А. П. Старовойтов, Н. В. Рябченко, О детерминантных представлениях многочленов Эрмита–Паде, *Тр. ММО*, 2022, том 83, выпуск 1, 17–35

О детерминантных представлениях многочленов Эрмита — Паде

А. П. Старовойтов, Н. В. Рябченко

В работе введены новые понятия: слабо нормальный индекс, слабо совершенная система функций. С помощью этих понятий для произвольной системы степенных рядов сформулированы и доказаны критерии единственности решения двух задач Эрмита — Паде, получены явные детерминантные представления многочленов Эрмита — Паде 1-го и 2-го типов. Доказанные утверждения дополняют хорошо известные результаты в теории аппроксимаций Эрмита — Паде.

Библиография: 34 названия. *УДК*: 517.538.52+517.538.53+517.518.84. *MSC2020*: 41A21, 41A28.
Ключевые слова и фразы: многочлены Эрмита — Паде, аппроксимации Эрмита — Паде, нормальный индекс, совершенная система, определители Адамара.

Введение

Повышенный интерес к многочленам и аппроксимациям Эрмита — Паде, наблюдаемый в последние годы (см., например, [4, 7, 11, 17, 30]), вызван в том числе их разнообразными приложениями в теории приближения аналитических функций [10, 21, 23] и аналитического продолжения [15, 16], в приложениях к случайным матрицам [2, 18, 22], теории операторов [5, 20], диофантовым приближениям [9, 24, 31, 34], а также при изучении броуновского движения [25] и в теории полиортогональных многочленов [19, 28, 29].

Конструкцию этих многочленов и аппроксимаций предложил Ш. Эрмит [27] в связи с исследованиями арифметических свойств числа e. С тех пор они привлекали внимание как классиков (Д. Гильберт, Ф. Клейн, Ф. Линдеман, К. Малер, О. Перрон, К. Зигель), так и многих известных современных математиков (см., например, монографию [6] и обзорные статьи [1, 15, 16]).

Некоторые предварительные итоги исследований в этой области подведены в монографиях [3, 8]. В [3, 8], кроме изложения основных положений теории, приведены ее многочисленные приложения, а также поставлен ряд важных и интересных задач, в том числе еще не до конца решенных к настоящему времени. Такими, в частности, являются задачи, связанные с нахождением необходимых и достаточных условий, при которых многочлены Эрмита — Паде определяются (с точностью до числового множителя) единственным образом. В монографии [8, гл. 4, § 1, § 3] поставлены четыре таких задачи — за-

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь в рамках Государственной программы научных исследований на 2016–2020 годы.

дачи A, B, C, D. В соответствии с терминологией работы [33] мы их называем задачами Эрмита — Паде. Задачи C, D напрямую связаны с проблемой единственности существования полиортогональных многочленов, ассоциированных с заданной системой степенных рядов лорановского типа (их полное решение получено нами в работах [13, 14]). Хорошо известно, что единственность решения указанных задач Эрмита — Паде имеет место для так называемых совершенных систем функций. Однако совершенность системы функций является лишь достаточным условием единственности решения. В данной работе установлены критерии существования и единственности решений двух других задач Эрмита — Паде (задач A и B).

Далее будем придерживаться терминологии, принятой в работах [1, 33].

§ 1. Многочлены Эрмита — Паде второго типа

1.1. Постановка задачи. Пусть $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_k)$ — набор, вообще говоря, формальных степенных рядов

$$f_j(z) = \sum_{l=0}^{\infty} f_l^j z^l, \quad j = 1, 2, \ldots, k, \tag{1.1}$$

с комплексными коэффициентами. Множество k-мерных мультииндексов (индексов), т. е. упорядоченных k целых неотрицательных чисел, обозначим $\mathbb{Z}_+^k$. Порядок мультииндекса $\vec{m} = (m_1, \ldots, m_k)$ — это сумма $m = m_1 + \ldots + m_k$. Зафиксируем индекс $n \in \mathbb{Z}_+^1$ и мультииндекс $\vec{m} = (m_1, \ldots, m_k) \in \mathbb{Z}_+^k$ и рассмотрим следующую задачу Эрмита — Паде (см. [1], [3], [8, гл. 4, § 1], [33]).

Задача A. *Найти такой тождественно не равный нулю многочлен* $Q_m(z) = Q_{n,\vec{m}}(z; \mathbf{f})$, $\deg Q_m \leqslant m$ *и такие многочлены* $P_{n_j}^j(z) = P_{n,\vec{m}}^j(z; \mathbf{f})$, $\deg P_{n_j}^j \leqslant n_j$, $n_j = n + m - m_j$, *чтобы для* $j = 1, \ldots, k$

$$R_{n,\vec{m}}^j(z) := Q_m(z) f_j(z) - P_{n_j}^j(z) = l_j\, z^{n+m+1} + \ldots \tag{1.2}$$

Если $k = 1$, то $\mathbf{f}$ состоит из одного ряда f_1. В этом случае решение поставленной задачи было получено Паде [32], который нашел явные детерминантные представления многочленов $Q_m(z)$, $P_n(z) := P_{n,m}^1(z; f_1)$ (их называют многочленами Паде). Например, если $c_l := f_l^1$, $l = 0, 1, \ldots$, то [8, гл. 1, § 1.1, теорема 1.1.1]

$$Q_m(z) = \begin{vmatrix} c_{n-m+1} & c_{n-m+2} & \ldots & c_n & c_{n+1} \\ c_{n-m+2} & c_{n-m+3} & \ldots & c_{n+1} & c_{n+2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_n & c_{n+1} & \ldots & c_{n+m-1} & c_{n+m} \\ z^m & z^{m-1} & \ldots & z & 1 \end{vmatrix}. \tag{1.3}$$

Здесь и далее при $l < 0$ считаем, что $c_l = 0$ и $f_l^j = 0$.

В случае когда $\mathbf{f}$ является набором экспонент $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^k$, где λ_j — различные не равные нулю комплексные числа, решение задачи A найдено Эрмитом в его известной работе [27], посвященной доказательству трансцендентности числа e. В [27] искомые многочлены представлены несобственными интегралами Римана.

Хорошо известно [8, гл. 4, § 1], что в общем случае решение задачи A существует, а соответствующие многочлены $Q_m(z)$, $P^j_{n_j}(z)$ находятся с точностью до числового множителя: если пара (Q_m, P), где $P=(P^1_{n_1}, \ldots, P^k_{n_k})$, удовлетворяет необходимым условиям, то для любого отличного от нуля комплексного числа λ новая пара $(\lambda Q_m, \lambda P)$, где $\lambda P := (\lambda P^1_{n_1}, \ldots, \lambda P^k_{n_k})$, также удовлетворяет необходимым условиям. Однако эта неединственность может быть и более существенной. Приведем соответствующий пример.

Пример 1.1. Пусть $k=1$, $n=2$, $m=2$, а

$$f_1(z) = \frac{1}{2}+z+2z^2+4z^3+8z^4+\frac{z^5}{5!}+\frac{z^6}{6!}+\ldots$$

Тогда любое решение задачи можно представить в виде: $(\lambda Q_2, \lambda P_2)$, где

$$Q_2(z) = a+bz-(4a+2b)z^2, \quad P_2(z) = \frac{1}{2}+\Big(a+\frac{1}{2}b\Big)z,$$

а a и b — произвольные действительные числа, не равные нулю одновременно.

Определение 1. Будем говорить, что *задача* A *имеет единственное решение*, если для любых двух решений (Q'_m, P') и (Q''_m, P'') задачи A найдется такое комплексное число λ, что $(Q'_m, P')=(\lambda Q''_m, \lambda P'')$.

Определение 2. Если пара (Q_m, P), где $P=(P^1_{n_1}, \ldots, P^k_{n_k})$, — решение задачи A с индексом n и мультииндексом $\vec{m}=(m_1, \ldots, m_k)$, то многочлены $Q_m(z)$, $P^1_{n_1}(z)$, …, $P^k_{n_k}(z)$ называют *многочленами Эрмита—Паде второго типа* (*German type*) для набора $\mathbf{f}$ степенных рядов (1.1).

Центральными понятиями в теории таких многочленов являются понятия нормального индекса и совершенной системы (см. [1], [8, гл. 4, § 1], [33]).

Определение 3. Индекс $(n, \vec{m})=(n, m_1, \ldots, m_k)\in\mathbb{Z}^{k+1}_+$ называется *нормальным для* $\mathbf{f}$ *относительно задачи* A, если для любого решения (Q_m, P) задачи A с индексом n и мультииндексом $\vec{m}$

$$\deg Q_m = m, \quad \deg P^j_{n_j} = n_j, \quad j=1, \ldots, k.$$

Нормальный индекс $(n, \vec{m})$ будем называть *вполне нормальным для* $\mathbf{f}$ *относительно задачи A*, если НОД$(Q_m, P^j_{n_j})=1$ для всех $j=1, \ldots, k$.

Определение 4. Система $\mathbf{f}$ называется *совершенной относительно задачи A*, если все индексы $(n, \vec{m})\in\mathbb{Z}^{k+1}_+$ являются нормальными для $\mathbf{f}$ относительно задачи A.

Определение 5. Систему $\mathbf{f}$ будем называть *вполне совершенной относительно задачи A*, если все индексы $(n, \vec{m})\in\mathbb{Z}^{k+1}_+$ являются вполне нормальными для $\mathbf{f}$ относительно задачи A.

При $k=1$ индекс (n, m) является нормальным для $\mathbf{f}=\{f_1\}$ (полагаем $c_l := f_l^1$, $l=0, 1, \ldots$) тогда и только тогда, когда [1]

$$H_{n+1,m} \cdot H_{n,m+1} \neq 0, \tag{1.4}$$

где определители Адамара $H_{n,m}$ определяются равенствами

$$H_{n,m} = \begin{vmatrix} c_{n-m+1} & c_{n-m+2} & \cdots & c_n \\ c_{n-m+2} & c_{n-m+3} & \cdots & c_{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_n & c_{n+1} & \cdots & c_{n+m-1} \end{vmatrix}.$$

Критерием вполне нормального индекса является условие [1]

$$H_{n,m} \cdot H_{n+1,m} \cdot H_{n,m+1} \neq 0.$$

Если индекс $(n, \vec{m})$ является нормальным, то задача A имеет единственное решение [8, гл. 4, § 1]. В этом случае однозначно определяется вектор

$$\pi_{n,\vec{m}} = \left(\pi^1, \ldots, \pi^k\right), \quad \pi^j(z) = \frac{P^j_{n_j}(z)}{Q_m(z)},$$

компоненты которого $\pi^j(z)$ называют *аппроксимациями Эрмита — Паде второго типа* (*совместными аппроксимациями Паде* в терминологии монографии [8]) для $\mathbf{f}$. Следующий пример показывает, что нормальность индекса (n, m) не является необходимым условием единственности решения задачи A.

Пример 1.2. Пусть $k=1$, $n=2$, $m=2$, а

$$f_1(z) = \frac{1}{2} + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{8} + \frac{z^3}{16} + \frac{z^4}{32} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^6}{6!} + \ldots$$

Тогда любое решение задачи A можно записать в виде: $(\lambda Q_2, \lambda P_2)$, где $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$, а

$$Q_2(z) = 2 - z, \quad P_2(z) = 1 + \frac{z}{2} - \frac{z^2}{4}.$$

При этом индекс $(2, 2)$ не является нормальным, так как $\deg Q_2 = 1$.

Нашей ближайшей целью является нахождение необходимых и достаточных условий на индекс $(n, \vec{m}) \in \mathbb{Z}_+^{k+1}$ и систему $\mathbf{f}$, при которых решение задачи A единственно.

1.2. Критерий единственности решения задачи A. В дальнейшем, не ограничивая общности, будем считать, что радиусы сходимости всех степенных рядов (1.1) не равны нулю, а $\vec{m}$ — ненулевой мультииндекс. Для нулевого мультииндекса $\vec{m}$ решение (с точностью до числового множителя) задачи A очевидно: $Q_m(z) \equiv 1$, а $P^j_{n_j}(z)$ — n_j-я частичная сумма ряда f_j.

Введем необходимые обозначения. Для каждого $j \in \{1, \ldots, k\}$, фиксированных индекса n и мультииндекса $\vec{m} = (m_1, \ldots, m_k)$ в предположении, что $m_j \neq 0$, определим матрицу порядка $m_j \times (m+1)$

$$F^j = \begin{pmatrix} f^j_{n-m_j+1} & f^j_{n-m_j+2} & \cdots & f^j_{n_j+1} \\ f^j_{n-m_j+2} & f^j_{n-m_j+3} & \cdots & f^j_{n_j+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f^j_{n} & f^j_{n+1} & \cdots & f^j_{n+m} \end{pmatrix}, \tag{1.5}$$

а затем матрицу порядка $m \times (m+1)$

$$F_{n,\vec{m}} = [\,F^1\ F^2\ \ldots\ F^k\,]^T := \begin{pmatrix} f^1_{n-m_1+1} & f^1_{n-m_1+2} & \cdots & f^1_{n_1+1} \\ f^1_{n-m_1+2} & f^1_{n-m_1+3} & \cdots & f^1_{n_1+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f^1_{n} & f^1_{n+1} & \cdots & f^1_{n+m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f^k_{n-m_k+1} & f^k_{n-m_k+2} & \cdots & f^k_{n_k+1} \\ f^k_{n-m_k+2} & f^k_{n-m_k+3} & \cdots & f^k_{n_k+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f^k_{n} & f^k_{n+1} & \cdots & f^k_{n+m} \end{pmatrix}. \tag{1.6}$$

Если к матрице $F_{n,\vec{m}}$ добавить в качестве последней строки строку

$$\big(\, f^j_{n+l}\ f^j_{n+l+1}\ \ldots\ f^j_{n+m+l} \,\big),$$

то получим квадратную матрицу порядка $m+1$. Определитель этой матрицы обозначим через $d^j_{n,\vec{m},l}$. При $m_j = 0$ считаем, что матрица $F_{n,\vec{m}}$ и определитель $d^j_{n,\vec{m},l}$ не содержат блок-матрицу F^j.

Определим также функциональные матрицы-строки порядка $1 \times (m+1)$

$$\begin{aligned} E(z) &= (\quad z^m \qquad\qquad z^{m-1} \qquad \ldots \quad z \quad 1 \quad), \\ E_{m_j}(z) &= \left(\sum_{l=0}^{n-m_j} f^j_l z^{m+l} \quad \sum_{l=0}^{n-m_j+1} f^j_l z^{m+l-1} \ \ldots\ \ldots \sum_{l=0}^{n_j} f^j_l z^l \right). \end{aligned}$$

Определение 6. Индекс $(n, \vec{m})$ будем называть *слабо нормальным для* $\mathbf{f}$ *относительно задачи A*, если ранг матрицы $F_{n,\vec{m}}$ равен m.

В примере 1.1 индекс (2, 2) не является нормальным и не является слабо нормальным, а в примере 1.2 индекс (2, 2) не является нормальным, но является слабо нормальным относительно задачи A для рассматриваемых в этих примерах рядов.

Далее будет установлено, что любой нормальный индекс $(n, \vec{m})$ для $\mathbf{f}$ относительно задачи A является также и слабо нормальным индексом для $\mathbf{f}$ относительно задачи A. Пример 1.2 показывает, что обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

Определение 7. Систему $\mathbf{f}$ назовем *слабо совершенной относительно задачи A*, если все индексы $(n, \vec{m}) \in \mathbb{Z}^{k+1}_+$ являются слабо нормальными для $\mathbf{f}$ относительно задачи A.

Отметим, что любая совершенная система $\mathbf{f}$ относительно задачи A является также и слабо совершенной системой относительно задачи A.

Сформулируем и докажем основную теорему этого параграфа.

Теорема 8. *Для того чтобы для фиксированного индекса* $(n, \vec{m})$ *задача* А *имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы индекс* $(n, \vec{m})$ *был слабо нормальным для* **f** *относительно задачи А, т. е.* $\operatorname{rang} F_{n,\vec{m}} = m$.

В случае если $\operatorname{rang} F_{n,\vec{m}} = m$, *при определенном выборе нормирующего множителя для решений задачи* (Q_m, P) *справедливы следующие детерминантные представления:*

$$Q_m(z) = \det[\, F^1 \;\; F^2 \;\; \ldots \;\; F^k \;\; E(z)\,]^T, \tag{1.7}$$

$$P^j_{n_j}(z) = [\, F^1 \;\; F^2 \;\; \ldots \;\; F^k \;\; E_{m_j}(z)\,]^T, \tag{1.8}$$

$$R^j_{n,\vec{m}}(z) = \sum_{l=1}^{\infty} d^j_{n,\vec{m},l} z^{n+m+l}. \tag{1.9}$$

Доказательство. Пусть

$$Q_m(z) = b_0 + b_1 z + \ldots + b_m z^m.$$

Обозначим через $(g)_k$ коэффициент при z^k степенного ряда $g(z)$. Рассмотрим систему m линейных однородных уравнений относительно $m+1$ неизвестных коэффициентов $b_0, b_1, \ldots, b_m$:

$$(Q_m f_j)_p = 0 \tag{1.10}$$

$p = n_j + 1, n_j + 2, \ldots, n_j + m_j;\ j = 1, 2, \ldots, k$.

В матричном виде система (1.10) выглядит так:

$$F_{n,\vec{m}} b^T = \theta^T, \tag{1.11}$$

где $b = (b_0, b_1, \ldots, b_m)$ — матрица-строка, а матрица-строка θ имеет порядок $1 \times (m+1)$, все ее элементы нулевые. Поскольку система (1.11) является однородной и в ней число неизвестных на единицу больше числа уравнений, то из теоремы Кронекера—Капелли следует, что у системы (1.11) имеется ненулевое решение. Более того, множество всех линейно независимых решений системы (1.11) состоит из одного фундаментального решения тогда и только тогда, когда $\operatorname{rang} F_{n,\vec{m}} = m$. В этом случае все остальные ненулевые решения получаются домножением этого фундаментального решения на число $\lambda \neq 0$. Поскольку многочлены $P^j_{n_j}(z)$ однозначно определяются по заданному многочлену $Q_m(z)$, то тем самым первая часть теоремы 8 доказана.

Докажем теперь равенства (1.7), (1.8). Так как ранг матрицы $F_{n,\vec{m}}$ равен m, то при некотором $p \in \{1, \ldots, m+1\}$ определитель, полученный в результате вычеркивания в матрице $F_{n,\vec{m}}$ p-го столбца, отличен от нуля. Для определенности предположим, что $p = m+1$. Тогда в развернутом виде систему (1.11) можно переписать в виде

$$\begin{pmatrix} f^1_{n-m_1+1} & f^1_{n-m_1+2} & \cdots & f^1_{n_1} \\ f^1_{n-m_1+2} & f^1_{n-m_1+3} & \cdots & f^1_{n_1+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f^1_{n} & f^1_{n+1} & \cdots & f^1_{n+m-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f^k_{n-m_k+1} & f^k_{n-m_k+2} & \cdots & f^k_{n_k} \\ f^k_{n-m_k+2} & f^k_{n-m_k+3} & \cdots & f^k_{n_k+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f^k_{n} & f^k_{n+1} & \cdots & f^k_{n+m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_m \\ b_{m-1} \\ \cdots \\ b_{n-m_1+1} \\ \cdots \\ b_{m_k} \\ b_{m_k-1} \\ \cdots \\ b_1 \end{pmatrix} = -b_0 \begin{pmatrix} f^1_{n_1+1} \\ f^1_{n_1+2} \\ \cdots \\ f^1_{n+m} \\ \cdots \\ f^k_{n_k+1} \\ f^k_{n_k+2} \\ \cdots \\ f^k_{n+m} \end{pmatrix}. \tag{1.12}$$

Обозначим главный определитель системы (1.12) через $H_{n,\vec{m}}$. По предположению $H_{n,\vec{m}}$ не равен нулю. Если бы $b_0=0$, то система (1.12) имела бы только нулевое решение. Тогда и система (1.11) имела бы только нулевое решение. Поэтому $b_0\neq 0$. Решаем систему (1.12) по правилу Крамера. Пренебрегая числовым множителем, результат можно записать в виде:

$$Q_m(z) = \begin{vmatrix} f^1_{n-m_1+1} & f^1_{n-m_1+2} & \cdots & f^1_{n_1+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f^1_{n} & f^1_{n+1} & \cdots & f^1_{n+m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f^k_{n-m_k+1} & f^k_{n-m_k+2} & \cdots & f^k_{n_k+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f^k_{n} & f^k_{n+1} & \cdots & f^k_{n+m} \\ z^m & z^{m-1} & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \det[\,F^1\ \ldots\ F^k\ E(z)\,]^T.$$

Отсюда, в частности, следует, что $b_0=H_{n,\vec{m}}\neq 0$. В случае если бы мы, вычеркивая в матрице $F_{n,\vec{m}}$ столбец с номером $p\in\{1, \ldots, m\}$, получили определитель отличный от нуля, то, рассуждая аналогично, также пришли бы к предыдущему представлению. Равенство (1.7) доказано.

Многочлены $P^j_{n_j}(z)$ определим равенствами:

$$P^j_{n_j}(z) = \sum_{p=0}^{n_j} (Q_m f_j)_p\, z^p, \quad j = 1, 2, \ldots, k.$$

Будем искать их явный вид. Для этого рассмотрим

$$Q_m(z)\cdot\sum_{l=0}^{\infty} f^j_l z^l = \begin{vmatrix} f^1_{n-m_1+1} & f^1_{n-m_1+2} & \cdots & f^1_{n_1+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f^1_{n} & f^1_{n+1} & \cdots & f^1_{n+m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f^k_{n-m_k+1} & f^k_{n-m_k+2} & \cdots & f^k_{n_k+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f^k_{n} & f^k_{n+1} & \cdots & f^k_{n+m} \\ \sum\limits_{l=0}^{\infty} f^j_l z^{m+l} & \sum\limits_{l=0}^{\infty} f^j_l z^{m+l-1} & \cdots & \sum\limits_{l=0}^{\infty} f^j_l z^{l} \end{vmatrix}. \tag{1.13}$$

При $m_j \neq 0$ в определителе (1.13) выделим блок F^j. Вычтем из последней строки определителя первую строку блока F^j, умноженную на z^{n_j+1}, затем вторую строку блока F^j, умноженную на z^{n_j+2}, и так далее вплоть до последней строки блока F^j, умноженной на z^{n+m}. В результате получим определитель, у которого ряды в последней строке имеют лакуны длиной m_j. Сохраняя начальные строки этих рядов, придем к определителю

$$P^j_{n_j}(z) = \det[\, F^1 \ F^2 \ \ldots \ F^k \ E_{m_j}(z)\,]^T. \tag{1.14}$$

Он и будет искомым. Действительно, $P^j_{n_j}(z)$ — многочлен и $\deg P^j_{n_j} \leqslant n_j$. Учитывая (1.14) и (1.2), $R^j_{n,\vec{m}}(z)$ можно представить в виде

$$R^j_{n,\vec{m}}(z) = \begin{vmatrix} f^1_{n-m_1+1} & f^1_{n-m_1+2} & \cdots & f^1_{n_1+1} \\ \hdotsfor{4} \\ f^1_n & f^1_{n+1} & \cdots & f^1_{n+m} \\ \hdotsfor{4} \\ f^k_{n-m_k+1} & f^k_{n-m_k+2} & \cdots & f^k_{n_k+1} \\ \hdotsfor{4} \\ f^k_n & f^k_{n+1} & \cdots & f^k_{n+m} \\ \sum\limits_{l=n+1}^{\infty} f^j_l z^{m+l} & \sum\limits_{l=n+2}^{\infty} f^j_l z^{m+l-1} & \cdots & \sum\limits_{l=n+m+1}^{\infty} f^i_l z^l \end{vmatrix} = \sum_{l=1}^{\infty} d^j_{n,\vec{m},l}\, z^{n+m+l}.$$

При преобразованиях воспользовались определением суммы степенного ряда и правилом сложения определителей. Справедливость предыдущего равенства при $m_j = 0$ проверяется непосредственно. Теорема 8 доказана. □

1.3. Замечания и некоторые следствия. Компонента m_j мультииндекса $\vec{m}$ определяет число коэффициентов ряда f_j, которые учитываются при построении многочлена $Q_m(z)$. В частности, если $m_j = 0$, то матрица $F_{n,\vec{m}}$ и определитель в (1.7) не содержат блока F^j и, следовательно, при построении многочлена $Q_m(z)$ ряд f_j не участвует, а порядок мультииндекса $\vec{m}$ определяется остальными ненулевыми компонентами.

Например, если $\vec{m} = (m_1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{Z}^k_+$, то $m = m_1$ и тогда, как и в одномерном случае, при нахождении $Q_m(z)$ учитываются только коэффициенты ряда f_1. При этом представление (1.7) (с учетом принятых ранее обозначений для коэффициентов ряда f_1) совпадает с (1.3).

В том случае, если $\vec{m}$ — нулевой индекс, то с точностью до числового множителя $Q_m(z) \equiv 1$, а $P^j_{n_j}(z)$ — n_j-я частная сумма ряда f_j. Отсюда, в частности, следует, что если $\mathbf{f}$ является совершенной системой относительно задачи A, то все коэффициенты рядов (1.1) не равны нулю. Например, если одно из чисел $\{\lambda_p\}_{p=1}^k$ равно нулю, то $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=1}^k$ уже не является совершенной системой относительно задачи A. В этой связи напомним, что для набора экспонент $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=1}^k$ явное решение задачи A получено Эрмитом [27] в предположении, что все $\{\lambda_p\}_{p=1}^k$ отличны от нуля.

Следует также сказать, что если индекс $(n, \vec{m})$ не является слабо нормальным для $\mathbf{f}$ относительно задачи A, то многочлены $Q_m(z)$ и $P^j_{n_j}(z)$, определенные равенствами (1.7) и (1.8), не являются решениями задачи A. В частности, в примере 1.1 для индекса (2, 2) искомый многочлен $Q_2(z)=a+bz-(4a+2b)z^2$. Однако если $Q_2(z)$ находить по формуле (1.3), то получим, что $Q_2(z)\equiv 0$. Как уже отмечалось, представление многочлена Паде в виде (1.3) вытекает из общего представления многочленов Эрмита—Паде (1.7). Поэтому оно также справедливо только в том случае, когда индекс (n, m) является слабо нормальным относительно задачи A. В монографии [3] при доказательстве теоремы 1.1.1 на это обстоятельство не обращено внимание (см. [3, гл. 1, § 1.1, теорема 1.1.1]).

Из (1.7) и (1.8) вытекают следующие критерии нормальности и вполне нормальности индекса $(n, \vec{m})$.

Следствие 1. *Индекс* $(n, \vec{m})\in\mathbb{Z}_+^{k+1}$ *будет нормальным для* $\mathbf{f}$ *относительно задачи* A *тогда и только тогда, когда*

$$H_{n+1,\vec{m}}\cdot\prod_{j=1}^{k}H^j_{n,\vec{m}}\neq 0, \tag{1.15}$$

где

$$H^j_{n,\vec{m}}=\begin{vmatrix} f^1_{n-m_1+1} & f^1_{n-m_1+2} & \cdots & f^1_{n_1+1}\\ \hdotsfor{4}\\ f^1_{n} & f^1_{n+1} & \cdots & f^1_{n+m}\\ \hdotsfor{4}\\ f^k_{n-m_k+1} & f^k_{n-m_k+2} & \cdots & f^k_{n_k+1}\\ \hdotsfor{4}\\ f^k_{n} & f^k_{n+1} & \cdots & f^k_{n+m}\\ f^j_{n-m_j} & f^j_{n-m_j+1} & \cdots & f^j_{n_j} \end{vmatrix}.$$

Индекс $(n, \vec{m})$ *будет вполне нормальным для* $\mathbf{f}$ *относительно задачи* A *тогда и только тогда, когда*

$$H_{n,\vec{m}}\cdot H_{n+1,\vec{m}}\cdot\prod_{j=1}^{k}H^j_{n,\vec{m}}\neq 0. \tag{1.16}$$

В частности, при $k=1$ получим критерий нормального индекса (n, m), совпадающий с (1.4). Как и прежде, при $m_j=0$ в (1.15) и предыдущем неравенстве предполагается, что определители $H_{n,\vec{m}}$, $H_{n+1,\vec{m}}$, $H^j_{n,\vec{m}}$ не содержат блок F^j.

Следствие 2. *Для того чтобы задача* A *имела единственное решение для любого индекса* $(n, \vec{m})$, *где* $\vec{m}\neq(0, \ldots, 0)$, *необходимо и достаточно, чтобы система* $\mathbf{f}$ *была слабо совершенной.*

Следующее следствие можно рассматривать как некоторый многомерный аналог теоремы Кронекера [8, гл. 2, § 3].

Следствие 3. *Пусть индекс* $n=(n, \vec{m})$ *является слабо нормальным для* $\mathbf{f}=(f_1, \ldots, f_k)$ *относительно задачи* A, *а ряд* f_j *не является формальным.*

Тогда для того, чтобы функция $f_j(z)$ была рациональной, необходимо и достаточно, чтобы $d^j_{n,\vec{m},l}=0$ для всех достаточно больших l.

Важно отметить, что предыдущее следствие справедливо и при $m_j=0$. Уже было сказано, что если $m_j=0$, то при нахождении многочлена $Q_m(z)$ коэффициенты ряда f_j не учитываются. Однако при построении многочлена $P^j_{n_j}(z)$ и соответствующего остаточного члена $R^j_{n,\vec{m}}(z)$ коэффициенты ряда f_j принимаются во внимание.

Следствие 4. *Если система f является совершенной относительно задачи* А, *то для любого индекса $(n, \vec{m})\in\mathbb{Z}^k_+$ в равенствах* (1.2) *коэффициенты $l_j\neq 0$ при всех $j=1, 2, \ldots, k$.*

Для доказательства следствия, заметим, что из (1.9) вытекает равенство $l_j=d^j_{n,\vec{m},1}$. Теперь остается применить критерий (1.15) нормальности индекса.

§ 2. Многочлены Эрмита—Паде первого типа

2.1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу Эрмита—Паде, двойственную задаче А (см. [1], [8, гл. 4, §1], [33]).

Задача В. *Для набора* $\mathbf{f}$ *степенных рядов* (1.1) *и ненулевого мультииндекса $n=(n_1, \ldots, n_k)\in\mathbb{Z}^k_+$ найти такие не равные тождественно нулю одновременно многочлены $A_1(z)=A^1_n(z), \ldots, A_k(z)=A^k_n(z)$, степени которых* $\deg A_1\leqslant \leqslant n_1-1, \ldots, \deg A_k\leqslant n_k-1$ *и*

$$L_n(z) := \sum_{j=1}^{k} A_j(z)f_j(z) = c_n z^{|n|-1}+\ldots, \tag{2.1}$$

где $|n|=n_1+\ldots+n_k$, а $\deg A_j=-1$ *только тогда, когда $A_j(z)\equiv 0$.*

Заметим, что если, например, $n_k=0$, то задача В вырождается в аналогичную задачу, но уже для набора $f=(f_1, \ldots, f_{k-1})$, состоящего из $k-1$ степенных рядов. Поэтому в дальнейшем, где это необходимо учитывать, будем рассматривать индексы $n=(n_1, \ldots, n_k)$, у которых компоненты $n_j>0$.

В случае когда $k=2$, $(n_1, n_2)=(m+1, n+1)$, $\mathbf{f}=(f_1, -1)$, задача В равносильна задаче А. Поэтому многочлен $A_1(z)$ (как и $A_2(z)$) является многочленом Паде и в предположении, что индекс $(m+1, n+1)$ является слабо нормальным для $\mathbf{f}$ относительно задачи А, он тождественно совпадает с $Q_m(z)$ и, следовательно, с точностью до множителя определяется (с учетом обозначений $c_l:=f^1_l$, $l=0, 1, \ldots$) равенством (1.3).

В том случае, когда $\mathbf{f}$ является набором экспонент $\{e^{\lambda_j z}\}^k_{j=1}$, где λ_j — различные комплексные числа, решение задачи В получено в [26]. В этой работе искомые многочлены представлены Эрмитом в виде интегралов Коши. Для произвольного набора $\mathbf{f}$ решение задачи В существует, но не единственно [8, гл. 4, §1]. В частности, многочлены $A_j(z)$ находятся с точностью до числового множителя: если набор $A=(A_1, \ldots, A_k)$ удовлетворяет необходимым условиям, то для любого отличного от нуля комплексного числа λ набор $\lambda A=(\lambda A_1, \ldots, \lambda A_k)$ также удовлетворяет условиям задачи. Однако эта неединственность также может быть и более существенной.

Пример 2.1. Пусть $k=2$, $n=(3, 3)$, а $\mathbf{f}=(f_1, 1)$, где f_1 — ряд из примера 1.1. Тогда любое решение задачи B можно представить в виде:

$$(\lambda A_1, \lambda A_2), \quad \lambda\in\mathbb{C},\ \lambda\neq 0, \quad A_1(z)=a+bz-(4a+2b)z^2,\ A_2(z)=-\frac{1}{2}a-\left(a+\frac{1}{2}b\right)z,$$

где a, b — произвольные действительные числа, не равные нулю одновременно.

Определение 9. Будем говорить, что задача B имеет *единственное решение*, если для любых двух наборов $A'=(A'_1, \ldots, A'_k)$, $A''=(A''_1, \ldots, A''_k)$ многочленов, являющихся решением задачи B, найдется комплексное число λ, что $A''=\lambda A'$.

Определение 10. Если $A=(A_1, \ldots, A_k)$ — решение задачи B с ненулевым индексом $n\in\mathbb{Z}_+^k$, то многочлены $A_1(z), \ldots, A_k(z)$ называют *многочленами Эрмита — Паде первого типа* (*Latin Type*) для набора $\mathbf{f}$ степенных рядов (1.1).

Центральными понятиями в теории таких многочленов также являются понятия нормального индекса и совершенной системы [8, гл. 4, § 1].

Определение 11. Ненулевой индекс $n=(n_1, \ldots, n_k)\in\mathbb{Z}_+^k$ называется *нормальным для* $\mathbf{f}$ *относительно задачи* B, если для любого решения задачи B с индексом n

$$\deg A_j = n_j-1, \quad j=1, \ldots, k.$$

Определение 12. Систему $\mathbf{f}$ называют *совершенной относительно задачи* B, если все ненулевые индексы $n\in\mathbb{Z}_+^k$ являются нормальными для $\mathbf{f}$ относительно задачи B.

Если $k=2$ и $\mathbf{f}=(f_1, -1)$, то критерий нормальности индекса $(n_1, n_2)= =(m+1, n+1)$ выражается (при сохранении обозначений $c_l:=f_l^1$, $l=0, 1, \ldots$) условием (1.4).

Хорошо известно, что если индекс n является нормальным для $\mathbf{f}$ относительно задачи B, то задача B имеет единственное решение. Следующий пример показывает, что уже при $k=2$ нормальность индекса n не является необходимым условием единственности решения задачи B.

Пример 2.2. Пусть $k=2$, $n=(3, 3)$, а $\mathbf{f}=(f_1, 1)$, где f_1 – ряд из примера 1.2. Тогда любое решение задачи B можно записать в виде:

$$(\lambda A_1, \lambda A_2), \quad \lambda\in\mathbb{C},\ \lambda\neq 0, \quad A_1(z)=8-4z,\ A_2(z)=-4-2z+z^2.$$

В этом примере индекс $n=(3, 3)$ не является нормальным, так как $\deg A_1=1$.

Нашей ближайшей целью является нахождение необходимых и достаточных условий на индекс $n\in\mathbb{Z}_+^k$ и систему $\mathbf{f}$, определяемую равенствами (1.1), при которых решение задачи B является единственным.

2.2. Критерий единственности решения задачи B. Введем необходимые обозначения. Для ненулевого мультииндекса $n=(n_1,\ldots,n_k)$ и каждого $j\in\{1,\ldots,k\}$, для которого $n_j\neq 0$, определим матрицу порядка $(|n|-1)\times n_j$

$$G^j=\begin{pmatrix} f_0^j & 0 & \ldots & 0\\ f_1^j & f_0^j & \ldots & 0\\ \hdotsfor{4}\\ f_{n_j-1}^j & f_{n_j-2}^j & \cdots & f_0^j\\ f_{n_j}^j & f_{n_j-1}^j & \cdots & f_1^j\\ \hdotsfor{4}\\ f_{|n|-2}^j & f_{|n|-3}^j & \cdots & f_{|n|-n_j-1}^j \end{pmatrix},$$

а затем матрицу порядка $(|n|-1)\times|n|$

$$G_n=(G^1\ G^2\ \ldots\ G^k).$$

Если $n_j=0$, то считаем, что матрица G_n не содержит блок G^j. Рассмотрим также k функциональных матриц-строк порядка $1\times|n|$

$$U_j(z)=(0\ 0\ \ldots\ 0\ \ldots\ 1\ z\ \ldots\ z^{n_j-1}\ \ldots\ 0\ 0\ \ldots\ 0),\quad j=1,\ldots,k$$

и матрицу

$$U(z):=U_1(z)+\ldots+U_k(z)=(1\ z\ \ldots\ z^{n_1-1}\ 1\ z\ \ldots\ z^{n_2-1}\ \ldots\ 1\ z\ \ldots\ z^{n_k-1}).$$

Если в матрице G_n добавить в качестве последней строки строку $U_j(z)$, то получим квадратную матрицу порядка $|n|\times|n|$. Определитель этой матрицы имеет вид

$$\det\begin{bmatrix} G_n\\ U_j(z)\end{bmatrix}=\begin{vmatrix} f_0^1 & \ldots & 0 & \ldots & f_0^j & 0 & \ldots & 0 & \ldots & f_0^k & \ldots & 0\\ f_1^1 & \ldots & 0 & \ldots & f_1^j & f_0^j & \ldots & 0 & \ldots & f_1^k & \ldots & 0\\ \hdotsfor{12}\\ f_{n_j-1}^1 & \ldots & f_{n_j-n_1}^1 & \ldots & f_{n_j-1}^j & f_{n_j-2}^j & \ldots & f_0^j & \ldots & f_{n_j-1}^k & \ldots & f_{n_j-n_k}^k\\ f_{n_j}^1 & \ldots & f_{n_j-n_1+1}^1 & \ldots & f_{n_j}^j & f_{n_j-1}^j & \ldots & f_1^j & \ldots & f_{n_j}^k & \ldots & f_{n_j-n_k+1}^k\\ \hdotsfor{12}\\ f_{|n|-2}^1 & \ldots & f_{|n|-n_1-1}^1 & \ldots & f_{|n|-2}^j & f_{|n|-3}^j & \ldots & f_{|n|-n_j-1}^j & \ldots & f_{|n|-2}^k & \ldots & f_{|n|-n_k-1}^k\\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 & z & \ldots & z^{n_j-1} & \ldots & 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix}. \quad (2.2)$$

Если в определителе (2.2) последнюю строку заменить матрицей-строкой

$$\left(f_{l+|n|-2}^1\ f_{l+|n|-3}^1\ \cdots\ f_{l+|n|-n_1-1}^1\ \cdots\ f_{l+|n|-2}^k\ f_{l+|n|-3}^k\ \cdots\ f_{l+|n|-n_k-1}^k\right),$$

то полученный определитель обозначим через $\widetilde{d}_{n,l}$.

Определение 13. Ненулевой индекс $n\in\mathbb{Z}_+^k$ назовем *слабо нормальным для* $\mathbf{f}$ *относительно задачи* B, если ранг матрицы G_n равен $|n|-1$.

В примере 2.1 индекс $n=(3,3)$ не является нормальным и не является слабо нормальным, а в примере 2.2 этот индекс не является нормальным, но является слабо нормальным относительно задачи B для рассматриваемых в этих примерах рядов.

Определение 14. Систему $\mathbf{f}$ назовем *слабо совершенной относительно задачи* B, если все ненулевые индексы $n \in \mathbb{Z}_+^k$ являются слабо нормальными для $\mathbf{f}$ относительно задачи B.

Далее будет установлено, что любой нормальный индекс n для $\mathbf{f}$ относительно задачи B является также и слабо нормальным индексом для $\mathbf{f}$ относительно задачи B. Поэтому любая совершенная система $\mathbf{f}$ относительно задачи B является также и слабо совершенной системой относительно задачи B.

Сформулируем и докажем основную теорему этого параграфа.

Теорема 15. *Для того чтобы для ненулевого индекса* $n \in \mathbb{Z}_+^k$ *задача* B *имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы индекс* n *был слабо нормальным для* $\mathbf{f}$ *относительно задачи* B, *т. е.* $\operatorname{rang} G_n = |n| - 1$.

В случае если $\operatorname{rang} G_n = |n| - 1$, *при определенном выборе нормирующего множителя справедливы следующие представления*:

$$A_j(z) = \det \begin{bmatrix} G_n \\ U_j(z) \end{bmatrix}, \quad j = 1, \dots, k; \tag{2.3}$$

$$L_n(z) = \sum_{l=1}^{\infty} \widetilde{d}_{n,l}\, z^{|n|+l-2}. \tag{2.4}$$

Доказательство. Пусть $n = (n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{Z}_+^k$ — ненулевой мультииндекс, а

$$A_j(z) = b_0^j + b_1^j z + \dots + b_{n_j-1}^j z^{n_j-1}, \quad j = 1, \dots, k.$$

Опираясь на равенство (2.1), запишем в матричной форме систему уравнений для определения коэффициентов многочленов $A_j(z)$:

$$G_n\, b^T = \theta^T, \tag{2.5}$$

где

$$b = (b_0^1 \;\; b_1^1 \;\; \dots \;\; b_{n_1-1}^1 \;\; \dots \;\; b_0^k \;\; b_1^k \;\; \dots \;\; b_{n_k-1}^k)$$

— матрица-строка порядка $1 \times |n|$ (при $n_j = 0$ матрица b не содержит элементов $b_0^j, \dots, b_{n_j-1}^j$), а θ — матрица порядка $1 \times |n|$, все элементы которой равны нулю.

Система линейных уравнений (2.5) является однородной, и в ней число неизвестных на единицу больше числа уравнений. Поэтому из теоремы Кронекера — Капелли следует, что система (2.5) имеет ненулевое решение, а множество всех линейно независимых решений этой системы состоит из одного фундаментального решения тогда и только тогда, когда $\operatorname{rang} G_n = |n| - 1$. В этом случае все остальные ненулевые решения получаются в результате умножения этого фундаментального решения на комплексное число $\lambda \neq 0$. Заметим, что если все коэффициенты рядов (1.1) являются действительными числами, то решение системы (2.5) является матрицей, элементы которой также действительные числа. Первая часть теоремы 2 доказана.

Докажем теперь равенства (2.3), (2.4). Так как $\operatorname{rang} G_n = |n| - 1$, то при некотором $p \in \{1, 2, \dots, |n|\}$ определитель, полученный из матрицы G_n вычеркиванием в ней p-го столбца , отличен от нуля. Для определенности предположим, что $p=|n|$. Тогда систему (2.5) можно записать следующим образом:

$$\begin{pmatrix} f_0^1 & \ldots & 0 & \ldots & f_0^k & \ldots & 0 \\ f_1^1 & \ldots & 0 & \ldots & f_1^k & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n_k-1}^1 & \ldots & f_{n_k-n_1}^1 & \ldots & f_{n_k-1}^k & \ldots & f_1^k \\ f_{n_k}^1 & \ldots & f_{n_k-n_1+1}^1 & \ldots & f_{n_k}^k & \ldots & f_2^k \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{|n|-3}^1 & \ldots & f_{|n|-n_k-2}^1 & \ldots & f_{|n|-3}^k & \ldots & f_{|n|-n_k-1}^k \\ f_{|n|-2}^1 & \ldots & f_{|n|-n_k-1}^1 & \ldots & f_{|n|-2}^k & \ldots & f_{|n|-n_k}^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0^1 \\ \vdots \\ b_{n_k-1}^1 \\ \vdots \\ b_0^k \\ \vdots \\ b_{n_k-2}^k \end{pmatrix} = -b_{n_k-1}^k \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f_0^k \\ f_1^k \\ \vdots \\ f_{|n|-n_k-1}^k \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Обозначим главный определитель системы (2.6) через $\widetilde{H}_n^{n_k}$. По нашему предположению $\widetilde{H}_n^{n_k} \neq 0$. Если бы $b_{n_k-1}^k = 0$, то система (2.6) имела бы единственное нулевое решение. Тогда бы и система (2.5) имела только нулевое решение. Поэтому $b_{n_k-1}^k \neq 0$. Решая систему (2.6) по правилу Крамера, получим решение, которое символически можно записать в виде:

$$\det[G_n \ \ U(z)]^T = A_1(z) + \ldots + A_k(z), \qquad (2.7)$$

где $A_j(z)$ определяются равенствами (2.3), которые в развернутом виде совпадают с (2.2). В случае если бы мы, вычеркивая столбец матрицы G_n с другим номером, получили определитель, отличный от нуля, то, рассуждая аналогичным образом, пришли бы к символической записи решения в виде (2.7).

Докажем, что многочлены $A_j(z)$, определенные равенствами (2.2) и (2.3), действительно являются искомыми многочленами. Разложив определитель в (2.2) по элементам последней строки, получим, что $\deg A_j(z) \leqslant n_j - 1$. Остается доказать выполнение условий (2.1). Заметим, что

$$L_n(z) = \sum_{j=1}^{k} A_j(z) f_j(z) =$$

$$= \begin{vmatrix} f_0^1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & f_0^k & 0 & \ldots & 0 \\ f_1^1 & f_0^1 & \ldots & 0 & \ldots & f_1^k & f_0^k & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{|n|-2}^1 & f_{|n|-3}^1 & \ldots & f_{|n|-n_1-1}^1 & \ldots & f_{|n|-2}^k & f_{|n|-3}^k & \ldots & f_{|n|-n_k-1}^k \\ \sum\limits_{l=0}^{\infty} f_l^1 z^l & \sum\limits_{l=0}^{\infty} f_l^1 z^{l+1} & \ldots & \sum\limits_{l=0}^{\infty} f_l^1 z^{l+n_1-1} & \ldots & \sum\limits_{l=0}^{\infty} f_l^k z^l & \sum\limits_{l=0}^{\infty} f_l^k z^{l+1} & \ldots & \sum\limits_{l=0}^{\infty} f_l^k z^{l+n_k-1} \end{vmatrix}.$$

В полученном определителе из последней строки вычтем первую строку, умноженную на 1, затем вторую строку, умноженную на z, и так далее вплоть до предпоследней строки, умноженной на $z^{|n|-2}$. Тогда

$$L_n(z) = \begin{vmatrix} f_0^1 & \ldots & 0 & \ldots & f_0^k & \ldots & 0 \\ f_1^1 & \ldots & 0 & \ldots & f_1^k & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{|n|-2}^1 & \ldots & f_{|n|-n_1-1}^1 & \ldots & f_{|n|-2}^k & \ldots & f_{|n|-n_k-1}^k \\ \sum\limits_{l=|n|-1}^{\infty} f_l^1 z^l & \ldots & \sum\limits_{l=|n|-1}^{\infty} f_{l-n_1+1}^1 z^l & \ldots & \sum\limits_{l=|n|-1}^{\infty} f_l^k z^l & \ldots & \sum\limits_{l=|n|-1}^{\infty} f_{l-n_k+1}^k z^l \end{vmatrix} = \sum_{l=1}^{\infty} \widetilde{d}_{n,l}\, z^{|n|+l-2}.$$

Здесь также при преобразованиях воспользовались определением суммы степенного ряда и правилом сложения определителей. Равенство (2.4) и теорема 2 доказаны. □

2.3. Замечания и некоторые следствия. Из теоремы 2 следует, что n_j-я компонента слабо нормального индекса $n=(n_1, \ldots, n_k)\in\mathbb{Z}_+^k$ определяет число коэффициентов ряда f_j, которое учитывается при построении многочленов $\{A_p(z)\}_{p=1}^k$. В частности, если $n_j=0$, то в матрице G_n отсутствует блок G^j и, следовательно, при их построении коэффициенты ряда f_j не учитываются, многочлен $A_j(z)\equiv 0$, а порядок мультииндекса n определяется остальными ненулевыми компонентами.

Например, если $n=(n_1, n_2, 0, \ldots, 0)$, то при построении многочленов учитываются только коэффициенты рядов f_1, f_2, и если $f_2(z)\equiv -1$, то в этом случае многочлен $A_1(z)$ представляется определителем из (2.3), в котором каждый из n_2 последних столбцов, которые образуют блок G^2, состоит из нулей и одной -1. Разлагая этот определитель последовательно по элементам каждого такого столбца, с точностью до числового множителя получим, что

$$A_1(z)=\begin{vmatrix} f^1_{n_2} & f^1_{n_2-1} & \ldots & f^1_{n_2-n_1+1} \\ f^1_{n_2+1} & f^1_{n_2} & \ldots & f^1_{n_2-n_1+2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f^1_{n_2+n_1-2} & f^1_{n_2+n_1-3} & \ldots & f^1_{n_2-1} \\ 1 & z^2 & \ldots & z^{n_1-1} \end{vmatrix}.$$

Данное представление многочлена $A_1(z)$ полностью согласуется с равенством Паде (1.3). В этом случае $A_j(z)\equiv 0$ при $j=3, \ldots, k$.

Если же $n=(n_1, 0, \ldots, 0)$, то из (2.3) следует, что $A_1(z)=(f_0^1)^{n_1-1}z^{n_1-1}$, а $A_j(z)\equiv 0$ при $j=2, \ldots, k$ (при $n=(n_1, 0, \ldots, 0)$ явный вид $A_1(z)$ легко найти и непосредственно из условий (2.1)). Отсюда, в частности, следует, что если система $\mathbf{f}$ совершенна относительно задачи B, то $f_0^j\neq 0$ при любом $j=1, \ldots, k$.

Следует также сказать, что если индекс n не является слабо нормальным для $\mathbf{f}$ относительно задачи B, то многочлены $A_j(z)$, определенные равенствами (2.3), не являются решениями задачи B, так как все они тождественно равны нулю. В частности, $A_1(z)=a+bz-(4a+2b)z^2$ в примере 2.1. Однако если $A_1(z)$ находить по формуле (2.3), то получим, что $A_1(z)\equiv 0$.

Из (2.3) вытекает следующий критерий нормальности индекса n для набора $\mathbf{f}$ относительно задачи B.

Следствие 5. *Ненулевой индекс $n=(n_1, \ldots, n_k)\in\mathbb{Z}_+^k$ будет нормальным для* $\mathbf{f}$ *относительно задачи* B *тогда и только тогда, когда*

$$\prod_{j=1}^{k}\widetilde{H}_n^{n_j}\neq 0, \tag{2.8}$$

где $\widetilde{H}_n^{n_j}$ — определитель, полученный из определителя (2.2) *вычеркиванием в нем последней строки и столбца, в котором находится элемент z^{n_j-1}.*

Заметим, что в том случае, когда $n_j = 0$ либо $n_j = 1$, в определителе $\widetilde{H}_n^{n_j}$ отсутствует блок G^j.

Если $k=2$, $\mathbf{f}=(f_1, -1)$ и $(n_1, n_2)=(m+1, n+1)$, то несложно показать, что (2.8) равносильно условию $H_{n+1,m} \cdot H_{n,m+1} \neq 0$. Поэтому следствие 5 согласуется (с учетом обозначений $c_l := f_l^1$, $l=0, 1, \ldots$) с критерием нормальности индекса (1.4).

Следствие 6. *Если система* $\mathbf{f}$ *совершенна относительно задачи* B*, то для любого ненулевого индекса* $n \in \mathbb{Z}_+^k$ *и решения* $A=(A_1, \ldots, A_k)$ *задачи* B *с этим индексом в равенстве* (2.1) *коэффициент* $c_n \neq 0$.

Доказательство. Если система $\mathbf{f}$ совершенна, то произвольный индекс $n \in \mathbb{Z}_+^k$ является нормальным для f относительно задачи B. Поэтому справедливо равенство (2.4), в котором $c_n = \widetilde{d}_{n,1}$. Определитель $\widetilde{d}_{n,1}$ совпадает с определителем $\widetilde{H}_{n^*}^{n_k^*}$, при условии, что индекс $n^* = (n_1^*, \ldots, n_k^*)$ отличается от индекса $n = (n_1, \ldots, n_k)$ только k-й компонентой: $n_k^* = n_k + 1$. Тогда из критерия нормальности индекса (2.8) следует, что $c_n = \widetilde{H}_{n^*}^{n_k^*} \neq 0$. Следствие 6 доказано. □

Покажем, что задачи A и B связаны некоторыми отношениями двойственности. Для этого наряду с системой $\mathbf{f}=(f_1, \ldots, f_k)$ рассмотрим расширенную систему $\overline{\mathbf{f}}=(1, f_1, \ldots, f_k)$.

Следствие 7. *Система* $\mathbf{f}$ *является вполне совершенной относительно задачи* A *тогда и только тогда, когда расширенная система* $\overline{\mathbf{f}}$ *является совершенной относительно задачи* B.

Доказательство. Пусть $\mathbf{f}$ является вполне совершенной относительно задачи A. Тогда для любого индекса $(n, \vec{m})=(n, m_1, \ldots, m_k) \in \mathbb{Z}_+^{k+1}$ выполняется условие (1.16). Покажем, что любой индекс $\vec{n} := (n_0, n_1, \ldots, n_k) \in \mathbb{Z}_+^{k+1}$ является нормальным для $\overline{\mathbf{f}}$ относительно задачи B.

Пусть $\left\{\overline{A}_j(z)\right\}_{j=0}^{k}$ — решение задачи B для индекса $\vec{n}$ и системы $\overline{\mathbf{f}}$. Нужно показать, что $\deg \overline{A}_j = n_j - 1$ при $n_j > 0$. Из критерия (2.8) следует, что это условие будет выполнено, если $\overline{H}_{\vec{n}}^{n_j} \neq 0$ для ненулевого n_j. Здесь и далее $\overline{H}_{\vec{n}}^{n_j}$ — определитель $\widetilde{H}_n^{n_j}$ из (2.8), построенный уже для системы $\overline{\mathbf{f}}$. При $n_j > 1$ и $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ определитель $\overline{H}_{\vec{n}}^{n_j}$ имеет вид

$$\begin{vmatrix} f_{n_0}^1 & \cdots & f_{n_0-n_1+1}^1 & \cdots & f_{n_0}^j & f_{n_0-1}^j & \cdots & f_{n_0-n_j+2}^j & \cdots & f_{n_0}^k & \cdots & f_{n_0-n_k+1}^k \\ f_{n_0+1}^1 & \cdots & f_{n_0-n_1+2}^1 & \cdots & f_{n_0+1}^j & f_{n_0}^j & \cdots & f_{n_0-n_j+3}^j & \cdots & f_{n_0+1}^k & \cdots & f_{n_0-n_k+2}^k \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{|n|-2}^1 & \cdots & f_{|n|-n_1-1}^1 & \cdots & f_{|n|-2}^j & f_{|n|-3}^j & \cdots & f_{|n|-n_j}^j & \cdots & f_{|n|-2}^k & \cdots & f_{|n|-n_k-1}^k \end{vmatrix}.$$

Для доказательства этого представления нужно учесть, что из определения $\overline{H}_{\vec{n}}^{n_j}$ следует, что каждый из первых n_0 столбцов определителя $\overline{H}_{\vec{n}}^{n_j}$, образующих блок G^0, состоит из нулей и одной единицы. Разлагая этот определитель по элементам каждого такого столбца, получим нужное представление. Аналогично показывается, что

$$\overline{H}_{\vec{n}}^{n_0}=\begin{vmatrix} f^1_{n_0-1} & \dots & f^1_{n_0-n_1} & \dots & f^k_{n_0-1} & \dots & f^k_{n_0-n_k} \\ f^1_{n_0} & \dots & f^1_{n_0-n_1+1} & \dots & f^k_{n_0} & \dots & f^k_{n_0-n_k+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f^1_{|n|-2} & \dots & f^1_{|n|-n_1-1} & \dots & f^k_{|n|-2} & \dots & f^k_{|n|-n_k-1} \end{vmatrix}.$$

При $n_j=1$ в $\overline{H}_{\vec{n}}^{n_j}$, $\overline{H}_{\vec{n}}^{n_0}$ отсутствует блок, содержащий коэффициенты ряда f_j.

Теперь нетрудно заметить, что при $n_j>1$, $j\in\{1,2,\dots,k\}$, определитель $\overline{H}_{\vec{n}}^{n_j}$ только знаком может отличаться от по предположению не равного нулю определителя $H^j_{n,\vec{m}}$, в котором индекс $(n,\vec{m}):=(n_0,\dots,n_{j-1},n_j-2,n_{j+1},\dots,n_k)$ отличается от индекса $\vec{n}$ только j-й компонентой. Это следует из того, что $\overline{H}_{\vec{n}}^{n_j}$ равен определителю, который можно получить из определенного указанным образом определителя $H^j_{n,\vec{m}}$ с помощью перестановки его строк, столбцов и транспонирования. По той же причине при $n_j=1$ определитель $\overline{H}_{\vec{n}}^{n_j}$ только знаком может отличаться от неравного нулю определителя $H_{n,\vec{m}}$, в котором индекс $(n,\vec{m}):=(n_0,\dots,n_{j-1},n_j-1,n_{j+1},\dots,n_k)$ отличается от $\vec{n}$ только j-й компонентой.

Покажем, что и $\overline{H}_{\vec{n}}^{n_0}\neq 0$ при $n_0>0$. Действительно, если $\vec{n}=(n_0,0,\dots,0)$, то $\overline{A}_0(z)=z^{n_0-1}$, $\deg\overline{A}_0=n_0-1$ и $\overline{H}_{\vec{n}}^{n_0}\neq 0$. Предположим теперь, что у индекса $\vec{n}$ кроме n_0, еще и $n_j>0$ при некотором $j\in\{1,2,\dots,k\}$. Рассмотрим определитель $H_{n,\vec{m}}$, у которого индекс $(n,\vec{m}):=(n_0-1,\dots,n_{j-1},n_j-1,n_{j+1},\dots,n_k)$ отличается от $\vec{n}$ только 0-й и j-й компонентами. Этот определитель по предположению не равен нулю и только знаком может отличаться от $\overline{H}_{\vec{n}}^{n_0}$.

Предположим теперь, что $\overline{\mathbf{f}}$ является совершенной системой относительно задачи B. Тогда для произвольного индекса $\vec{n}=(n_0,n_1,\dots,n_k)\in\mathbb{Z}_+^{k+1}$ выполняются условия $\prod\limits_{j=0}^{k}\overline{H}_{\vec{n}}^{n_j}\neq 0$. Покажем, что любой индекс $(n,\vec{m})=(n,m_1,\dots,m_k)$ является вполне нормальным для $\mathbf{f}$ относительно задачи A. Для этого необходимо проверить, что выполняется условие (1.16) для этого индекса.

Определитель $H_{n,\vec{m}}$ с точностью до знака равен отличному от нуля определителю $\overline{H}_{\vec{n}}^{n_j}$, в котором индекс $\vec{n}=(n,\dots,m_{j-1},m_j+1,m_{j+1},\dots,m_k)$ отличается от индекса $(n,\vec{m})$ только j-й компонентой. Аналогично замечаем, что $H^j_{n,\vec{m}}$ с точностью до знака равен отличному от нуля определителю $\overline{H}_{\vec{n}}^{n_j}$, в котором $\vec{n}=(n,\dots,m_{j-1},m_j+2,m_{j+1},\dots,m_k)$ отличается от индекса $(n,\vec{m})$ только j-й компонентой. Следовательно, условие (1.16) выполнено. □

Как уже отмечалось выше, если в индексе $\vec{n}$ компонента $n_0=0$, то задача B для системы $\overline{\mathbf{f}}$ вырождается в задачу B для $\mathbf{f}$. В связи с этим введем новое определение.

Определение 16. Задачу B для $\overline{\mathbf{f}}$ будем называть *невырожденной*, если она рассматривается на множестве индексов $\vec{n}=(n_0,n_1,\dots,n_k)\in\mathbb{Z}_+^{k+1}$, у которых $n_0\neq 0$. Систему $\overline{\mathbf{f}}$ будем называть *совершенной относительно невырожденной* *задачи* B, если все индексы $\vec{n} = (n_0, n_1, \ldots, n_k) \in \mathbb{Z}_+^{k+1}$, $n_0 \neq 0$, являются нормальными для $\bar{\mathbf{f}}$ относительно невырожденной задачи B.

Следующее следствие доказывается аналогично предыдущему.

Следствие 8. *Система* $\mathbf{f}$ *является совершенной относительно задачи A тогда и только тогда, когда расширенная система* $\bar{\mathbf{f}}$ *является совершенной относительно невырожденной задачи B.*

Из следствия 7 и сделанных ранее замечаний можно сделать вывод о том, что если система $\bar{\mathbf{f}}$ является совершенной относительно задачи B, то все коэффициенты степенных рядов (1.1) не равны нулю.

Список литературы

[1] *Аптекарев А. И., Буслаев В. И., Мартинес-Финкельштейн А., Суетин С. П.* Аппроксимации Паде, непрерывные дроби и ортогональные многочлены // УМН. 2011. Т. 66, вып. 6(402). С. 37–122.

[2] *Аптекарев А. И., Лысов В. Г., Туляков Д. Н.* Случайные матрицы с внешним источником и асимптотика совместно ортогональных многочленов // Матем. сб. 2011. Т. 202, № 2. С. 3–56.

[3] *Бейкер Дж. мл., Грейвс-Моррис П.* Аппроксимации Паде. М.: Мир, 1986.

[4] *Икономов Н. Р., Суетин С. П.* Алгоритм Висковатова для полиномов Эрмита — Паде // Матем. сб. 2021. Т. 212, № 9. С. 94–118.

[5] *Калягин В. А.* Аппроксимации Эрмита — Паде и спектральный анализ несимметричных операторов // Матем. сб. 1994. Т. 185, № 6. С. 79–100.

[6] *Клейн Ф.* Элементарная математика с точки зрения высшей: В 2-х томах. Т. 1. Арифметика. Алгебра. Анализ. М.: Наука, 1987.

[7] *Лысов В. Г.* Аппроксимации Эрмита — Паде смешанного типа для системы Никишина // Анализ и математическая физика. Сб. статей. М.: МИАН, 2020. С. 213–227. (Труды МИАН; Т. 311).

[8] *Никишин Е. М., Сорокин В. Н.* Рациональные аппроксимации и ортогональность. М.: Наука, 1988.

[9] Рациональные приближения постоянной Эйлера и рекуррентные соотношения. Сб. статей / Под ред. А. И. Аптекарева. М.: МИАН, 2007. (Совр. пробл. матем.; Вып. 9).

[10] *Сорокин В. Н.* Циклические графы и теорема Апери // УМН. 2002. Т. 57, вып. 3(345). С. 99–134.

[11] *Сорокин В. Н.* Аппроксимации Эрмита — Паде функции Вейля и ее производной для дискретных мер // Матем. сб. 2020. Т. 211, № 10. С. 139–156.

[12] *Старовойтов А. П., Рябченко Н. В.* Аналоги формулы Шмидта для полиортогональных многочленов первого типа // Матем. заметки. 2021. Т. 110, вып. 3. С. 424–433.

[13] *Старовойтов А. П., Рябченко Н. В.* О явном виде полиортогональных многочленов // Изв. вузов. Матем. 2021. № 4. С. 80–89.

[14] *Старовойтов А. П., Рябченко Н. В., Драпеза А. А.* О существовании и единственности многочленов Эрмита — Паде первого рода //ПМФТ. 2019. № 3(40). С. 100–103.

[15] *Суетин С. П.* Аппроксимации Паде и эффективное аналитическое продолжение степенного ряда // УМН. 2002. Т. 57, вып. 1(343). С. 45–142.

[16] *Суетин С. П.* Распределение нулей полиномов Паде и аналитическое продолжение // УМН. 2015. Т. 70, вып. 5(425). С. 121–174.

[17] *Суетин С. П.* Полиномы Эрмита — Паде и квадратичные аппроксимации Шафера для многозначных аналитических функций // УМН. 2020. Т. 75, вып. 4(454). С. 213–214.

[18] *Aptekarev A. I., Bleher P. M., Kuijlaars A. B. J.* Large n limit of Gaussian random matrices with external source. Part II // Comm. Math. Phys. 2005. V. 259, № 2. P. 367–389.

[19] *Aptekarev A. I., Branquinho A., Van Assche W.* Multiple orthogonal polynomials for classical weights // Trans. AMS. 2003. V. 355, № 10. P. 3887–3914.

[20] *Aptekarev A. I., Kalyagin V. A., Saff E. B.* Higher-order three-term recurrences and asymptotics of multiple orthogonal polynomials // Constr. Approx. 2009. V. 30, № 2. P. 175–223.

[21] *Beckermann B., Kalyagin V., Matos A. C., Wielonsky F.* How well does the Hermite — Padé approximation smooth the Gibbs phenomenon? // Math. Comput. 2011. V. 80, № 274. P. 931–958.

[22] *Bleher P. M., Kuijlaars A. B. J.* Random matrices with external source and multiple orthogonal polynomials // Int. Math. Res. Not. 2004. V. 3. P. 109–129.

[23] *Boyd J. P.* Chebyshev expansion on intervals with branch points with application to the root of Kepler's equation: A Chebyshev — Hermite — Padé method // J. Comput. Appl. Math. 2009. V. 223, № 2. P. 693–702.

[24] *Chudnovsky G. V.* Hermite — Padé approximations to exponential functions and elementary estimates of the measure of irrationality of π // The Riemann problem, complete integrability and arithmetic applications. New York, Berlin: Springer-Verlag, 1982. P. 299–322. (Lecture Notes in Math.; V. 925).

[25] *Daems E., Kuijlaars A. B. J.* Multiple orthogonal polynomials of mixed type and non-intersecting Brownian motions // J. Approx. Theory. 2007. V. 146. P. 91–114.

[26] *Hermite C.* Sur la généralisation des fractions continues algébriques // Ann. Mat. Pura Appl. Ser. 2A. 1893. V. 21. P. 289–308.

[27] *Hermite C.* Sur la fonction exponentielle // C. R. Acad. Sci. (Paris) 1973. V. 77. P. 18–293.

[28] *Kuijlaars A. B. J.* Multiple orthogonal polynomial ensembles // Recent trends in orthogonal polynomials and approximation theory. Providence, RI: AMS, 2010. P. 155–176. (Contemp. Math.; V. 507).

[29] *Kuijlaars A. B. J., Martínez-Finkelshtein A., Wielonsky F.* Non-intersecting squared Bessel paths and multiple orthogonal polynomials for modified Bessel weights // Comm. Math. Phys. 2009. V. 286, № 1. P. 217–275.

[30] *Lagomasino G. L., Peralta S. M., Szmigielski J.* Mixed type Hermite — Padé approximation inspired by the Degasperis — Procesi equation // Adv. Math. 2019. V. 349. P. 813–838.

[31] *Mahler K.* Applications of some formulae by Hermite to the approximation of exponentials and logarithms // Math. Ann. 1967. V. 168. P. 372–399.

[32] *Padé H.* Mémoire sur les développement en fractions continues de la fonction exponential // Ann. Sci., Ecole Normale Sup. (3). 1899. V. 16. P. 395–426.

[33] *Stahl H.* Asymptotics for quadratic Hermite — Padé polynomals associated with the exponential function // Electron. Trans. Num. Anal. 2002. V. 14. P. 195–222.

[34] *Van Assche W.* Multiple orthogonal polynomials, irrationality and transcedence // Continued fractions: from analytic number theory to constructive approximation (Columbia, MO, USA, 1998). Providence, RI: AMS, 1999. P. 325–342. (Contemp. Math.; V. 236).

Старовойтов Александр Павлович
Гомельский государственный университет
им. Фр. Скорины
E-mail: svoitov@gsu.by

Представлено в редакцию 03.09.2020/20.02.2021

Рябченко Наталия Валерьевна
Гомельский государственный университет
им. Фр. Скорины
E-mail: nmankevich@tut.by