\right) = 0.$$

При решении задач на плоскость необходимо сначала определиться, какой вид уравнения плоскости следует искать. Также важно освоить приемы перехода от одного вида уравнения плоскости к другому.

Задачи

1. Плоскость задана параметрическими уравнениями. Найти:

а) направляющие векторы плоскости;

б) координаты всех тех точек плоскости, для которых параметры принимают значения из множества $\{-4, 0, 3\}$;

в) значения параметров для точек пересечения плоскости с осями координат;

г) среди данных точек *A*, *B*, *C*, *D* те, которые принадлежат данной плоскости.

1) $\begin{cases} x = 2 - 5t + l; \\ y = 2 + 2t; \\ z = 1 + t - l. \end{cases}$ $A(-3, 4, 2)$, $B(-6, 2, 1)$, $C(2, 2, 1)$, $D(7, 0, 1)$;

2) $\begin{cases} x = 3 + 4t - l; \\ y = 5 - 2t + l; \\ z = 2 + t + l. \end{cases}$ $A(-3, 4, 2)$, $B(7, 3, 3)$, $C(3, 5, 2)$, $D(6, 4, 4)$;

3) $\begin{cases} x = 3 + 7t + 2l; \\ y = 4 - 5t - l; \\ z = 1 + t + 3l. \end{cases}$ $A(5, 3, 4)$, $B(-3, 6, 4)$, $C(3, 4, 1)$, $D(3, 0, 0)$;

4) $\begin{cases} x = 2 - 4t + 2l; \\ y = 3 + 6t - 2l; \\ z = 1 + 2t + l. \end{cases}$ $A(2, 3, 1)$, $B(-2, 3, 9)$, $C(4, 1, 2)$, $D(6, 2, -3)$;

5) $\begin{cases} x = 3 + 5t - 2l; \\ y = 3 - 4t + 2l; \\ z = 1 + t - l. \end{cases}$ $A(8, 4, 2)$, $B(8, -1, 2)$, $C(5, 2, 0)$, $D(3, 3, 1)$;

6) $\begin{cases} x = -2 + 4t + l; \\ y = 5 - 6t - l; \\ z = 1 + t - 2l. \end{cases}$ $A(-3, 7, 4),\ B(-2, 5, 1),\ C(2, -1, 2),\ D(1, 0, 2);$

7) $\begin{cases} x = -5 - 3t + l; \\ y = 7 + 2t - 2l; \\ z = 1 + t + 3l. \end{cases}$ $A(-3, 2, -1),\ B(-8, 9, 2),\ C(-5, 3, 2),\ D(-5, 7, 1);$

8) $\begin{cases} x = 5 - 4t + 2l; \\ y = 6 - 2t - 2l; \\ z = 1 + t - 3l. \end{cases}$ $A(-7, 4, 3),\ B(5, 6, 1),\ C(1, 4, 2),\ D(6, 0, -1);$

9) $\begin{cases} x = -3 + 4t - l; \\ y = 3 - 3t + 2l; \\ z = 1 + t - l. \end{cases}$ $A(-5, 4, 3),\ B(-3, 3, 1),\ C(2, 2, 2),\ D(1, 0, 2);$

10) $\begin{cases} x = -2 - 5t + l; \\ y = -3 + 7t - l; \\ z = 1 + t - 2l. \end{cases}$ $A(-2, -3, 1),\ B(-7, 4, 2),\ C(2, 1, 2),\ D(3, 1, 3).$

2. Даны точка *A* и векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найти параметрические уравнения плоскости:

а) проходящей через точку *A*, параллельно векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

б) проходящей через точку *A*, перпендикулярно вектору $\vec{a}$.

1) $A(1, 2, 3),\ \vec{a}(1, 4, 5),\ \vec{b}(-3, 4, 1);$

2) $A(-2, 3, 3),\ \vec{a}(3, 2, -5),\ \vec{b}(3, -2, 10);$

3) $A(5, -3, 4),\ \vec{a}(2, 3, 5),\ \vec{b}(-1, 7, 1);$

4) $A(2, -4, 3),\ \vec{a}(7, 2, 1),\ \vec{b}(5, -4, -1);$

5) $A(4, 5, 2),\ \vec{a}(1, 2, -3),\ \vec{b}(2, -4, 1);$

6) $A(3, 2, 1),\ \vec{a}(3, 1, -1),\ \vec{b}(-2, -3, 1);$

7) $A(3, -2, 3),\ \vec{a}(1, 4, 5),\ \vec{b}(-3, 4, 1);$

8) $A(4, 3, -2),\ \vec{a}(1, -2, -1),\ \vec{b}(-3, 1, 3);$

9) $A(2, 5, 1),\ \vec{a}(2, -2, 4),\ \vec{b}(3, -3, 2);$

10) $A(4, 1, 2),\ \vec{a}(2, -2, 4),\ \vec{b}(-2, 4, 5).$

3. Даны точка *A* и векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найти общее уравнение плоскости:

а) проходящей через точку *A*, перпендикулярно вектору $\vec{a}$;

б) проходящей через точку *A*, параллельно векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

1) $A(4,5,2)$, $\vec{a}(1,2,-3)$, $\vec{b}(2,-4,1)$;

2) $A(3,2,1)$, $\vec{a}(3,1,-1)$, $\vec{b}(-2,-3,1)$;

3) $A(3,-2,3)$, $\vec{a}(1,4,5)$, $\vec{b}(-3,4,1)$;

4) $A(4,3,-2)$, $\vec{a}(1,-2,-1)$, $\vec{b}(-3,1,3)$;

5) $A(2,5,1)$, $\vec{a}(2,-2,4)$, $\vec{b}(3,-3,2)$;

6) $A(4,1,2)$, $\vec{a}(2,-2,4)$, $\vec{b}(-2,4,5)$;

7) $A(1,2,3)$, $\vec{a}(1,4,5)$, $\vec{b}(-3,4,1)$;

8) $A(-2,3,3)$, $\vec{a}(3,2,-5)$, $\vec{b}(3,-2,10)$;

9) $A(5,-3,4)$, $\vec{a}(2,3,5)$, $\vec{b}(-1,7,1)$;

10) $A(2,-4,3)$, $\vec{a}(7,2,1)$, $\vec{b}(5,-4,-1)$.

4. Даны точки *A*, *B* и *C*. Найти:

а) параметрические уравнения плоскости, проходящей через данные точки;

б) общее уравнение плоскости, проходящей через данные точки.

1) $A(1,4,-2)$, $B(2,3,-2)$, $C(1,3,4)$;

2) $A(1,4,-2)$, $B(2,3,-2)$, $C(1,3,4)$;

3) $A(1,4,-2)$, $B(2,3,-2)$, $C(1,3,4)$;

4) $A(1,4,-2)$, $B(2,3,-2)$, $C(1,3,4)$;

5) $A(1,4,-2)$, $B(2,3,-2)$, $C(1,3,4)$;

6) $A(1,4,-2)$, $B(2,3,-2)$, $C(1,3,4)$;

7) $A(1,4,-2)$, $B(2,3,-2)$, $C(1,3,4)$;

8) $A(1,4,-2)$, $B(2,3,-2)$, $C(1,3,4)$;

9) $A(1,4,-2)$, $B(2,3,-2)$, $C(1,3,4)$;

10) $A(1,4,-2)$, $B(2,3,-2)$, $C(1,3,4)$.

5. Тетраэдр *ABCD* задан своими вершинами. Найти:

а) общие уравнения граней;

б) параметрические уравнения высот;

в) объем тетраэдра.

1) $A(12,5,4)$, $B(2,-10,4)$, $C(5,8,3)$, $D(1,2,3)$;

2) $A(8,6,1)$, $B(12,6,3)$, $C(8,8,2)$, $D(1,3,2)$;

3) $A(10,4,-2)$, $B(5,-10,-1)$, $C(6,8,4)$, $D(2,1,3)$;

4) $A(12,5,3)$, $B(8,-8,2)$, $C(5,7,3)$, $D(2,3,1)$;

5) $A(-6,6,7)$, $B(4,10,2)$, $C(15,8,1)$, $D(3,1,2)$;

6) $A(10,5,2)$, $B(6,-4,3)$, $C(7,8,2)$, $D(3,2,1)$;

7) $A(10,3,-2)$, $B(12,4,2)$, $C(8,10,3)$, $D(1,2,2)$;

8) $A(-5,5,5)$, $B(-12,-10,1)$, $C(6,-4,2)$, $D(1,1,3)$;

9) $A(-8,4,5)$, $B(5,-10,1)$, $C(4,8,5)$, $D(2,3,3)$;

10) $A(11,6,2)$, $B(4,-8,2)$, $C(3,7,6)$, $D(3,1,3)$.

6. Выяснить взаимное расположение плоскостей: параллельны, перпендикулярны, просто пересекаются, совпадают.

1) $3x+4y+z-7=0$ и $8x-6y-z+4=0$;

2) $-4x+3y+2z-7=0$ и $8x-6y-4z+4=0$;

3) $3x+4y-z-7=0$ и $8x+6y+z+4=0$;

4) $3x-4y-z-7=0$ и $-6x+8y+2z+14=0$;

5) $5x+y+z-7=0$ и $2x-10y+4=0$;

6) $x+4y-z-9=0$ и $-2x-8y+2z+5=0$;

7) $x-y+z+8=0$ и $5x-6y-z+3=0$;

8) $x+4y-2z-2=0$ и $-2x-8y+4z+4=0$;

9) $7x-4y-7=0$ и $4x+7y-z+4=0$;

10) $3x+4y-3z-7=0$ и $8x+6y-6z+4=0$;

11) $\begin{cases} x=2-t+l; \\ y=3+2t-l; \\ z=1+t-l. \end{cases}$ и $\begin{cases} x=1-4t+2l; \\ y=3+8t-2l; \\ z=1+t-2l. \end{cases}$

12) $\begin{cases} x=2+t+l; \\ y=3-2t-l; \\ z=1+t+2l. \end{cases}$ и $\begin{cases} x=3-3t-l; \\ y=3+4t+2l; \\ z=1+t-3l. \end{cases}$

13) $\begin{cases} x=2+2t+2l; \\ y=3+2t-l; \\ z=1+t-l. \end{cases}$ и $\begin{cases} x=1-4t-l; \\ y=2-4t+l; \\ z=1+t-3l. \end{cases}$

14) $\begin{cases} x=2-2t-2l; \\ y=3+3t+2l; \\ z=1+t+2l. \end{cases}$ и $\begin{cases} x=1-3t+3l; \\ y=3-2t-2l; \\ z=1+t+4l. \end{cases}$

15) $\begin{cases} x = 2 - 3t - 3l; \\ y = 3 + 2t - 2l; \\ z = 1 + t + 2l. \end{cases}$ и $\begin{cases} x = 1 + 6t - l; \\ y = 3 - 4t + l; \\ z = 1 + t - l. \end{cases}$

16) $\begin{cases} x = 1 - 5t - 2l; \\ y = 2 + 2t + 2l; \\ z = 1 + t - 2l. \end{cases}$ и $\begin{cases} x = 3 + 4t - 2l; \\ y = 3 + 6t + 3l; \\ z = 1 + t - 3l. \end{cases}$

17) $\begin{cases} x = 2 - t + 5l; \\ y = 2t + 3l; \\ z = 1 + 3t. \end{cases}$ и $\begin{cases} x = 1 - 4t + 4l; \\ y = 2 + 8t; \\ z = 1 + 2l. \end{cases}$

18) $\begin{cases} x = 2 - t - 2l; \\ y = 3 + 2t + 3l; \\ z = 1 + t - 2l. \end{cases}$ и $\begin{cases} x = 1 - 8t - 3l; \\ y = 3 - 4t + 4l; \\ z = 1 + 3t - l. \end{cases}$

19) $\begin{cases} x = 1 - 3t + 2l; \\ y = 2 + 2t + 2l; \\ z = 1 + t + 3l. \end{cases}$ и $\begin{cases} x = 1 - 6t + 3l; \\ y = 3 + 4t + 5; \\ z = 1 + t + l. \end{cases}$

20) $\begin{cases} x = 2 - t - 4; \\ y = 3 + 2t - 2l; \\ z = 1 + 2t - l. \end{cases}$ и $\begin{cases} x = 1 + 4t - 2l; \\ y = 2 + t + 2l; \\ z = 1 + 2t - l. \end{cases}$

7. Найти угол между плоскостями.

1) $x - y + 5z - 8 = 0$ и $5x - 6y + 4z + 3 = 0$;

2) $3x + 4y + 2z - 7 = 0$ и $8x + 6y - 8z + 6 = 0$;

3) $\begin{cases} x = 2 - t + 3l; \\ y = 3 + 2t - l; \\ z = 2 + t - 2l. \end{cases}$ и $\begin{cases} x = 1 - 8t + 2l; \\ y = 3 - 4t + l; \\ z = 2 + t - 2l. \end{cases}$

4) $\begin{cases} x = 2 - t - 2l; \\ y = 3 + 2t + l; \\ z = 2 + t - l. \end{cases}$ и $\begin{cases} x = 1 + 4t + 2l; \\ y = 2 + t - 2l; \\ z = 2 + t + 2l. \end{cases}$

5) $\begin{cases} x = 2 - t + l; \\ y = 3 + 2t + 3l; \\ z = 2 + t - 2l. \end{cases}$ и $4x - 5y + 2z - 7 = 0$;

6) $\begin{cases} x = 2 + t + 2l; \\ y = 3 - 2t - 2l; \\ z = 2 + t + 2l. \end{cases}$ и $3x + 2y + 3z - 2 = 0;$

7) $\begin{cases} x = 2 - 7t - l; \\ y = 3 + 5t + l; \\ z = 2 + t - 3l. \end{cases}$ и $3x + 7y + z - 1 = 0;$

8) $\begin{cases} x = 1 - 5t + 2l; \\ y = 4 + 7t + 3l; \\ z = 2 + t + l. \end{cases}$ и $x + 2y + 2z - 3 = 0;$

9) $\begin{cases} x = 2 + t - l; \\ y = 3 - 2t + 2l; \\ z = 2 + t + 3l. \end{cases}$ и $\begin{cases} x = 3 - 3t - l; \\ y = 3 + 4t + l; \\ z = 2 + t + 2l. \end{cases}$

10) $\begin{cases} x = 1 - 5t + l; \\ y = 2 + 2t - 4l; \\ z = 2 + t. \end{cases}$ и $\begin{cases} x = 3 + 4t - l; \\ y = 3 + 6t + l; \\ z = 2 + t + l. \end{cases}$

8. Найти координаты точки, симметричной данной точке относительно данной плоскости.

1) $A(4, 3, 2)$ и $\begin{cases} x = 1 - 4t + l; \\ y = 3 + t - l; \\ z = 2 + t - 2l. \end{cases}$ 2) $A(2, 3, 1)$ и $\begin{cases} x = 1 + 4t - l; \\ y = 3 + 2t + l; \\ z = 2 + t - l. \end{cases}$

3) $A(-4, 3, 1)$ и $\begin{cases} x = 1 + 3t + l; \\ y = 3 - t - l; \\ z = 2 + t - l. \end{cases}$ 4) $A(5, 3, 1)$ и $\begin{cases} x = 2 - t - l; \\ y = 3 + 2t + l; \\ z = 2 + t - l. \end{cases}$

5) $A(4, 2, 2)$ и $\begin{cases} x = 1 - 4t + l; \\ y = 2 - 3t - l; \\ z = 2 + t - l. \end{cases}$ 6) $A(4, 5, 1)$ и $\begin{cases} x = 1 + 4t - l; \\ y = 5 - 2t + l; \\ z = 2 + t + l. \end{cases}$

7) $A(-2, 3, 1)$ и $\begin{cases} x = 1 - 3t + l; \\ y = 3 + 2t + l; \\ z = 2 + t - 2l. \end{cases}$ 8) $A(-5, 3, 2)$ и $\begin{cases} x = 2 + 4t - l; \\ y = 3 - 2t - l; \\ z = 2 + t - l. \end{cases}$

9) $A(4,4,2)$ и $\begin{cases} x = 3 + t + l; \\ y = 4 - t - l; \\ z = 2 + t - l. \end{cases}$ 10) $A(4,-3,1)$ и $\begin{cases} x = -2 - 3t - l; \\ y = -3 + 2t - l; \\ z = 2 + t + l. \end{cases}$

9. Выяснить, лежат ли данные точки в одном полупространстве относительно данной плоскости или в разных полупространствах.

1) $A(11,12,11)$, $B(-13,12,12)$ и $x + 2y - z - 7 = 0$;

2) $A(13,-12,11)$, $B(-9,-10,12)$ и $2x - y + 4z - 2 = 0$;

3) $A(-9,17,11)$, $B(-14,12,11)$ и $x - 4y + 5z - 2 = 0$;

4) $A(-7,12,11)$, $B(14,8,10)$ и $2x - y + 4z + 5 = 0$;

5) $A(9,15,10)$, $B(-10,12,10)$ и $3x + 2y - 4z + 5 = 0$;

6) $A(9,16,11)$, $B(-8,17,10)$ и $-x + 3y - z + 7 = 0$;

7) $A(-11,-9,10)$, $B(8,14,11)$ и $x + 2y - 3z + 7 = 0$;

8) $A(-8,13,10)$, $B(-11,15,10)$ и $2x - y + 5z + 4 = 0$;

9) $A(-14,7,10)$, $B(-5,19,10)$ и $x - y + 7z - 9 = 0$;

10) $A(15,9,11)$, $B(-11,10,12)$ и $-3x + y - 3z + 3 = 0$.

Распределение задач по вариантам

1 вариант: 1.1, 2.1, 3.1, 4.1, 5.1, 5.6, 5.11, 5.16, 6.1, 7,1, 8.1, 9.1; 1.6, 2.6, 3.6, 4.6, 5.6, 6.6, 7,6, 8.6, 9.6;

2 вариант: 1.2, 2.2, 3.2, 4.2, 5.2, 5.7, 5.12, 5.17, 6.2, 7,2, 8.2, 9.2; 1.7, 2.7, 3.1, 4.7, 5.7, 6.7, 7,7, 8.7, 9.7;

3 вариант: 1.3, 2.3, 3.3, 4.3, 5.3, 5.8, 5.13, 5.18, 6.3, 7,3, 8.3, 9.3; 1.8, 2.8, 3.8, 4.8, 5.8, 6.8, 7,8, 8.8, 9.8;

4 вариант: 1.4, 2.4, 3.4, 4.4, 5.4, 5.9, 5.14, 5.19, 6.4, 7,4, 8.4, 9.4; 1.9, 2.9, 3.9, 4.9, 5.9, 6.9, 7,9, 8.9, 9.9;

5 вариант: 1.5, 2.5, 3.5, 4.5, 5.5, 5.10, 5.15, 5.20, 6.5, 7,5, 8.5, 9.5; 1.10, 2.10, 3.10, 4.10, 5.10, 6.10, 7,10, 8.10, 9.10.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 6
ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

В пространстве мы будем рассматривать прямую как линию пересечения двух плоскостей.

Пусть даны две различные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Прямая, проходящая через эти точки, задаётся уравнениями

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1},$$

которые называются *уравнениями прямой по двум точкам в пространстве.*

Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – некоторая фиксированная точка прямой a, а $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ – её направляющий вектор. Тогда прямая a может быть задана уравнениями

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t, \end{cases}$$

которые называются *параметрическими уравнениями прямой в пространстве,* и уравнениями

$$\frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2}=\frac{z-z_0}{a_3},$$

которые называются *каноническими уравнениями прямой в пространстве.*

Если некоторая прямая a является линией пересечения двух плоскостей α_1 и α_2, заданных соответственно своими общими уравнениями $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$ то она может быть задана системой уравнений

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases}$$

Иногда эти уравнения называют *общими уравнениями прямой в пространстве.*

Допустим, что некоторая прямая a задана как линия пресечения двух плоскостей, т. е. системой

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases}$$

Пусть (x_0, y_0, z_0) – одно из решений этой системы. Тогда точка $M(x_0, y_0, z_0)$ принадлежит указанной прямой. В качестве же направляющего вектора прямой a можно взять векторное произведение нормальных векторов $\vec{n}_1(A_1, B_1, C_1)$ и $\vec{n}_2(A_2, B_2, C_2)$. Тогда канонические уравнения прямой a можно записать в виде

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}} = \frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

Пусть две прямые – a_1 и a_2 – имеют направляющие векторы соответственно $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$. Тогда угол между прямыми равен углу между их направляющими векторами

$$\cos\alpha = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.$$

Условие параллельности:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}.$$

Условие перпендикулярности:

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0.$$

Пусть $\vec{n}(A, B, C)$ – нормальный вектор некоторой плоскости, а вектор $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ – направляющий вектор некоторой прямой.

Если эти плоскость и прямая параллельны, то указанные векторы перпендикулярны, поэтому условие параллельности прямой и плоскости в пространстве имеет вид:

$$Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 = 0.$$

Если же плоскость и прямая перпендикулярны, то указанные векторы коллинеарны, и поэтому условие перпендикулярности прямой и плоскости в пространстве имеет вид:

$$\frac{A}{a_1} = \frac{B}{a_2} = \frac{C}{a_3}.$$

Если β – угол между нормальным вектором плоскости и направляющим вектором прямой, то $\varphi = \frac{\pi}{2} - \beta$ – угол между прямой и плоскостью. Следовательно, угол между прямой и плоскостью вычисляется по формуле

$$\sin\varphi = \frac{Aa_1 + Ba_2 + Ca_3}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}.$$

Пусть некоторая прямая a задана своими каноническими уравнениями: $\dfrac{x-x_0}{a_1}=\dfrac{y-y_0}{a_2}=\dfrac{z-z_0}{a_3}$ и пусть дана некоторая точка $M\left(x_1, y_1, z_1\right)$. Тогда расстояние от точки M до прямой a находится по формуле

$$d=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z_1-z_0 & x_1-x_0 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}.$$

Пусть, кроме заданной выше прямой a, ещё одна прямая b задана своими каноническими уравнениями: $\dfrac{x-x_1}{b_1}=\dfrac{y-y_1}{b_2}=\dfrac{z-z_1}{b_3}$. Тогда расстояние между этими прямыми находится по формуле

$$d=\frac{\left|\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \end{vmatrix}\right|}{\sqrt{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2}}.$$

Задачи

1. Составить параметрические и канонические уравнения прямой:

а) проходящей через точку A, параллельно вектору $\vec{n}$;

б) проходящей через точку A и точку B;

в) проходящей через начало координат, параллельно вектору $\vec{m}$;

г) проходящей через точку C и начало координат;

д) проходящей через точку A, параллельно координатной оси OX;

е) проходящей через начало координат, параллельно координатной оси OY;

ж) проходящей через точку B, параллельно координатной оси OZ.

1) $A(1,-2,4)$; $B(3,1,-2)$; $C(1,0,2)$; $\vec{n}(1,2,-1)$; $\vec{m}(2,1,0)$;

2) $A(2,-1,-2)$; $B(1,0,4)$; $C(2,1,0)$; $\vec{n}(2,1,-1)$; $\vec{m}(3,2,1)$;

3) $A(-1,2,-2)$; $B(2,1,2)$; $C(2,0,1)$; $\vec{n}(2,-1,2)$; $\vec{m}(1,-2,1)$;

4) $A(-2,1,3)$; $B(2,0,1)$; $C(0,2,1)$; $\vec{n}(-1,2,2)$; $\vec{m}(3,1,2)$;

5) $A(3,-2,0)$; $B(2,1,2)$; $C(2,1,0)$; $\vec{n}(1,-2,3)$; $\vec{m}(3,1,-2)$;

6) $A(1,2,3)$; $B(3,2,1)$; $C(0,-3,2)$; $\vec{n}(-1,-2,0)$; $\vec{m}(1,4,-1)$;

7) $A(1,2,2)$; $B(2,1,-3)$; $C(-1,0,-2)$; $\vec{n}(1,3,-1)$; $\vec{m}(2,3,-2)$;

8) $A(1,2,-3)$; $B(2,1,-2)$; $C(1,3,0)$; $\vec{n}(-1,-3,0)$; $\vec{m}(-2,0,3)$;

9) $A(1,-2,4)$; $B(3,1,-2)$; $C(1,0,2)$; $\vec{n}(1,2,-1)$; $\vec{m}(2,1,0)$;

10) $A(1,2,3)$; $B(2,-1,-2)$; $C(1,3,0)$; $\vec{n}(1,1,4)$; $\vec{m}(-2,2,1)$.

2. Прямая задана параметрическими уравнениями. Найти:

а) направляющий вектор прямой;

б) координаты точек прямой, для которых параметр принимает значения –2, 0, 3, 10;

в) среди данных точек *A*, *B*, *C*, *D* те, которые принадлежат прямой.

1) $\begin{cases} x = 2-5t; \\ y = 2+2t; \\ z = 1-5t. \end{cases}$ $A(-3,4,-4)$, $B(-6,2,1)$, $C(2,2,1)$, $D(7,0,6)$;

2) $\begin{cases} x = 3+4t; \\ y = 5-2t; \\ z = 1-5t. \end{cases}$ $A(-1,7,6)$, $B(-6,2,7)$, $C(3,5,1)$, $D(7,0,1)$;

3) $\begin{cases} x = 3+7t; \\ y = 4-5t; \\ z = -2+3t. \end{cases}$ $A(-4,-1,4)$, $B(6,4,2)$, $C(3,4,-2)$, $D(3,0,4)$;

4) $\begin{cases} x = 2-4t; \\ y = 3+6t; \\ z = 4-2t. \end{cases}$ $A(2,3,4)$, $B(-2,9,2)$, $C(2,0,6)$, $D(6,-3,6)$;

5) $\begin{cases} x = 3+5t; \\ y = 3-4t; \\ z = -1+2t. \end{cases}$ $A(8,4,5)$, $B(8,-1,1)$, $C(5,0,3)$, $D(3,3,-1)$;

6) $\begin{cases} x = -2+4t; \\ y = 5-6t; \\ z = 3-t. \end{cases}$ $A(-3,7,0)$, $B(-2,5,3)$, $C(2,-1,2)$, $D(2,0,2)$;

7) $\begin{cases} x = -5-3t; \\ y = 7+2t; \\ z = 5+t. \end{cases}$ $A(-3,2,1)$, $B(-8,9,6)$, $C(-5,2,3)$, $D(-5,7,5)$;

8) $\begin{cases} x = 5 - 4t; \\ y = 6 - 2t; \\ z = -3 - 3t. \end{cases}$ $A(-7, 4, 3)$, $B(5, 6, -3)$, $C(3, 5, -3)$, $D(6, -1, 4)$;

9) $\begin{cases} x = -3 + 4t; \\ y = 3 - 3t; \\ z = 4 - 5t. \end{cases}$ $A(-5, 4, 3)$, $B(-3, 3, 4)$, $C(1, 0, -1)$, $D(1, 0, 4)$;

10) $\begin{cases} x = -2 - 5t; \\ y = -3 + 7t; \\ z = 1 + 5t. \end{cases}$ $A(-2, -3, 1)$, $B(-7, 4, 6)$, $C(2, 2, 2)$, $D(3, -10, -3)$.

3. Прямая проходит через точки A и B. Представить данную прямую как линию пересечения плоскостей:

а) параллельных координатным осям OX и OY;

б) параллельных координатным осям OX и OZ;

в) параллельных координатным осям OY и OZ.

1) $A(1, -2, 4)$, $B(12, 13, 10)$;
2) $A(2, 3, 4)$, $B(11, 10, 13)$;
3) $A(1, 3, -2)$, $B(12, 12, 11)$;
4) $A(3, -2, 1)$, $B(10, 12, 12)$;
5) $A(1, -3, 1)$, $B(12, 11, 13)$;
6) $A(2, -2, 2)$, $B(12, 13, 13)$;
7) $A(-2, -1, 3)$, $B(12, 11, 11)$;
8) $A(2, -1, 3)$, $B(11, 12, 13)$;
9) $A(3, -2, 1)$, $B(10, 13, 12)$;
10) $A(3, -1, 2)$, $B(13, 11, 10)$.

4. Дана прямая и плоскость. Найти:

а) проекцию прямой на плоскость;

б) канонические уравнения прямой, перпендикулярной плоскости и проходящей через точку пересечения этой плоскости с данной прямой.

1) $\begin{cases} x = -2 + 4t; \\ y = 5 - 6t; \\ z = 3 - t. \end{cases}$ $3x + 2y - z + 4 = 0$;

2) $\begin{cases} x = -5 - 3t; \\ y = 7 + 2t; \\ z = 5 + t. \end{cases}$ $-2x + 4y - 2z + 3 = 0$;

3) $\begin{cases} x = 5 - 4t; \\ y = 6 - 2t; \\ z = -3 - 3t. \end{cases}$ $2x - 3y + 4z - 2 = 0$;

4) $\begin{cases} x = -3 + 4t; \\ y = 3 - 3t; \\ z = 4 - 5t. \end{cases}$ $\quad 4x - y + 2z + 1 = 0;$

5) $\begin{cases} x = -2 - 5t; \\ y = -3 + 7t; \\ z = 1 + 5t. \end{cases}$ $\quad -3x + 2y - 3z + 5 = 0;$

6) $\begin{cases} x = 2 - 5t; \\ y = 2 + 2t; \\ z = 1 - 5t. \end{cases}$ $\quad 2x - 3y + 4z + 3 = 0;$

7) $\begin{cases} x = 3 + 4t; \\ y = 5 - 2t; \\ z = 1 - 5t. \end{cases}$ $\quad -2x - 7y + 4z + 1 = 0;$

8) $\begin{cases} x = 3 + 7t; \\ y = 4 - 5t; \\ z = -2 + 3t. \end{cases}$ $\quad -2x + 4y + 2z + 5 = 0;$

9) $\begin{cases} x = 2 - 4t; \\ y = 3 + 6t; \\ z = 4 - 2t. \end{cases}$ $\quad 3x - 2y + 3z + 1 = 0;$

10) $\begin{cases} x = 3 + 5t; \\ y = 3 - 4t; \\ z = -1 + 2t. \end{cases}$ $\quad 2x - 3y + z - 7 = 0.$

5. Выяснить взаимное расположение прямых в пространстве (параллельны, перпендикулярны, просто пересекаются, скрещиваются). В случае пересечения найти их общую точку, а в противном случае найти расстояние между ними.

1) $\begin{cases} x = 12 - 5t; \\ y = 12 + 2t; \\ z = 11 - 5t. \end{cases}$ $\quad \begin{cases} 2x - 3y + 4z + 3 = 0; \\ x - 2y + 3z - 2 = 0. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = 13 + 4t; \\ y = 15 - 2t; \\ z = 11 - 5t. \end{cases}$ $\quad \begin{cases} -2x - 7y + 4z + 1 = 0; \\ 2x - y + z + 1 = 0. \end{cases}$

3) $\begin{cases} x = 13 + 7t; \\ y = 14 - 5t; \\ z = -12 + 3t. \end{cases}$ $\begin{cases} -2x + 4y + 2z + 5 = 0; \\ 3x - y + 2z - 1 = 0. \end{cases}$

4) $\begin{cases} x = 12 - 4t; \\ y = 13 + 6t; \\ z = 14 - 2t. \end{cases}$ $\begin{cases} 3x - 2y + 3z + 1 = 0; \\ 2x - 2y + z + 1 = 0. \end{cases}$

5) $\begin{cases} x = 13 + 5t; \\ y = 13 - 4t; \\ z = -11 + 2t. \end{cases}$ $\begin{cases} 2x - 3y + z - 7 = 0; \\ 3x + y - 3z - 1 = 0. \end{cases}$

6) $\begin{cases} x = -12 + 4t; \\ y = 15 - 6t; \\ z = 13 - t. \end{cases}$ $\begin{cases} 3x + 2y - z + 4 = 0; \\ 2x - 2y + z + 2 = 0. \end{cases}$

7) $\begin{cases} x = -15 - 3t; \\ y = 17 + 2t; \\ z = 15 + t. \end{cases}$ $\begin{cases} -2x + 4y - 2z + 3 = 0; \\ x + 2y - 3z + 1 = 0. \end{cases}$

8) $\begin{cases} x = 15 - 4t; \\ y = 16 - 2t; \\ z = -13 - 3t. \end{cases}$ $\begin{cases} 2x - 3y + 4z - 2 = 0; \\ x + 2y + z - 3 = 0. \end{cases}$

9) $\begin{cases} x = -13 + 4t; \\ y = 13 - 3t; \\ z = 14 - 5t. \end{cases}$ $\begin{cases} 4x - y + 2z + 1 = 0; \\ 2x - y - 3z - 4 = 0. \end{cases}$

10) $\begin{cases} x = -12 - 5t; \\ y = -13 + 7t; \\ z = 11 + 5t. \end{cases}$ $\begin{cases} -3x + 2y - 3z + 5 = 0; \\ x + 4y - 3z + 2 = 0. \end{cases}$

6. Выяснить взаимное расположение прямой и плоскости (параллельны, перпендикулярны, просто пересекаются, прямая лежит в плоскости). В случае, если прямая параллельна плоскости, найти расстояние между ними, а в случае, если они пересекаются, найти их точку пересечения.

1) $\dfrac{x-3}{-16} = \dfrac{y-4}{12} = \dfrac{z+1}{2}$ и $8x - 6y - z + 4 = 0$;

2) $\dfrac{x+2}{-4} = \dfrac{y-3}{3} = \dfrac{z+2}{2}$ и $8x - 6y - 4z + 4 = 0$;

3) $\dfrac{x-1}{8}=\dfrac{y+2}{6}=\dfrac{z-1}{1}$ и $8x+6y+z+4=0$;

4) $\dfrac{x+2}{-12}=\dfrac{y}{16}=\dfrac{z-2}{4}$ и $-6x+8y+2z+14=0$;

5) $\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-4}{5}=\dfrac{z-1}{-2}$ и $2x-10y+4z+5=0$;

6) $\dfrac{x}{-4}=\dfrac{y+5}{-16}=\dfrac{z}{4}$ и $-2x-8y+2z+5=0$;

7) $\dfrac{x+1}{-10}=\dfrac{y+4}{12}=\dfrac{z-3}{2}$ и $5x-6y-z+3=0$;

8) $\dfrac{x+3}{4}=\dfrac{y-2}{16}=\dfrac{z+2}{-8}$ и $-2x-8y+4z+4=0$;

9) $\dfrac{x-3}{-8}=\dfrac{y-4}{-14}=\dfrac{z+1}{2}$ и $4x+7y-z+4=0$;

10) $\dfrac{x+1}{-4}=\dfrac{y+4}{-3}=\dfrac{z-1}{3}$ и $8x+6y-6z+4=0$;

11) $\begin{cases} x=2-t; \\ y=3+2t; \\ z=1+t. \end{cases}$ и $\begin{cases} x=1-4t+2l; \\ y=3+8t-2l; \\ z=1+t-2l. \end{cases}$

12) $\begin{cases} x=2+t; \\ y=3-2t; \\ z=1+t. \end{cases}$ и $\begin{cases} x=3-3t-l; \\ y=3+4t+2l; \\ z=1+t-3l. \end{cases}$

13) $\begin{cases} x=2+2t; \\ y=3+2t; \\ z=1+t. \end{cases}$ и $\begin{cases} x=1-4t-l; \\ y=2-4t+l; \\ z=1+t-3l. \end{cases}$

14) $\begin{cases} x=2-2t; \\ y=3+3t; \\ z=1+t. \end{cases}$ и $\begin{cases} x=1-3t+3l; \\ y=3-2t-2l; \\ z=1+t+4l. \end{cases}$

15) $\begin{cases} x=2-3t; \\ y=3+2t; \\ z=1+t. \end{cases}$ и $\begin{cases} x=1+6t-l; \\ y=3-4t+l; \\ z=1+t-l. \end{cases}$

16) $\begin{cases} x=1-5t; \\ y=2+2t; \\ z=1+t. \end{cases}$ и $\begin{cases} x=3+4t-2l; \\ y=3+6t+3l; \\ z=1+t-3l. \end{cases}$

17) $\begin{cases} x = 2 - t; \\ y = 2t; \\ z = 1 + 3t. \end{cases}$ и $\begin{cases} x = 1 - 4t + 4l; \\ y = 2 + 8t; \\ z = 1 + 2l. \end{cases}$

18) $\begin{cases} x = 2 - t; \\ y = 3 + 2t; \\ z = 1 + t. \end{cases}$ и $\begin{cases} x = 1 - 8t - 3l; \\ y = 3 - 4t + 4l; \\ z = 1 + 3t - l. \end{cases}$

19) $\begin{cases} x = 1 - 3t; \\ y = 2 + 2t; \\ z = 1 + t. \end{cases}$ и $\begin{cases} x = 1 - 6t + 3l; \\ y = 3 + 4t + 5; \\ z = 1 + t + l. \end{cases}$

20) $\begin{cases} x = 2 - t; \\ y = 3 + 2t; \\ z = 1 + 2t. \end{cases}$ и $\begin{cases} x = 1 + 4t - 2l; \\ y = 2 + t + 2l; \\ z = 1 + 2t - l. \end{cases}$

7. Найти координаты точки, симметричной данной точке относительно данной прямой:

1) $A(4, 3, 2)$ и $\begin{cases} x = 1 - 4t; \\ y = 3 + t; \\ z = 4 + 2t. \end{cases}$

2) $A(2, 3, -2)$ и $\begin{cases} x = 1 + 4t; \\ y = 3 + 2t; \\ z = 3 + 4t. \end{cases}$

3) $A(-4, 3, 2)$ и $\begin{cases} x = 1 + 3t; \\ y = 3 - t; \\ z = -2 - 2t. \end{cases}$

4) $A(5, 3, -3)$ и $\begin{cases} x = 2 - t; \\ y = 3 + 2t; \\ z = -2 + 3t. \end{cases}$

5) $A(4, 2, -1)$ и $\begin{cases} x = 1 - 4t; \\ y = 2 - 3t; \\ z = -4 + t. \end{cases}$

6) $A(4, 5, 2)$ и $\begin{cases} x = 1 + 4t; \\ y = 5 - 2t; \\ z = 7t. \end{cases}$

7) $A(-2, 3, -3)$ и $\begin{cases} x = 1 - 3t; \\ y = 3 + 2t; \\ z = 4t. \end{cases}$

8) $A(-5, 3, 2)$ и $\begin{cases} x = 2 + 4t; \\ y = 3 - 2t; \\ z = -1 + 2t. \end{cases}$

9) $A(4, 4, -1)$ и $\begin{cases} x = 3 + t; \\ y = 4 - t; \\ z = 1 - 2t. \end{cases}$

10) $A(4, -3, 1)$ и $\begin{cases} x = -2 - 3t; \\ y = -3 + 2t; \\ z = -5t. \end{cases}$

Распределение задач по вариантам

1 вариант: 1.1, 1.6, 2.1, 2.6, 3.1, 3.6, 4.1, 4.6, 5.1, 5.6, 6.1, 6.6, 6.11, 6.16, 7,1, 7.6;

2 вариант: 1.2, 1.7, 2.2, 2.7, 3.2, 3.7, 4.2, 4.7, 5.2, 5.7, 6.2, 6.7, 6.12, 6.17, 7,2, 7.7;

3 вариант: 1.3, 1.8, 2.3, 2.8, 3.3, 3.8, 4.3, , 4.8, 5.3, 5.8, 6.3, 6.8, 6.13, 6.18, 7,3, 7.8;

4 вариант: 1.4, 1.9, 2.4, 2.9, 3.4, 3.9, 4.4, 4.9, 5.4, 5.9, 6.4, 6.9, 6.14, 6.19, 7,4, 7.9;

5 вариант: 1.5, 1.10, 2.5, 2.10, 3.5, 3.10, 4.5, 4.10, 5.5, 5.10, 6.5, 6.10, 6.15, 6.20, 7,5, 7.10.

ЛИТЕРАТУРА

1. Цубербиллер, О. Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии / О. Н. Цубербиллер. – М. : Наука, 1968. – 336 с.

2. Бурдун, А. А. Сборник задач по алгебре и аналитической геометрии / А.А. Бурдун [и др.]. – Минск. : «Университетское», 1989. – 286 с.

3. Моденов, П. Р. Сборник задач по аналитической геометрии / П. Р. Моденов, А. С. Пархоменко. – М. : Наука, 1976. – 384 с.

4. Рябушко, А. П. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике / А. П. Рябушко [и др.]. – Минск : Вышэйшая школа, 1990. – 269 с.

5. Александров, П. С. Лекции по аналитической геометрии : учеб. пособие для вузов / П. С. Александров. – М. : Наука, 1968. – 911 с.

6. Милованов, М. В. Алгебра и аналитическая геометрия : в 2 ч. : учеб. пособие для вузов / М. В. Милованов, Р. И. Тышкевич, А. С. Феденко. – Ч. 1. – Минск : Вышэйшая школа, 1984. – 302 с.

7. Милованов М. В., Алгебра и аналитическая геометрия : в 2 ч. : учеб. пособие для вузов / М. В. Милованов [и др.]. – Ч. 2. – Минск: Вышэйшая школа, 1987. – 269 с.

8.Аниськов В. В. Аналитическая геометрия: Практическое пособие : в 3 частях / В.В. Аниськов. – Часть 1. Векторы. Линии и поверхности первого порядка. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, – 2007. – 87 с.

Производственно-практическое издание

Аниськов Валерий Валерьевич,
Близнец Игорь Васильевич

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Практическое пособие

Редактор А. А. Банчук
Корректор В. В. Калугина

Подписано в печать 12.10.2023. Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 3,02. Уч.-изд. л. 3,30.
Тираж 10 экз. Заказ 507.

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования
«Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 3/1452 от 17.04.2017.
Специальное разрешение (лицензия) № 02330 / 450 от 18.12.2013.
Ул. Советская, 104, 246028, Гомель.