Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6 (141), 2023

Математика

УДК 512.542 EDN: LPLNIR

О классе конечных групп, факторизуемых субнормальными сверхразрешимыми подгруппами

В.С. Монахов, Д.А. Ходанович

Устанавливаются общие свойства класса $\mathfrak{H}$, состоящего из всех конечных групп, являющихся произведением двух субнормальных сверхразрешимых подгрупп. В частности, доказывается, что класс $\mathfrak{H}$ является насыщенным гомоморфом, все подгруппы Шмидта в группе $G \in \mathfrak{H}$ сверхразрешимы, но $\mathfrak{H}$ не является классом Фиттинга и не является формацией.
Ключевые слова: конечная группа, сверхразрешимая подгруппа, субнормальная подгруппа, формация, класс Фиттинга.

We establish the general properties of the $\mathfrak{H}$ class, which consists of all finite groups that are the product of two subnormal supersoluble subgroups. In particular, it is proved that the class $\mathfrak{H}$ is a saturated homomorph, all Schmidt subgroups in the group $G \in \mathfrak{H}$ are supersoluble, but $\mathfrak{H}$ is not a Fitting class and is not a formation.
Keywords: finite group, supersoluble subgroup, subnormal subgroup, formation, Fitting class.

Введение. Все обозначения и терминология теории групп и их классов соответствуют [1], [2]. Рассматриваются только конечные группы.

Поскольку произведение нормальных нильпотентных подгрупп является нильпотентной подгруппой, то класс $\mathfrak{N}$ всех нильпотентных групп является радикальным классом (:= классом Фиттинга). Класс $\mathfrak{S}$ всех разрешимых групп также радикален. Классы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{U}$ всех абелевых и сверхразрешимых групп не радикальны. На нерадикальность класса $\mathfrak{A}$ указывает неабелева группа порядка p^3, p – любое простое число. Первый пример, поясняющий нерадикальность класса $\mathfrak{U}$, построил Хупперт [3].

Пример 1 (Хупперт [3]). Пусть $C_5^2 = \langle a, b \mid a^5 = b^5 = 1, ab = ba\rangle$ – элементарная абелева группа порядка 5^2, $Q = \langle c, d \mid c^4 = d^4 = 1, c^2 = d^2, d^{-1}cd = c^{-1}\rangle$ – группа кватернионов порядка 8 и $G = C_5^2 \rtimes Q_8$ – их полупрямое произведение, которое определяется следующими соотношениями:

$$cac^{-1} = b^{-1}, dad^{-1} = a^3, cbc^{-1} = a, dbd^{-1} = b^2.$$

В группе G имеются три сверхразрешимые подгруппы $H = C_5^2 \rtimes \langle c\rangle$, $K = C_5^2 \rtimes \langle d\rangle$ и $L = C_5^2 \rtimes \langle cd\rangle$, которые нормальны в G и $G = HK = HL = KL$. Коммутант $G' = C_5^2 \rtimes \langle cd\rangle$ ненильпотентен, поэтому G несверхразрешима.

Группы, факторизуемые нормальными сверхразрешимыми подгруппами, изучались в работах [4]–[10]. В частности, первые признаки сверхразрешимости таких факторизуемых групп установили Бэр [4], Фризен [5], А.Ф. и Т.И. Васильевы [6]. В работе [11] показано, что условие нормальности сомножителей в этих признаках можно ослабить до субнормальности.

В итоге получается следующая теорема.

Теорема A ([11, теорема 3]). *Если A и B – субнормальные сверхразрешимые подгруппы группы $G = AB$, то G сверхразрешима в каждом из следующих случаев*:

(1) *взаимный коммутант $[A, B]$ нильпотентен; в частности, коммутант G' нильпотентен*;

(2) *индексы подгрупп A и B в группе G взаимно просты*;

(3) *в группе G существует нильпотентная нормальная подгруппа W такая, что в фактор-группе G / W все силовские подгруппы абелевы*;

(4) $(G_r)' \le F(G)$ *для каждого* $r \in \pi(G : F(G)A) \cap \pi(G : F(G)B)$.

Если подгруппы A и B нормальны в $G = AB$, то в случаях (1)–(3) теорема А превращается соответственно в результаты Бэра [4], Фризен [5] и А.Ф. и Т.И. Васильевых [6]. Теорема А в случае (4) получена в [11] впервые.

Не все признаки сверхразрешимости группы $G = AB$ с нормальными сверхразрешимыми подгруппами A и B переносятся на группы с субнормальными сомножителями. Например, из теоремы А (1) вытекает сверхразрешимость группы $G = AB$ с нормальными сверхразрешимыми подгруппами A и B при условии, что $A \cap B$ нильпотентна [8, 1.1]. Следующий пример указывает, что в этом утверждении нормальность ни одного из сомножителей нельзя ослабить до субнормальности.

Пример 2 ([4, с. 186]). Пусть $C_p^2 = \langle a\rangle \times \langle b\rangle$ – элементарная абелева группа порядка p^2, простое число $p \not\equiv 1 \pmod 4$, $D = \langle c, d \mid c^4 = d^2 = 1, c^d = c^3\rangle$ – диэдральная группа порядка 8, которая действует на C_p^2 следующим образом:

$$a^c = b^{-1}, b^c = a, a^d = b, b^d = a.$$

Пусть $G = C_p^2 \rtimes D_8$ – подгруппа из голоморфа C_p^2. Рассмотрим подгруппы

$$A = C_p^2 \rtimes (\langle c^2\rangle \times \langle d\rangle),\ H = C_p^2 \rtimes (\langle c^2\rangle \times \langle cd\rangle),\ B = C_p^2 \rtimes (\langle cd\rangle).$$

Подгруппы A и H нормальны в G, поскольку $|G : A| = |G : H| = 2$, а B нормальна в H, поэтому B субнормальна в G и $G = AH = AB$. Так как $\langle ab\rangle$ нормальна в A, а $\langle a\rangle$ нормальна в H, то A и H сверхразрешимы. Поскольку $a^{c^2} = a^{-1}$, то коммутант $G' = C_p^2 \rtimes \langle c^2\rangle = A \cap H$ ненильпотентен и G несверхразрешима. Ясно, что $A \cap B = C_p^2$ нильпотентна. ⊠

В работе [11] установлено также, что сверхразрешимый корадикал группы $G = AB$ с субнормальными сверхразрешимыми подгруппами A и B совпадает с нильпотентным корадикалом коммутанта группы.

Обозначим через $\mathfrak{H}$ класс всех групп, являющихся произведением двух субнормальных сверхразрешимых подгрупп. Ясно, что $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{S}$ и любая несверхразрешимая группа с единственной нормальной максимальной подгруппой (например, знакопеременная группа A_4) не принадлежит $\mathfrak{H}$, т. е. $\mathfrak{H} \neq \mathfrak{S}$. Пример Хупперта подтверждает, что $\mathfrak{U} \neq \mathfrak{H}$. Поэтому оба включения $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{H} \subset \mathfrak{S}$ собственные.

В настоящей заметке устанавливаются общие свойства класса $\mathfrak{H}$ и получен признак сверхразрешимости группы $G \in \mathfrak{H}$, уточняющий теорему А (4).

1. Используемые обозначения и вспомогательные утверждения. Множество всех натуральных и всех простых чисел обозначается через $\mathbb{N}$ и $\mathbb{P}$ соответственно, а $\pi \subseteq \mathbb{P}$. Через $\pi(n)$ обозначается множество всех простых чисел, делящих $n \in \mathbb{N}$. Запись $X \le Y$, $X < Y$, $X \lhd Y$, $X \lhd\lhd Y$ означает, что X – подгруппа в группе Y, соответственно, собственная подгруппа, нормальная подгруппа, субнормальная подгруппа; $|X|$ – порядок группы X и $|X : Y|$ – индекс $Y \le X$. Подгруппы Фиттинга, Фраттини, коммутант и центр группы G обозначаются через $F(G)$, $\Phi(G)$, G' и $Z(G)$ соответственно, а G_π – π-холлова подгруппа группы G. Если

$$|G| = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n},\ p_1 < p_2 < \ldots < p_n,\ \alpha_i \in \mathbb{N}, \forall i,$$

и группа G имеет нормальный ряд

$$G = G_0 \ge G_1 \ge \ldots \ge G_{n-1} \ge G_n = 1, G_i \lhd G, \forall i$$

такой, что G_{i-1} / G_i изоморфна силовской p_i-подгруппе группы G для каждого i, то говорят, что группа G имеет силовскую башню сверхразрешимого типа. Класс всех групп, имеющих силовские башни сверхразрешимого типа, будем обозначать $\mathfrak{D}$, он является наследственной насыщенной радикальной формацией.

Пересечение всех нормальных подгрупп группы G, фактор-группы по которым принадлежат формации $\mathfrak{F}$, обозначается через $G^{\mathfrak{F}}$ и называется $\mathfrak{F}$-корадикалом группы G. Понятно, что $G^{\mathfrak{F}}$ – наименьшая нормальная в G подгруппа, фактор-группа по которой принадлежит $\mathfrak{F}$. Если формации $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{F}$ таковы, что $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$, то $G^{\mathfrak{F}} \le G^{\mathfrak{X}}$, в частности, $G^{\mathfrak{U}} \le G^{\mathfrak{N}} \le G^{\mathfrak{A}} = G'$.

Пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{F}$ – наследственные формации. Согласно [2, с. 191] и [12, с. 337] произведение

$$\mathfrak{X}\mathfrak{F} = \{G \in \mathfrak{E} \mid G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{X}\}$$

также является наследственной формацией. При $\mathfrak{F} = \mathfrak{X}$ вместо $\mathfrak{X}\mathfrak{X}$ пишем $\mathfrak{X}^2$. В частности, $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$ – формация всех групп с нильпотентным коммутантом, $\mathfrak{N}^2$ – формация всех метанильпотентных групп, а $\mathfrak{N}\mathfrak{A}^2$ – формация всех групп, у которых фактор-группа по подгруппе Фиттинга метабелева. Все три формации $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$, $\mathfrak{N}^2$ и $\mathfrak{N}\mathfrak{A}^2$ наследственные и насыщенные, формации $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{N}\mathfrak{A}^2$ не радикальны, а формация $\mathfrak{N}^2$ радикальна.

Через C_n и D_n обозначаются циклическая и диэдральная группы порядка n, $C_n^2 = C_n \times C_n$, S_n – симметрическая группа степени n, а запись $U \rtimes V$ означает группу, которая является полупрямым произведением подгрупп, изоморфных группам U и V, с нормальной подгруппой U.

Группой Шмидта называют ненильпотентную группу с нильпотентными собственными подгруппами. В работе [13] введены и изучены классы групп $\mathrm{sh}\mathfrak{U}$ и $\mathrm{sh}\overline{\mathfrak{U}}$, состоящие из всех групп, в которых каждая подгруппа Шмидта сверхразрешима и несверхразрешима соответственно. Оба класса являются наследственными насыщенными радикальными формациями и полностью описаны группы из этих двух классов. В частности, справедлива

Лемма 1 [13, теорема 1]. *Для группы G следующие утверждения эквивалентны*:

(1) $G \in \mathrm{sh}\mathfrak{U}$;

(2) $G \in \mathfrak{D}$ *и для каждой пары простых чисел* $p > q$, q *не делит* $p - 1$, *бипримарная* $\{p, q\}$*-холлова в* G *подгруппа нильпотентна*.

Лемма 2. *Если p и q – различные простые числа, $p > q$ и q не делит $p - 1$, то любая сверхразрешимая $\{p, q\}$-группа нильпотентна.*

Доказательство. Предположим противное и пусть G – ненильпотентная группа минимального порядка, удовлетворяющая условию леммы. Так как G ненильпотентна, то в G существует подгруппа Шмидта S. Для S выполняются требования леммы, поэтому $S = G$. Согласно [13, лемма 1] группа G имеет порядок pq^n для некоторого натурального n и q делит $p - 1$, противоречие. Поэтому предположение неверно и группа нильпотентна.

2. Общие свойства класса $\mathfrak{H}$. Нам потребуется следующая лемма.

Лемма 3 [11, лемма 9]. *Пусть группа $G = AB$ является произведением субнормальных сверхразрешимых подгрупп A и B. Тогда справедливы следующие утверждения*:

(1) *группа G имеет силовскую башню сверхразрешимого типа*;

(2) *фактор-группа $G / F(G)$ нильпотентна и является произведением двух субнормальных абелевых подгрупп $AF(G) / F(G)$ и $BF(G) / F(G)$.*

Теорема 1. (1) *$\mathfrak{H}$ – гомоморф, т. е. если $G \in \mathfrak{H}$ и $N \lhd G$, то $G / N \in \mathfrak{H}$.*

(2) *$\mathfrak{H}$ замкнут относительно прямых произведений, т. е. если $G_i \in \mathfrak{H}$, $i = 1,2$, то $G_1 \times G_2 \in \mathfrak{H}$.*

(3) *$\mathfrak{H}$ замкнут относительно холловых подгрупп, т. е. если $G \in \mathfrak{H}$,* то *$G_\pi \in \mathfrak{H}$ для всех $\pi \subseteq \pi(G)$.*

(4) *$\mathfrak{H}$ – насыщенный класс, т. е. если $G / \Phi(G) \in \mathfrak{H}$, то $G \in \mathfrak{H}$.*

(5) *Если Z – циклическая нормальная подгруппа в G, или $Z \le Z(G)$, и $G / Z \in \mathfrak{H}$, то $G \in \mathfrak{H}$.*

(6) *Класс $\mathfrak{H}$ не замкнут относительно нормальных подгрупп, в частности, класс $\mathfrak{H}$ не является классом Фиттинга.*

(7) *Класс $\mathfrak{H}$ не является классом Шунка и не является формацией.*

(8) $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{H} \subset \mathfrak{D} \cap \mathfrak{N}^2 \cap \mathfrak{N}\mathfrak{A}^2$.

(9) *Минимальная несверхразрешимая группа* $G \in \mathfrak{H}$ *тогда и только тогда, когда* G – *бипримарная минимальная несверхразрешимая группа с нециклическими силовскими подгруппами.*

(10) $\mathfrak{H} \subseteq \mathrm{sh}\mathfrak{U} \cap \mathfrak{N}^2 \cap \mathfrak{N}\mathfrak{A}^2$. *В частности, каждая подгруппа Шмидта группы* $G \in \mathfrak{H}$ *сверхразрешима*.

Доказательство. (1) Если $G \in \mathfrak{H}$, то $G = AB$, подгруппы A и B субнормальны в G и сверхразрешимы. Поскольку $G/N = (AN/N)(BN/B)$, подгруппы $AN/N \cong A/A \cap N$ и $BN/N \cong B/B \cap N$ субнормальны в G/N и сверхразрешимы, то $G/N \in \mathfrak{H}$.

(2) Если $G_i \in \mathfrak{H}$, $i = 1, 2$, то $G_i = A_i B_i$, подгруппы A_i и B_i субнормальны в G_i и сверхразрешимы. Поскольку $G_1 \times G_2 = (A_1 \times A_2)(B_1 \times B_2)$, подгруппы $A_1 \times A_2$ и $B_1 \times B_2$ субнормальны в $G_1 \times G_2$ и сверхразрешимы, то $G_1 \times G_2 \in \mathfrak{H}$.

(3) Если $G \in \mathfrak{H}$, то $G = AB$, подгруппы A и B субнормальны в G и сверхразрешимы. Поскольку группа G разрешима, то для любого множества $\pi \subseteq \pi(G)$ согласно [14, VI. 4.7] существуют π-холловы подгруппы G_π, A_π и B_π такие, что $G_\pi = A_\pi B_\pi$. Поскольку $A \lhd\lhd G$ и $A_\pi = A \cap G_\pi$, то $A_\pi \lhd\lhd G_\pi$ и A_π сверхразрешима. Аналогично, $B_\pi \lhd\lhd G_\pi$ и B_π сверхразрешима. Поэтому $G_\pi \in \mathfrak{H}$.

(4) Если $G/\Phi(G) \in \mathfrak{H}$, то $G/\Phi(G) = (A/\Phi(G))(B/\Phi(G))$, подгруппы $A/\Phi(G)$ и $B/\Phi(G)$ субнормальны в $G/\Phi(G)$ и сверхразрешимы. Согласно [15, theorem 3.1] подгруппы A и B сверхразрешимы. Поскольку подгруппы A и B субнормальны в G, то $G \in \mathfrak{H}$.

(5) Пусть $Z \lhd G$ и $G/Z \in \mathfrak{H}$. Тогда $G/Z = (A/Z)(B/Z)$, подгруппы A/Z и B/Z сверхразрешимы и субнормальны в G/Z. Ясно, что $G = AB$, подгруппы A и B субнормальны в G. Если Z циклическая или $Z \le Z(G)$, то подгруппы A и B сверхразрешимы [2, 4.46] и $G \in \mathfrak{H}$.

(6) Группа $C_3^2 \rtimes D_8 = S_3 \wr C_2$ [16, SmallGroup(72,40)] содержит две нормальные подгруппы A и B, $A \cong B \cong S_3 \times S_3$, и нормальную подгруппу $C_3^2 \rtimes C_4$. Поэтому $C_3^2 \rtimes D_8 = AB \in \mathfrak{H}$. Подгруппа $C_3^2 \rtimes C_4$ [16, SmallGroup(36,4)] несверхразрешима и имеет единственную максимальную нормальную подгруппу C_3^2, поэтому $C_3^2 \rtimes C_4 \notin \mathfrak{H}$. Поэтому класс $\mathfrak{H}$ не замкнут относительно нормальных подгрупп. В частности, он не является классом Фиттинга.

(7) Класс $\mathfrak{H}$ не является классом Шунка согласно [17]. Класс $\mathfrak{H}$ не является формацией, поскольку $\mathfrak{H}$ – насыщенный класс по утв. (4), а каждая насыщенная формация является классом Шунка [2, 5.3].

(8) Включения $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{D} \cap \mathfrak{N}^2 \cap \mathfrak{N}\mathfrak{A}^2$ следуют из леммы 3. Так как $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{D} \cap \mathfrak{N}^2 \cap \mathfrak{N}\mathfrak{A}^2$ – наследственные классы, а класс $\mathfrak{H}$ ненаследственный в силу утв. (6), то $\mathfrak{U} \ne \mathfrak{H} \ne (\mathfrak{D} \cap \mathfrak{N}^2 \cap \mathfrak{N}\mathfrak{A}^2)$.

(9) Минимальные несверхразрешимые группы описаны в [18]–[20]. Пусть G – минимальная несверхразрешимая группа и G является произведением двух субнормальных сверхразрешимых подгрупп A и B. Группа $G = G^{\mathfrak{U}} \rtimes T$ разрешима, $|\pi(G)| \le 3$, [18, теорема 22], подгруппа $P = G^{\mathfrak{U}}$ является силовской p-подгруппой для некоторого $p \in \pi(G)$. Согласно [11, лемма 10] подгруппы AP и BP сверхразрешимы и субнормальны в G, поэтому можно считать, что $P \le A \cap B$. Теперь $A = P \rtimes (A \cap T)$, $B = P \rtimes (B \cap T)$ и можно считать, что $T = (A \cap T)(B \cap T)$. Так как A и B субнормальны в G, то $A \cap T$ субнормальна в T, $B \cap T$ субнормальна в T. Если T – циклическая примарная подгруппа, то либо $A \cap T \le B \cap T = T$, либо $B \cap T \le A \cap T = T$ и соответственно, либо $G = B$, либо $G = A$, т. е. G сверхразрешима, противоречие. Далее считаем, что T не является циклической примарной подгруппой.

Пусть $\Phi(G) = 1$. Тогда $P = C_G(P)$ – минимальная нормальная в G подгруппа порядка $> p$, [19, теорема 1 (a)]. Если $|\pi(T)| = 2$, то $T = R \rtimes Q$, где R и Q – циклические силовские r- и

q-подгруппы [20]. Так как примарная циклическая группа не факторизуется собственными подгруппами, то можно считать, что $(A \cap T) = R,$ $(B \cap T) = Q.$ Но теперь $Q = B \cap T$ субнормальна в T, что невозможно, поскольку T нециклическая.

Пусть $|\pi(T)| = 1.$ Тогда T нециклическая.

Если $\Phi(G) \neq 1,$ то фактор-группа $G/\Phi(G) \in \mathfrak{H}$ по утв. (1) и $G/\Phi(G)$ – минимальная несверхразрешимая группа. Так как $\Phi(G/\Phi(G)) = 1,$ то $G/\Phi(G)$ – бипримарная группа с нециклическими силовскими подгруппами. Следовательно, G – бипримарная группа с нециклическими силовскими подгруппами.

Обратно, пусть $G = P \rtimes T$ – бипримарная минимальная несверхразрешимая группа с нециклическими силовскими подгруппами. Тогда в T существуют две различные максимальные подгруппы T_1 и T_2. Ясно, что $G = (P \rtimes T_1)(P \rtimes T_2),$ где $P \rtimes T_1$ и $P \rtimes T_2$ – нормальные в G сверхразрешимые подгруппы.

(10) Предположим, что $\mathfrak{H}$ не содержится в $\mathrm{sh}\mathfrak{U}$ и пусть G – группа наименьшего порядка из $\mathfrak{H} \setminus \mathrm{sh}\mathfrak{U}.$ Согласно лемме 1 для некоторых простых чисел $p > q,$ q не делит $p-1,$ подгруппа $H = G_{\{p,q\}}$ ненильпотентна. Согласно доказанному утв. (3) подгруппа $H \in \mathfrak{H}.$ Если $H < G,$ то $H \in \mathrm{sh}\mathfrak{U}$ по выбору группы G. По лемме 1 подгруппа H нильпотентна, противоречие. Поэтому $H = G$ – $\{p,q\}$-группа и силовская p-подгруппа $P = G_p$ нормальна в G по утв. (8). Поскольку $G \in \mathfrak{H},$ то $G = AB,$ подгруппы A и B субнормальны в G и сверхразрешимы. Согласно [11, лемма 10] подгруппа AP сверхразрешима, а по лемме 2 она нильпотентна. Аналогично, подгруппа BP нильпотентна. Поскольку подгруппы AP и BP субнормальны в G, то группа G нильпотентна и $G \in \mathfrak{N} \subseteq \mathrm{sh}\mathfrak{U}.$ Теорема 1 доказана.

Радикальная насыщенная формация $\mathrm{sh}\mathfrak{U}$ содержит насыщенный гомоморф $\mathfrak{H}$ и три нерадикальные насыщенные формации $\mathfrak{U},$ $\mathrm{w}\mathfrak{U}$ и $\mathrm{w}\mathfrak{U},$ причем $\mathfrak{U} \subset \mathrm{w}\mathfrak{U} \subset \mathrm{v}\mathfrak{U} \subset \mathrm{sh}\mathfrak{U},$ [21]. Соотношения между ними описывает

Следствие 1.1. $\mathfrak{U} = \mathfrak{H} \cap \mathrm{w}\mathfrak{U} \subset \mathfrak{H} \cap \mathrm{v}\mathfrak{U}.$

Доказательство. Так как $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{U} \subset \mathrm{w}\mathfrak{U} \subset \mathrm{v}\mathfrak{U}$ согласно [21, с. 359], то $\mathfrak{U} \subseteq (\mathfrak{H} \cap \mathrm{w}\mathfrak{U}) \subseteq (\mathfrak{H} \cap \mathrm{v}\mathfrak{U}).$ Если $G \in \mathfrak{H} \cap \mathrm{w}\mathfrak{U},$ то по теореме 1 (10) группа G метанильпонетна, а согласно [21, теореме 1 (1)] она сверхразрешима и $\mathfrak{U} = \mathfrak{H} \cap \mathrm{w}\mathfrak{U}.$ Включение $(\mathfrak{H} \cap \mathrm{w}\mathfrak{U}) \subseteq (\mathfrak{H} \cap \mathrm{v}\mathfrak{U})$ собственное. Несверхразрешимая группа $C_5^2 \rtimes Q_8$ из примера 1 является произведением двух нормальных сверхразрешимых подгрупп, изоморфных $C_5^2 \rtimes C_4.$ Эта группа принадлежит $(\mathfrak{H} \cap \mathrm{v}\mathfrak{U}) \setminus \mathrm{w}\mathfrak{U},$ [21, пример 3].

3. Признак сверхразрешимости группы из класса $\mathfrak{H}$. Обозначим через $\mathcal{A}_\pi$ – класс всех групп с абелевыми силовскими p-подгруппами для каждого $p \in \pi.$ При $\pi = \mathbb{P}$ вместо $\mathcal{A}_\mathbb{P}$ будем писать $\mathcal{A}.$ Класс $\mathcal{A}$ – наследственная формация, но она не насыщенная и не радикальная. Поскольку $\mathcal{A}_\pi = \mathcal{A} \cap \mathfrak{G}_\pi,$ то класс $\mathcal{A}_\pi$ – наследственная формация. Любая неабелева p-группа порядка $p^3,$ $p \in \pi,$ указывает на то, что формация $\mathcal{A}_\pi$ не насыщенная и не радикальная. Поскольку $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_\pi,$ то $G^{\mathcal{A}_\pi} \le G^{\mathcal{A}}$ для любой группы G.

Следующая теорема устанавливает признак сверхразрешимости группы из класса $\mathfrak{H},$ поглощающий, в частности, теорему A (4).

Теорема 2. *Пусть A и B – субнормальные сверхразрешимые подгруппы группы $G = AB$ и* $\sigma = \pi(G : F(G)A) \cap \pi(G : F(G)B).$ *Если подгруппа $G^{\mathcal{A}_\sigma}$ нильпотентна, то G сверхразрешима.*

Доказательство. Если $q \notin \sigma,$ то $q \notin \pi(G : F(G)A)$ или $q \notin \pi(G : F(G)B).$ Поскольку $AF(G)/F(G)$ и $BF(G)/F(G)$ абелевы согласно лемме 3 (2), то $G_qF(G)/F(G)$ абелева. Если $q \in \sigma,$ то $G_q' \le G^{\mathcal{A}_\sigma} \le F(G)$ и $G_qF(G)/F(G)$ опять абелева. Так как $G \in \mathfrak{N}^2$ по теореме 1 (10), то $G/F(G) \in \mathfrak{N}$ и все силовские подгруппы в $G/F(G)$ абелевы. Поэтому $G' \le F(G)$ и G сверхразрешима согласно теореме 1 (1).

Следствие 2.1. *Если* $G = AB \in \mathfrak{H}$ *и* $(|G : F(G)A)|, |G : F(G)B|) = 1$, *то* $G \in \mathfrak{U}$.

Следствие 2.2. *Если* $G = AB \in \mathfrak{H}$ *и* $(|G : A|, |G : B|) = 1$, *то* $G \in \mathfrak{U}$.

В случае, когда сверхразрешимые подгруппы A и B нормальны в $G = AB$, это следствие превращается в теорему Фризен [5].

Следствие 2.3. $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{N}\mathcal{A} = \mathfrak{H} \cap \mathfrak{N}\mathfrak{A} = \mathfrak{U}$.

В случае, когда сверхразрешимые подгруппы A и B нормальны в $G = AB$, равенство $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{N}\mathfrak{A} = \mathfrak{U}$ превращается в теорему Бэра [4], а равенство $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{N}\mathcal{A} = \mathfrak{U}$ – в теорему А.Ф. и Т.И. Васильевых [6].

Исследования поддержаны Министерством образования Республики Беларусь, грант № 20211780, «Конвергенция-2025».

Литература

1. Шеметков, Л. А. Формации конечных групп / Л. А. Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 271 с.
2. Монахов, В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В. С. Монахов. – Минск : Вышэйшая школа, 2006. – 207 с.
3. Huppert, B. Monomialle darstellung endlicher gruppen / B. Huppert // Nagoya Math. J. – 1953. – Vol. 3. – P. 93–94.
4. Baer, R. Classes of finite groups and their properties / R. Baer // Illinois J. Math. – 1957. – Vol. 1. – P. 115–187.
5. Friesen, D. Products of normal supersolvable subgroups / D. Friesen // Proc. Amer. Math. Soc. – 1971. – Vol. 30, № 1. – P. 46–48.
6. Васильев, А. Ф. О конечных группах, у которых главные факторы являются простыми группами / А. Ф. Васильев, Т. И. Васильева // Изв. вузов. Матем. – 1997. – № 11 (426). – С. 10–14.
7. Guo, W. Finite minimal non-supersolvable groups decomposable into the product of two normal supersolvable subgroups / W. Guo, A. S. Kondratiev // Commun. Math. Stat. – 2015. – Vol. 3. – P. 285–290.
8. Монахов, В. С. О p-сверхразрешимости конечной факторизуемой группы с нормальными сомножителями / В. С. Монахов, И. К. Чирик // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2015. – № 3 (21). – С. 256–267.
9. Монахов, В. С. О p-сверхразрешимом корадикале произведения нормальных p-сверхразрешимых подгрупп / В. С. Монахов, И. К. Чирик // Труды Ин-та матем. НАН Беларуси. – 2015. – № 2 (23). – С. 88–96.
10. Тан, С. Конечные группы, являющиеся произведением нормальных сверхразрешимых подгрупп / С. Тан, Ю. Е, В. Го // Сиб. матем. журн. – 2017. – Том 58, № 2. – С. 417–429.
11. Монахов, В. С. О сверхразрешимом корадикале произведения субнормальных сверхразрешимых подгрупп / В. С. Монахов, И. К. Чирик // Сиб. матем. журн. – 2017. – Т. 58, № 2. – С. 353–364.
12. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin; New York, 1992. – 891 p.
13. Монахов, В. С. О конечных группах с заданными наборами подгрупп Шмидта / В. С. Монахов // Матем. заметки. – 1995. – Т. 58, № 5. – Р. 717–722.
14. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin; Heidelberg; New York : Springer, 1967. – 792 s.
15. Ballester-Bolinches, A. On $\mathfrak{F}$-subnormal subgroups and Frattine-like subgroups of a finite group / A. Ballester-Bolinches, M. D. Perez-Ramos // Glasgow. Math. J. – 1994. – Vol. 36. – P. 241–247.
16. A system for computational discrete algebra GAP 4.11.1 [Electronic resource]. – Mode of access : https://www.gap-system.org. – Date of access : 25.12.2022.
17. Hawkes, T. Closure operations for Schunck classes / T. Hawkes // J. Austr. Math. Soc. – 1973. – Vol. 16. – P. 316–318.
18. Huppert, B. Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen / B. Huppert // Mathematische Zeitschrift. – 1954. – Bd. 60. – S. 409–434.
19. Doerk, K. Minimal nicht überauflösbare, endliche Gruppen / K. Doerk // Mathematische Zeitschrift. – 1966. – Bd. 91. – S. 198–205.
20. Нагребецкий, В. Т. О конечных минимальных несверхразрешимых группах / В. Т. Нагребецкий // Конечные группы : сб. науч. ст. – Минск : Наука и техника, 1975. – С. 104–108.
21. Монахов, В. С. О трех формациях над $\mathfrak{U}$ / В. С. Монахов // Матем. заметки. – 2021. – Т. 110, № 3. – С. 358–367.

Гомельский государственный
университет имени Франциска Скорины

Поступила в редакцию 01.08.2023