УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«ГОМЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ФРАНЦИСКА СКОРИНЫ»

УДК 512.542

БОРОДИЧ
Тимур Викторович

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА НОРМАЛИЗАТОРЫ ВЫДЕЛЕННЫХ ПОДГРУПП

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

по специальности 01.01.06 — математическая логика,
алгебра и теория чисел

Гомель, 2010

Работа выполнена в учреждении образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Научный руководитель: **Монахов Виктор Степанович**, доктор физико-математических наук, профессор, учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины», профессор кафедры алгебры и геометрии

Официальные оппоненты: **Сафонов Василий Григорьевич**, доктор физико-математических наук, профессор, Министерство образования Республики Беларусь, начальник управления науки и инновационной деятельности

Васильева Татьяна Ивановна, кандидат физико-математических наук, доцент, учреждение образования «Белорусский государственный университет транспорта», доцент кафедры высшей математики

Оппонирующая организация — учреждение образования «Полоцкий государственный университет».

Защита состоится « 3 » февраля 2011 года в $14^{\underline{00}}$ на заседании совета по защите диссертаций Д 02.12.01 при учреждении образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины» по адресу: 246019, г. Гомель, ул. Советская, 104, ауд. 1-20. Телефон ученого секретаря: 57-37-91. E-mail: SovetD021201@tut.by

С диссертацией можно ознакомиться в читальном зале № 1 библиотеки учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».

Автореферат разослан « 31 » декабря 2010 года.

Ученый секретарь
совета по защите диссертаций Ходанович Д.А.

КРАТКОЕ ВВЕДЕНИЕ

Все рассматриваемые в диссертации группы являются конечными.

В исследовании групп и их классов ключевую роль занимает отношение между нормализаторами выделенных подгрупп и структурой самой группы. Например, согласно классической теореме Л. Силова, индекс нормализатора силовской p-подгруппы сравним с единицей по модулю p и совпадает с числом силовских p-подгрупп. Классический результат У. Бернсайда утверждает, что группа G является p-нильпотентной, если нормализатор силовской p-подгруппы равен централизатору этой силовской подгруппы. Хорошо известен также результат Г. Глаубермана:

если нормализаторы силовских подгрупп примарны, то группа примарна.

Ввиду этого результата естественно возникает вопрос: будет ли группа G нильпотентной, если для каждого простого числа p нормализатор силовской p-подгруппы из G p-нильпотентен? Исчерпывающий ответ был получен в работе А. Баллестера-Болинше и Л.А. Шеметкова[1]:

если для каждого простого числа p нормализатор силовской p-подгруппы группы p-нильпотентен, то группа нильпотентна.

В. А. Ведерников исследовал[2] влияния индексов нормализаторов силовских подгрупп на структуру группы и доказал разрешимость группы, у которой порядки всех классов сопряженных силовских подгрупп есть степени простых чисел. При доказательстве использовалась непростота таких групп, установленная ранее П. И. Трофимовым[3]. Поскольку порядок класса сопряженных подгрупп совпадает с индексом нормализатора любой подгруппы из этого класса, то теорему В. А. Ведерникова можно сформулировать так:

если индексы нормализаторов силовских подгрупп в группе примарны, то группа разрешима.

В такой формулировке эта теорема вновь доказывалась в работах[4 −5].

А. С. Кондратьев[6] используя классификацию конечных простых групп

[1]Баллестер-Болинше, А. О нормализаторах силовских подгрупп в конечных группах / А. Баллестер-Болинше, Л. А. Шеметков // Сиб. матем. журнал. — 1999. — Т. 40, № 1. — С. 3–5.

[2]Ведерников, В. А. О признаках разрешимости и сверхразрешимости конечных групп / В. А. Ведерников // Сиб. матем. журнал. — 1967. — Т. 8, № 6. — С. 1236–1244.

[3]Трофимов, П. И. О признаках непростоты и разрешимости конечных групп / П. И. Трофимов // Сиб. матем. журнал. — 1962. — Т. 3, № 6. — С. 876–881.

[4]Buchthal, D. On factorized groups / D. Buchthal // Trans. Amer. Math. Soc. — 1973. — Vol. 183. — P. 425–432.

[5]Го, В. Конечные группы с заданными индексами нормализаторов силовских подгрупп / В. Го // Сиб. матем. журнал. — 1996. — Т. 37, № 2. — С. 295–300.

[6]Кондратьев, А. С. Критерий 2-нильпотентности конечных групп / А. С. Кондратьев // Подгрупповая структура групп. — 1988. — С. 82–84.

установил 2-нильпотентность группы, в которой нормализатор любой силовской подгруппы имеет нечетный индекс. В. Го[5] доказал следующую теорему:

индекс нормализатора любой силовской подгруппы группы G равен нечетному числу или степени простого числа тогда и только тогда, когда G разрешима и $G = HK$, где H и K — холловы подгруппы группы G, H — 2-нильпотентная группа, K нильпотентна и нормальна в некоторой $2'$-холловой подгруппе группы G.

Позже в совместной работе[7] А. С. Кондратьев и В. Го определили композиционные факторы групп, в которых нормализаторы силовских 3-подгрупп имеют нечетные или примарные индексы. В. Го и К. Шам[8] исследовали строение группы в зависимости от нормализаторов не всех силовских подгрупп, а только части из них. В частности, они установили разрешимость группы, у которой индексы нормализаторов силовских 2- и 3-подгрупп примарны. Их доказательство основано на теореме Е. Фисман, которая использует классификацию конечных простых групп.

П. И. Трофимов в работах[9–10] провел исследование свойств группы в зависимости от значения $d(G)$ наибольшего общего делителя (в дальнейшем НОД) порядков всех классов ненормальных сопряженных подгрупп (т. е. в зависимости от НОД индексов нормализаторов ненормальных подгрупп группы). Данное направление нашло отклик в работе К. Геринга[11], который предложил называть значение $d(G)$ числом Трофимова и установил критерий простоты $d(G)$. В. А. Ведерников[2] развил данное направление. Он исследовал свойства группы в зависимости от НОД не всех индексов ненормальных подгрупп, а только части из них. Через $d_2(G)$ обозначим НОД порядков всех классов ненормальных максимальных сопряженных подгрупп и порядков всех классов ненормальных примарных сопряженных подгрупп группы G. В частности, В. А. Ведерниковым доказана сверхразрешимость группы G при условии, что $d_2(G) > 1$. Кроме того, он установил признаки разрешимости группы G в зависимости от значения НОД порядков всех классов ненормальных k-максимальных сопряженных подгрупп для $k = 1, 2, 3$.

[7]Кондратьев, А. С. Конечные группы в которых нормализаторы силовских 3-подгрупп имеют нечетные или примарные индексы / А. С. Кондратьев, В. Го // Сиб. матем. журнал. — 2009. — Т. 50, № 2. — С. 344–349.

[8]Guo, W. A note on finite groups whose normalizers of Sylow 2-, 3-subgroups are prime power induces / W. Guo, K. P. Shum // J. of Applied Algebra and Discrete Structures. — 2005. — Vol. 3, № 1. — P. 1–9.

[9]Трофимов, П. И. Исследование влияния на свойства конечной группы общего наибольшего делителя порядков всех ее классов неинвариантных сопряженных силовских подгрупп / П. И. Трофимов // Сиб. матем. журнал. — 1963. — Т. 4, № 1. — С. 236–239.

[10]Трофимов, П. И. Заметка о признаках сверхразрешимости и разрешимости конечных групп / П. И. Трофимов // Известия высш. учеб. заведений. Математика. — 1965. — Т. 49, № 6. — С. 144–146.

[11]Hering, Ch. Gruppen mit nichttrivialer Trofimovzahl / Ch. Hering // Arch. Math. — 1964. — Bd. 15, № 6. — S. 404–407.

Ряд интересных работ связан с изучением строения группы с ограничениями на добавления к нормализаторам выделенных подгрупп, отметим часть из них. Д. Бухталь[4] доказал, что если в группе G нормализатор каждой силовской подгруппы обладает циклическим добавлением, то группа G либо сверхразрешима, либо содержит нормальную подгруппу N такую, что G/N изоморфна симметрической группе S_4. Д. Перин[12] показал $2'$-сверхразрешимость группы при условии, что нормализатор каждой силовской подгруппы обладает добавлением $D = TS$, где S — силовская 2-подгруппа, а T — циклическая $2'$-холлова подгруппа из D. В совместной работе[13] Б. Ли, В. Го и Х. Цзяньхун установили разрешимость группы с нильпотентными добавлениями к нормализаторам силовских подгрупп. В работе[14] Э. М. Пальчик доказал следующую теорему: пусть $X = HB$ есть группа с нильпотентной холловой подгруппой H нечетного порядка, а $B = N_X(P)$ для некоторой силовской p-подгруппы P из X. Если $p = 2$, то X является кф $SL(2, 2^n)$-свободной группой для $n > 1$. Тогда X есть p-разрешимая группа. Напомним, что группу X называют кф Y-свободной, если она не имеет композиционных факторов, изоморфных группе Y.

Формационный подход, связанный с этим направлением, разрабатывался в работах Л. А. Шеметкова, В. С. Монахова, М. В. Селькина, А. Даниело, К. Де Виво, Г. Джордано, М. Д. Перес-Рамос и других авторов в период с 1995 по 2010 гг.

Таким образом на современном этапе развития теории групп и их классов исследование влияния индексов нормализаторов подгрупп на строение конечной группы является достаточно актуальным. Дальнейшему развитию этого направления посвящена данная диссертационная работа.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Связь работы с крупными научными программами, темами.

Представленная диссертационная работа выполнялась на кафедре алгебры и геометрии учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины» с 2006 по 2010 гг. в соответствии со следующей научной темой: «Инварианты частично разрешимых конечных групп». Тема входит в Государственную программу фундаментальных исследований «Математические модели», утвержденную решением Президиума НАН Беларуси № 164 от 22 июня 2006 г. (номер госрегистрации в БелИСА —

[12] Perin, D. Finite groups with nicely supplemented sylow normalizers / D. Perin // Trans. of the American math. society. — 1973. — Vol. 183. — P. 431–435.

[13] Ли, Б. Конечные группы, в которых нормализаторы силовских подгрупп имеют нильпотентные холловы добавления / Б. Ли, В. Го, Х. Цзяньхун // Сиб. матем. журнал. — 2009. — Т. 50, № 4. — С. 841–849.

[14] Пальчик, Э. М. О конечных факторизуемых группах с нильпотентным холловым фактором Э. М. Пальчик // Весцi НАН Беларусi. Сер. физ.-матем. навук. — 2009. — № 2. — С. 52–56.

20061847), выполнение темы запланировано на 2006–2010 гг.

Цель и задачи исследования.

Цель диссертационной работы состоит в изучении строения групп с ограничениями на нормализаторы выделенных подгрупп.

В качестве выделенных подгрупп рассматриваются либо силовские подгруппы, либо несубнормальные k-максимальные подгруппы. К ограничениям относятся свойства добавлений к нормализаторам выделенных подгрупп, либо значение НОД индексов этих нормализаторов.

Реализация цели диссертационной работы подразумевает решение следующих задач:

— задача изучения свойств группы с ограничениями на добавления к нормализаторам либо всех силовских подгрупп, либо части из них;

— задача изучения свойств группы в зависимости от значения НОД порядков всех классов несубнормальных сопряженных подгрупп;

— задача изучения свойств группы в зависимости от значения НОД порядков всех классов несубнормальных максимальных сопряженных подгрупп и порядков всех классов несубнормальных примарных сопряженных подгрупп;

— задача изучения строения группы в зависимости от значения НОД порядков всех классов несубнормальных k-ых максимальных сопряженных подгрупп.

Объектом исследования являются группы с ограничениями на нормализаторы выделенных подгрупп.

Предмет исследования — влияние на строение группы свойств добавлений к нормализаторам выделенных подгрупп, либо значения НОД индексов нормализаторов фиксированных подгрупп.

Положения, выносимые на защиту.

1. Разрешимость группы, в которой нормализаторы силовских подгрупп обладают разрешимыми холловыми добавлениями, теорема 3.2.5 [2-А]. Разрешимость группы, в которой нормализаторы силовских 2- и 3-подгрупп обладают нильпотентными холловыми добавлениями, теорема 3.2.6 [2-А].

2. Метанильпотентность группы с неединичным НОД порядков всех классов выделенных подгрупп, теорема 4.1.12 [1-А] и теорема 4.2.7 [3-А].

3. Строение группы в зависимости от НОД порядков всех классов несубнормальных 2-максимальных подгрупп, теорема 4.3.12 [4-А].

4. Строение группы в зависимости от НОД порядков всех классов несубнормальных 3-максимальных подгрупп, теорема 4.4.5 [4-А], следствия 4.4.6–4.4.9 [4-А].

Личный вклад соискателя.

Диссертационная работа выполнена соискателем лично под руководством доктора физико-математических наук, профессора Монахова Виктора Степановича. Научным руководителем были поставлены задачи и предложена методика их исследования. В совместных работах [2-А, 4-А, 7-А] основные идеи и методы принадлежат научному руководителю, а реализованы соискателем. Остальные работы выполнены самостоятельно и опубликованы без соавторов.

Апробация результатов диссертации.

Основные результаты диссертации докладывались:

— на научных семинарах кафедры алгебры и геометрии Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины;

— на Международной научной конференции «X Белорусская математическая конференция» (Минск, 3-7 ноября 2008 г.);

— на Украинском математическом конгрессе (Киев, 27-29 августа 2009 г.);

— на Международной конференции «Дискретная математика, алгебра и приложения» (Минск 19-22 октября 2009 г.).

Опубликованность результатов.

По теме диссертационного исследования опубликовано 10 работ, в том числе: 4 статьи в научных журналах, 3 статьи в трудах и материалах конференций, 3 тезисов докладов. Общий объём опубликованных материалов составляет 2,531 авторских листа, в том числе: статьи в научных журналах — 1,732 авторских листа, статьи в трудах и материалах конференций — 0,529 авторских листа, тезисы — 0,270 авторских листа.

Структура и объем диссертации.

Диссертация состоит из перечня условных обозначений, введения, общей характеристики работ, четырех глав основной части, заключения и библиографического списка в алфавитном порядке в количестве 42 наименований использованных источников и 10 наименований публикаций соискателя. Полный объем диссертации — 79 страниц, из них 6 страниц занимает библиографический список.

Автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Виктору Степановичу Монахову за внимание и помощь, оказанные им при написании данной диссертации.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Диссертация состоит из перечня условных обозначений, введения, общей характеристики работы, четырех глав основной части, заключения и библиографического списка в алфавитном порядке.

Глава 1 «Краткий обзор литературы по теме диссертации» содержит аналитический обзор литературы по теме диссертации.

В главе 2 «Предварительные сведения» собраны известные исходные понятия и результаты, которые используются на протяжении всех остальных глав диссертации.

Основное содержание диссертации представлено в главах 3 и 4.

Глава 3 «Группы с холловыми добавлениями к нормализаторам силовских подгрупп», посвящена отысканию новых признаков разрешимости группы, с ограничениями на добавления к нормализаторам силовских подгрупп.

В разделе 3.1 исследуется факторизация некоторых простых групп нормализаторами силовских подгрупп.

В разделе 3.2 исследуются группы с ограничениями на добавления к нормализаторам либо всех силовских подгрупп, либо части из них. В частности, установлена разрешимость группы G, в которой нормализаторы силовских подгрупп обладают разрешимыми холловыми добавлениями. Тем самым получено обобщение результатов работ [2, 4, 5].

3.2.5 Теорема [2-А]. *Если в группе G нормализаторы силовских подгрупп обладают разрешимыми холловыми добавлениями, то группа G разрешима.*

В простой группе $PSL(2, 11)$ нециклическая подгруппа порядка 55 является сверхразрешимым холловым дополнением к нормализаторам силовских 2- и 3-подгрупп. Поэтому в теореме 3.2.5 ограничится только нормализаторами силовских 2- и 3-подгрупп нельзя. Этот пример указывает также на то, что группа со сверхразрешимыми холловыми добавлениями к нормализаторам силовских 2- и 3-подгрупп может быть неразрешимой. Однако, если добавления будут нильпотентными, то группа разрешима.

3.2.6 Теорема [2-А]. *Если нормализаторы силовских 2- и 3-подгрупп группы G обладают холловыми нильпотентными добавлениями, то G разрешима.*

Доказательство теорем 3.2.5 и 3.2.6 основывается на результате Л. С. Казарина[15], который использует классификацию простых конечных групп.

[15] Kazarin, L. S. Groups which are the product of two solvable subgroups / L. S. Kazarin // Comm. Algebra. — 1986. — Vol. 14, № 6. — P. 1001–1066.

Глава 4 «Группы с индексами нормализаторов выделенных несубнормальных подгрупп» посвящена исследованию строения группы в зависимости от НОД индексов нормализаторов некоторых несубнормальных подгрупп.

Хорошо известно, что порядок класса сопряженных подгрупп совпадает с индексом нормализатора некоторой подгруппы из этого класса. П. И. Трофимов[9] начал исследовать свойства группы в зависимости от НОД $d(G)$ порядков всех классов ненормальных сопряженных подгрупп (т. е. в зависимости от НОД индексов нормализаторов ненормальных подгрупп). Он установил признаки непростоты, разрешимости и сверхразрешимости в зависимости от значения НОД в работах[9–10]. В частности, им доказано:

если $d(G) > 1$, то $d(G)$ — простое число и группа G сверхразрешима.

В. А. Ведерников[2] развил данное направление. Он исследовал свойства группы в зависимости от НОД $d_2(G)$ порядков всех классов ненормальных максимальных сопряженных подгрупп и порядков всех классов ненормальных примарных сопряженных подгрупп группы G. В частности, он доказал:

если $d_2(G) > 1$, то $d_2(G)$ — простое число и группа G сверхразрешима.

В разделе 4.1 и 4.2 диссертационной работы развивается это направление за счет рассмотрения классов несубнормальных подгрупп. Введем следующие обозначения:

$d^*(G)$ — НОД порядков всех классов несубнормальных сопряженных подгрупп группы G;

$d_2^*(G)$ — НОД порядков всех классов несубнормальных максимальных сопряженных подгрупп и порядков всех классов несубнормальных примарных сопряженных подгрупп группы G.

Напомним, что метанильпотентной называют группу, содержащую нильпотентную нормальную подгруппу, фактор-группа по которой нильпотентна.

Результаты работы[10] получили развитие в следующей теореме.

4.1.12 Теорема [1-А]. *Пусть G — группа и p — простое число, делящее ее порядок. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *значение $d^*(G)$ равно либо 0, либо 1, либо степени некоторого простого числа;*

2) *если $d^*(G) = p$, то группа G сверхразрешима;*

3) *если $d^*(G) = p^n$, то группа G метанильпотентна.*

Следующий результат является развитием соответствующей теоремы из работы[2].

4.2.7 Теорема [3-А]. *Пусть G — группа и p — простое число, делящее ее порядок. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *значение $d_2^*(G)$ равно либо 0, либо 1, либо степени некоторого простого числа;*

2) *если $d_2^*(G) = p$, то группа G сверхразрешима;*

3) *если $d_2^*(G) = p^n$, то группа G метанильпотентна.*

Пример знакопеременной группы A_4 показывает, что у несверхразрешимой группы значение $d^*(G) = d_2^*(G) = 2^2$ может быть степенью некоторого простого числа.

В. А. Ведерников[2] исследовал свойства группы в зависимости от НОД $D_k(G)$ порядков всех классов ненормальных k-максимальных сопряженных подгрупп для $k \leq 3$. В частности, он доказал разрешимость группы в каждом из следующих случаев: $D_1(G) \neq 1$; $D_2(G) \neq 1$; $D_3(G)$ делится на квадрат простого числа.

Естественна возникла следующая задача:

каково нормальное строение группы, если НОД порядков всех классов несубнормальных k-максимальных сопряженных подгрупп отличен от единицы?

В разделах 4.3 и 4.4 диссертационной работы дается ответ на поставленный вопрос для $k = 1, 2, 3$. Введем следующее обозначение:

$D_k^*(G)$ — НОД порядков всех классов несубнормальных k-максимальных сопряженных подгрупп группы G.

Если все k-максимальные подгруппы субнормальны в группе G, либо их нет, то полагаем $D_k^*(G) = 0$. Поскольку максимальная подгруппа субнормальна в точности тогда, когда она нормальна, то $D_1(G) = D_1^*(G)$ для любой группы G. Если G — простая группа, то, очевидно, $D_k(G) = D_k^*(G)$ для любого k. В общем случае $D_k(G) \neq D_k^*(G)$. Например, если G — диэдральная группа порядка 8, то $D_2(G) = 2$, а $D_2^*(G) = 0$. Описание строения групп с $D_2^*(G) \neq 1$ содержится в следующей теореме.

4.3.12 Теорема [4-А]. *Пусть G — группа и $D_2^*(G) \neq 1$. Тогда G разрешима и $n(G) \leqslant 3$. Кроме того, для $q \in \pi(D_2^*(G))$ справедливы следующие утверждения:*

1) *если силовская q-подгруппа Q нормальна в G, то G/Q либо нильпотентна, либо G/Q — группа Шмидта с абелевыми собственными подгруппами;*

2) *если силовская q-подгруппа Q ненормальна в G, то подгруппа Q максимальна и циклическая, $|Q/O_q(G)| = q$, и $G/O_q(G) = [E_{p^\delta}]Z_q$ — группа Шмидта с абелевыми собственными подгруппами.*

Разрешимые группы со вторыми максимальными нильпотентными подгруппами описаны в работе В. А. Белоногова[16]. Приведем формулировку теоремы из этой работы. Индекс внизу при группе означает ее порядок. Символами p, q и r всегда обозначаются различные простые числа, а δ — показатель p по модулю q. Группа типа A — это ненильпотентная группа порядка $p^\delta q$ с минимальной нормальной (элементарной абелевой) подгруппой порядка p^δ. $\Phi^2(G)$ — пересечение всех 2-максимальных подгрупп группы G.

Теорема В. А. Белоногова. *Разрешимая ненильпотентная группа G имеет исключительно нильпотентные 2-максимальные подгруппы тогда и только тогда, когда она есть группа одного из следующих типов:*

1) $G = [P_{p^\alpha}]Q_{q^\beta}$, $|P : P'| = p^\delta$, $|P'| < p^\delta$, *всякий элемент из Q, порядок которого меньше $q^{\beta-1}$, принадлежит $C_G(P)$;*

2) $G = [P_{p^\alpha}]\langle a\rangle_{q^\beta}$, $C_G(a) = \langle a\rangle Z(G) = \langle a\rangle\Phi^2(G)$, $|G : Z(G)| = qp^{2\delta}$;

3) $G = [P_{p^\alpha}]\langle a\rangle_{q^\beta}$, $\Phi(G) = \langle a^q\rangle \times G''$, $|G''| < p^\delta$, $G/\Phi(G)$ *есть прямое произведение группы типа A и группы порядка p;*

4) $G = \langle a\rangle_{p^{1+\varepsilon}}([P_{p^{\delta+\varepsilon}}]\langle b\rangle_q)$, $N_G(\langle b\rangle) = [\langle b\rangle]\langle a\rangle$, $|P : P'| = p^\delta$, $0 \le \varepsilon \le 1$;

5) $G = [P_{p^\delta} \times R_{r^\sigma}]\langle b\rangle_{q^\beta}$, $\langle b^q\rangle \in Z(G)$, $C_G(\langle b\rangle) = \langle b\rangle$, σ *— показатель числа r по модулю q;*

6) $G = [P_{p^\alpha}](\langle a\rangle_q \times \langle b\rangle_r)$, $[P]\langle a\rangle$, $[P]\langle b\rangle$ *— группы Шмидта;*

7) $G = H_{p^\alpha q^\beta} \times \langle c\rangle_r$, H *— группа Шмидта.*

Обозначим через $\mathfrak{B}$ — класс, состоящий из всех разрешимых ненильпотентных групп с нильпотентными 2-максимальными подгруппами, т. е. из групп, перечисленных в теореме В. А. Белоногова. Пусть B_i — группа из пункта i этой теоремы.

Из теоремы В. А. Белоногова несложно получить, что все перечисленные группы дисперсивны и метанильпотентны за исключением группы B_4. У этой группы $n(B_4) = 3$, $l_p(B_4) = 1$ и $l_q(B_4) = 2$.

Напомним, что группа G называется группой Фробениуса, если в ней найдется собственная подгруппа H, совпадающая со своим нормализаторам и взаимно простая со своими сопряженными подгруппами, отличными от H. Последние два условия эквивалентны следующему: $H \cap H^g = 1$ для всех $g \in G \setminus H$. Описание строения групп с $D_3^*(G) \neq 1$ содержится в следующей теореме.

4.4.5 Теорема [4-А]. *Предположим, что $D_3^*(G) \neq 1$ и пусть простое число p делит $D_3^*(G)$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если силовская p-подгруппа P нормальна в G, то G/P либо нильпотентна, либо изоморфна группе из $\mathfrak{B} \setminus B_4$;*

[16] Белоногов, В. А. Конечные разрешимые группы с нильпотентными 2-максимальными подгруппами / В. А. Белоногов // Математические заметки. — 1968. — Т. 3, № 1. — С. 21–32.

2) *если силовская p-подгруппа P ненормальна в G, то P — k-максимальная подгруппа для $k \leqslant 2$, $|P/O_p(G)| \leq p^2$, и либо*

2.1) *подгруппа P 2-максимальна и циклическая, $|P/O_p(G)| = p$;*
либо

2.2) *подгруппа P максимальна, все 2-максимальные подгруппы из P субнормальны в G и*

$$G/O_p(G) = (P/O_p(G))[G_{p'}O_p(G)/O_p(G)]$$

является группой Фробениуса с дополнительным множителем $P/O_p(G)$.

Группа из теоремы 4.4.5 может быть неразрешимой, примером служит простая группа A_5 порядка 60, у которой $D_3^*(A_5) = 15$.

4.4.6 Следствие [4-A]. *Если $D_3^*(G)$ делится на квадрат простого числа, то группа G разрешима.*

4.4.7 Следствие [4-A]. *Если $D_3^*(G)$ — четное число, то группа G разрешима.*

4.4.8 Следствие [4-A]. *Если p делит число $D_3^*(G)$ и силовская p-подгруппа P самонормализуема, то фактор-группа $G/O_p(G)$ является группой Фробениуса с дополнительным множителем $P/O_p(G)$ порядка $\leqslant p^2$. В частности, группа G разрешима.*

4.4.9 Следствие [4-A]. *Если группа G разрешима и $D_3^*(G) \neq 1$, то $n(G) \leq 3$.*

Следствие 4.4.6 обобщает соответствующую теорему В. А. Ведерникова, а следствия 4.4.7 – 4.4.8 являются новыми и в случае, если $D_3^*(G)$ заменить на $D_3(G)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные научные результаты

Исследованы свойства группы с ограничениями на добавления к нормализаторам либо всех силовских подгрупп, либо части из них. В частности, получена разрешимость группы, в которой нормализаторы силовских подгрупп обладают разрешимыми холловыми добавлениями, теорема 3.2.5 [2-A]. Установлена разрешимость группы, в которой нормализаторы силовских 2- и 3-подгрупп обладают нильпотентными холловыми добавлениями, теорема 3.2.6 [2-A].

Изучено влияние значения $d^*(G)$ НОД порядков всех классов несубнормальных сопряженных подгрупп на строение группы. В частности, установлено, что значение $d^*(G)$ равно либо 0, либо 1, либо степени некоторого простого числа. В случае, когда значение $d^*(G)$ отлично от единицы, доказана метанильпотентность группы G, теорема 4.1.12 [1-A].

Проведены исследования влиянии значения $d_2^*(G)$ НОД порядков всех классов несубнормальных максимальных сопряженных подгрупп и порядков всех классов несубнормальных примарных сопряженных подгрупп на строение группы. Установлено, что $d_2^*(G)$ может принимать значения либо 0, либо 1, либо степени некоторого простого числа, и группа G метанильпотентна при $d_2^*(G) \neq 1$, теорема 4.2.7 [3-A].

Получено описание нормального строения группы в зависимости от значения $D_k^*(G)$ НОД порядков всех классов несубнормальных k-максимальных сопряженных подгрупп при $k \in \{2, 3\}$, теоремы 4.3.12 и 4.4.5 [4-A]. Отсюда выведены новые признаки разрешимости группы в следующих случаях: $D_2^*(G)$ отлично от единицы; $D_3^*(G)$ делится на квадрат простого числа; $D_3^*(G)$ — четное число; простое число p делит число $D_3^*(G)$ и силовская p-подгруппа самонормализуема.

Рекомендации по практическому использованию результатов диссертации

Работа имеет теоретический характер. Результаты диссертации устанавливают ряд новых свойств групп с ограничениями на свойства добавлений к нормализаторам фиксированных подгрупп, либо на значение НОД индексов нормализаторов отдельных подгрупп, которые могут быть использованы в исследованиях влияния нормализаторов выделенных подгрупп на строение конечных групп.

Некоторые результаты могут применяться в учебном процессе при чтении спецкурсов для студентов математических специальностей, написании курсовых и дипломных работ, магистерских и кандидатских диссертаций.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ СОИСКАТЕЛЯ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в научных журналах

1-А. Бородич, Т. В. О классах несубнормальных подгрупп конечной группы / Т. В. Бородич // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. — 2008. — № 2 (47). — С. 33–36.

2-А. Монахов, В. С. О разрешимости группы с холловыми добавлениями к нормализаторам силовских подгрупп / В. С. Монахов, Т. В. Бородич // Математические заметки. — 2009. — Т. 85, № 2. — С. 227–233. Английская версия: Monakhov, V. S. Solvability of any group with Hall supplements to normalizers of Sylow subgroups / V. S. Monakhov, T. V. Borodich // Mathematical Notes. — 2009. — Vol. 85, № 2. — P. 209–214.

3-А. Бородич, Т. В. Метанильпотентность группы с нееденичным НОД индексов некоторых подгрупп / Т. В. Бородич // Веснік Брэсцкага ун-та. Сер. прыродазнаучых навук. — 2009. — № 1 (32). — С. 5–8.

4-А. Монахов, В. С. Влияние индексов нормализаторов несубнормальных 2- и 3-максимальных подгрупп на строение конечной группы / В. С. Монахов, Т. В. Бородич // Веснік Віцебскага дзярж. ун-та. — 2010. — № 2 (56). — С. 35–41.

Статьи в трудах и материалах конференций

5-А. Бородич, Т. В. Влияние несубнормальных подгрупп на строение конечной группы / Т. В. Бородич // Украинский математический конгресс : материалы науч. конф., Киев, 27-29 августа 2009 г. / Ин-т матем. НАН Украины [Электронный ресурс]. — 2009. — Режим доступа : www.imath.kiev.ua/ congress2009/Abstract/. — Дата доступа : 7.07.2009.

6-А. Бородич, Т. В. Строение конечной группы в зависимости от несубнормальных 2-максимальных подгрупп / Т. В. Бородич // Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях : материалы XIII Республиканской науч. конф. студентов и аспирантов, Гомель, 15-17 марта 2010 г. / Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины ; редкол.: О. М. Демиденко [и др.]. — Гомель, 2010. — Ч. 1. — С. 288-289.

7-А. Бородич, Т. В. Влияние индексов нормализаторов несубнормальных 2- и 3-максимальных подгрупп на строение группы / Т. В. Бородич, В. С. Монахов // Группы и их приложения : труды междунар. школы-конф. по теории групп, посвящ. 75-летию В. А Белоногова, Нальчик, 5-10 июля 2010 г. / Кабардино-Болкарский гос. ун-т ; редкол.: А. Х. Журтов [и др.]. — Нальчик, 2010. — С. 27-31.

Тезисы докладов

8-А. Бородич, Т. В. О разрешимости конечной группы с $\mathfrak{F}$-добавлениями к нормализаторам силовских 2- и 3-подгруппам / Т. В. Бородич // Междунар. алгебр. конф., посвящ. 100-летию со дня рождения А. Г. Куроша : тез. докл., Москва, 28 мая — 3 июня 2008 г. / Московский гос. ун-т. ; редкол.: Э. Б. Винберг [и др.]. — Москва, 2008. — С. 43-44.

9-А. Бородич, Т. В. О разрешимости конечных групп с холловыми добавлениями к нормализаторам силовских подгрупп / Т. В. Бородич // X Белорусская математическая конференция : тез. докл. Междунар. науч. конф., Минск, 3–7 ноября 2008 г. / Ин-т матем. Нац. акад. наук Беларуси ; редкол.: С. Г. Красовский [и др.]. — Минск, 2008. — Ч. 1. — С. 6-7.

10-А. Бородич, Т. В. О конечных группах с 3-максимальными несубнормальными подгруппами / Т. В. Бородич // Дискретная математика, алгебра и приложения : тез. докл. Междунар. науч. конф., посвящ. 80-летию со дня рождения Р. И. Тышкевич, Минск, 19-22 октября 2009 г. / Ин-т матем. Нац. акад. наук Беларуси, Беларусский гос. ун-т ; редкол.: А. А. Лепин [и др.]. — Минск, 2009. — С. 10-11.

Р Э З Ю М Э

Барадзіч Цімур Віктаравіч

Канечныя группы з абмежаваннямі на нармалізатары адзначаных падгруп

Ключавыя словы: канечная група, фактарызуемая група, нармалізатар падгрупы, сілаўская падгрупа, k-максімальная падгрупа, вырашальная група, звышвырашальная група, нільпатэнтная група.

У дысертацыі даследуецца ўплыў індыксаў нармалізатараў адзначаных падгруп на страенне канечнай групы. Атрымана вырашальнасць канечнай групы, у якой нармалізатары сілаўскіх падгруп валодаюць вырашальным холавым даданнем, а таксама ў выніку, калі нармалізатары сілаўскіх 2- и 3-падгруп валодаюць нільпатэнтнымі холавымі даданнямі. Вывучан ўплыу значэння НОД парадкаў усіх класаў несубнармальных спалучаных падгруп на будову групы. У прыватнасьці, усталявана метанільпатэнтнасьць групы з неадзінкавым значэннем гэтага НОД. Даказана метанільпатэнтнасьць групы з неадзінкавым значэннем НОД парадкаў усіх класаў несубнармальных максімальных спалучаных падгруп і парадкаў усіх класаў несубнармальных прымарных спалучаных падгруп. Атрымана апісанне нармальнай будовы групы ў залежнасці ад значэння $D_k^*(G)$ НОД парадкаў усіх класаў несубнармальных k-максімальных спалучаных падгруп для $k \in \{2, 3\}$. З гэтага выведзены новыя прыкметы вырашальнасці ў наступных выпадках: $D_2^*(G)$ адрозна ад адзінкі; $D_3^*(G)$ падзяляецца на квадрат простага ліка; $D_3^*(G)$ — цотны лік; просты лік p падзяляе лік $D_3^*(G)$ і сілаўская p-подгрупа саманармалізуема.

Усе атрыманыя вынікі працы з'яўляюцца новымі. Яны маюць тэарэтычны характар і могуць быць выкарыстаныя ў даследаваннях па тэорыі груп, а таксама пры выкладанні спецкурсаў ва ўніверсітэтах.

Р Е З Ю М Е

Бородич Тимур Викторович

Конечные группы с ограничениями на нормализаторы выделенных подгрупп

Ключевые слова: конечная группа, нормализатор подгруппы, силовская подгруппа, k-максимальная подгруппа, разрешимая группа, сверхразрешимая группа, нильпотентная группа.

В диссертации исследуется влияние индексов нормализаторов фиксированных подгрупп на строение конечной группы. Получена разрешимость группы, в которой нормализаторы силовских подгрупп обладают разрешимыми холловыми добавлениями, а также в случае, когда нормализаторы силовских 2- и 3-подгрупп обладают нильпотентными холловыми добавлениями. Изучено влияние значения НОД порядков всех классов несубнормальных сопряженных подгрупп на строение группы. В частности, установлена метанильпотентность группы с неединичный значением этого НОД. Доказана метанильпотентность группы с неединичным значением НОД порядков всех классов несубнормальных максимальных сопряженных подгрупп и порядков всех классов несубнормальных примарных сопряженных подгрупп. Получено описание нормального строения группы в зависимости от значения $D_k^*(G)$ НОД порядков всех классов несубнормальных k-максимальных сопряженных подгрупп для $k \in \{2, 3\}$. Отсюда выведены новые признаки разрешимости группы в следующих случаях: $D_2^*(G)$ отлично от единицы; $D_3^*(G)$ делится на квадрат простого числа; $D_3^*(G)$ — четное число; простое число p делит число $D_3^*(G)$ и силовская p-подгруппа самонормализуема.

Все полученные результаты диссертации являются новыми. Они имеют теоретический характер и могут быть использованы в исследованиях по теории групп, а также при чтении спецкурсов в университетах.

S U M M A R Y

Borodich Timur Viktorovich

Finite groups with restrict to normslizers distinguish subgroups

Key words: finite group, factorized group, normalizer of subgroup, Sylow subgroup, k-maximal subgroup, solvable group, supersolvable group, nilpotent subgroup.

In the dissertation influence of indexes normalizers is investigated the fixed subgroups on a structure of final group. Solvability of group in which normalizers of the Sylow subgroups possess solvable hall addition, and also in case when normalizer of the Sylow 2- and 3-subgroup possess nilpotents hall addition is received. Influence of value GCM (great common measure) of the order of all classes of conjugate of non-subnormal subgroup on a group structure is studies. In particular, it is established metonilpotence groups with not equal to 1 value of it GCM. It is proved metonilpotence groups with not equal to 1 value GCM of the order of all classes of conjugate of non-subnormal maximally subgroup and of all classes of conjugate of non-subnormal prime-power subgroup. The description of a normal structure of group depending of value $D_k^*(G)$ GCM of the order of all classes of conjugate not-subnormal k-maximum subgroups for $k \in \{2, 3\}$. From here new signs of solvability in following cases are deduced: $D_2^*(G)$ not equal to 1; $D_3^*(G)$ divide by a square of simple number; $D_3^*(G)$ — even number; the simple p divides number $D_3^*(G)$ and Sylow p-subgroup self-normalizer.

All the main results of this thesis are new. They have a theoretical significance and may be used in the investigations in theories of finite groups, and also while teaching special courses in universities.

Бородич Тимур Викторович

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА НОРМАЛИЗАТОРЫ ВЫДЕЛЕННЫХ ПОДГРУПП

Автореферат диссертации
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Подписано в печать 30.12.2010. Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Ризография. Усл. печ. л. 1,1.
Уч.-изд. л. 1,2. Тираж 60 экз. Заказ № 645.

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»
ЛИ № 02330/0549481 от 14.05.2009.
ЛП № 02330/0150450 от 03.02.2009.
Ул. Советская, 104, 246019, Гомель