Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6 (141), 2023

УДК 519.21 EDN: EAIBWN

Сети Джексона с однолинейными станциями и экспоненциальными ограничениями на времена ожидания требований

В.А. Немилостивая, Ю.В. Малинковский

Рассмотрена экспоненциальная сеть обслуживания с однолинейными станциями, отличающаяся от сети Джексона только тем, что время ожидания требованиями обслуживания на станциях сети ограничено случайной величиной, имеющей показательное распределение. Требования, обслуженные в узлах, и требования, не дождавшиеся обслуживания, движутся по сети в соответствии с разными матрицами маршрутизации. Доказано, что не существует стационарного распределения в мультипликативной форме.
Ключевые слова: открытая сеть массового обслуживания, матрицами маршрутизации, стационарное распределение, условия эргодичности.

An exponential service network with single-line stations is considered, which differs from the Jackson network only in that the waiting time for service requirements at the network stations is limited by a random variable with an exponential distribution. Requests served at nodes and those that were not served move through the network according to different routing matrices. It is proved that there is no stationary distribution in multiplicative form.
Keywords: open queuing network, routing matrices, stationary distribution, ergodicity conditions.

Введение. С развитием информационной сферы возникает необходимость исследования математических моделей сетей массового обслуживания различного типа с целью оптимизации процессов обслуживания. В настоящее время методы и результаты теории массового обслуживания с успехом используются при решении проблем теории надёжности, анализе процессов функционирования сложных систем, разработке автоматизированных систем управления различных видов и во многих других технических, социальных и экономических областях. Возникает потребность в исследовании новых, более сложных видов систем массового обслуживания.

В работах О.В. Якубович и В.Е. Евдокимович [1], [2] исследовалось стационарное распределение вероятностей состояний открытых сетей с различными типами положительных, отрицательных заявок и сигналов и временами пребывания положительных заявок в узлах, ограниченными показательно, распределёнными случайными величинами. Открытые сети с временами пребывания требований, ограниченными показательно рассматривались Ю.Е. Летунович в [3] и О.В. Якубович в [4]. Однако во всех этих работах [1]–[6] предполагалось, что требования, обслуженные в узлах, и заявки, не дождавшиеся обслуживания, ведут себя одинаково, т. е. их движение по сети определяется одной и той же матрицей маршрутизации.

В настоящей статье рассмотрена экспоненциальная сеть обслуживания с однолинейными станциями, отличающаяся от сети Джексона тем, что время ожидания требованиями обслуживания на станциях сети ограничено случайной величиной, имеющей показательное распределение. Требования, обслуженные в узлах, и требования, не дождавшиеся обслуживания, движутся по сети в соответствии с разными матрицами маршрутизации. Доказано, что в общем случае не существует стационарного распределения в мультипликативной форме.

1. Постановка задачи. В сеть массового обслуживания, состоящую из N однолинейных станций (систем), поступает простейший поток требований с интенсивностью λ. Каждое поступающее требование независимо от других требований с вероятностью p_{0i} направляется на i-ю станцию ($i=\overline{1,N}$, $\sum_{i=1}^{N} p_{0i}=1$). Число мест для ожидания требований на станциях бесконечное. Время обслуживания требования единственным прибором i-й станции имеет показательное распределение с параметром μ_i ($i=\overline{1,N}$). Время ожидания начала обслуживания требования в i-й станции является случайной величиной, условное распределение которой (если на i-й станции находится n_i требований) показательное с параметром $\frac{\nu_i}{n_i}$ ($i=\overline{1,N}$). Другими словами, условная вероятность того, что длительность ожидания начала обслуживания каждого требования в i-й станции закончится в промежутке времени $[t, t+h)$, если в момент t на станции находилось n_i требований, равна $\frac{\nu_i}{n_i}h+o(h)$ при $h\to 0$, а условная вероятность завершения процесса ожидания хотя бы одного из этих требований равна $\nu_i h+o(h)$. Если требование поступает на станцию, свободную от требований, оно сразу начинает обслуживаться. Для определённости будем предполагать, что требования обслуживаются в порядке поступления на станцию (дисциплина FCFS). Предполагается, что промежутки времени между моментами поступления требований, времена обслуживания требований и времена ожидания требований в узлах – независимые случайные величины. Требование, обслуженное в i-й станции, мгновенно и независимо от других требований с вероятностью p_{ij} переходит в j-ую станцию, а с вероятностью p_{i0} покидает сеть ($i, j=\overline{1,N}$, $\sum_{j=0}^{n} p_{ij}=1$). Требование, время ожидания которого в i-й станции закончилось, мгновенно и независимо от других требований с вероятностью r_{ij} направляется в j-ую станцию, а с вероятностью r_{i0} покидает сеть ($i, j=\overline{1,N}$, $\sum_{j=0}^{n} r_{ij}=1$). Для удобства введём ещё узел 0, который отождествим с внешностью сети. Введём также следующие две стахостические квадратные матрицы порядка $N+1$:

$$P=\begin{pmatrix} 0 & p_{01} & p_{02} & \cdots & p_{0N} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{N0} & p_{N1} & p_{N2} & \cdots & p_{NN} \end{pmatrix}, \quad R=\begin{pmatrix} 0 & p_{01} & p_{02} & \cdots & p_{0N} \\ r_{10} & r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{N0} & r_{N1} & r_{N2} & \cdots & r_{NN} \end{pmatrix},$$

которые назовём матрицами маршрутизации соответственно обслуженных и не дождавшихся обслуживания требований. Итак, $p_{00}=r_{00}=0$, $r_{0j}=p_{0j}$ для остальных j. Очевидно, матричная функция $S(n)=\left(s_{ij}(n_i), i, j=\overline{0,N}\right)$, где для $i\neq 0$ $s_{ij}(n_i)=\frac{\mu_i p_{ij}+\nu_i r_{ij} I_{\{n_i\neq 1\}}}{\mu_i+\nu_i I_{\{n_i\neq 1\}}}$, I_A – индикатор события A, равный 1, если A происходит, и 0 в противном случае, а $s_{0j}(0)=s_{0j}=p_{0j}$, элементы i-й строки которой зависят от числа n_i требований на i-й станции, также является стохастической матрицей и по смыслу управляет движением требований по станциям $0,1,\ldots,N$ без учёта того, за счёт чего (окончания обслуживания или ожидания) требование покидает станцию. Для $i=0$ это следует из постановки задачи, а для $i\neq 0$

$$\sum_{j=0}^{N} s_{ij}(n_i)=\frac{1}{\mu_i+\nu_i \mathrm{I}_{\{n_i\neq 1\}}}\left(\mu_i\sum_{j=0}^{N} p_{ij}+\nu_i \mathrm{I}_{\{n_i\neq 1\}}\sum_{j=0}^{N} r_{ij}\right)=\frac{1}{\mu_i+\nu_i \mathrm{I}_{\{n_i\neq 1\}}}\left(\mu_i+\nu_i \mathrm{I}_{\{n_i\neq 1\}}\right)=1.$$

Будем называть эту матрицу $S(n)$ матрицей маршрутизации. Заметим, что в отличие от сети Джексона, в которой матрица маршрутизации не зависит от μ_i, $i=\overline{1,N}$, и от сети с ограничением на время пребывания, в которой матрица маршрутизации зависит от μ_i, ν_i, $i=\overline{1,N}$ и не зависит от чисел требований в узлах, матрица маршрутизации исследуемой сети зависит от μ_i, ν_i, $i=\overline{1,N}$, а ее i-я строка специальным достаточно простым образом зависит от числа требований на i-й станции.

Заметим, что если положить $r_{i0}=1,\ i=\overline{1,N}$, то не дождавшиеся обслуживания требования после обслуживания на станциях будут покидать сеть, а если положить $p_{i0}=1,\ i=\overline{1,N}$, то, наоборот, покидать сеть будут обслуженные на станциях требования.

Обозначим через $\lambda\varepsilon_i(n_i)$ условную интенсивность потока требований, выходящего из i-й станции, находящейся в состоянии n_i $\left(i=\overline{1,N}\right)$. Так как требования не рождаются и не теряются при прохождении станций, то в стационарном режиме с точностью до множителя λ (на который можно сократить) выполняется следующий закон сохранения:

$$\varepsilon_j(n_j)=p_{0j}+\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i(n_i)s_{ij}(n_i-1),\quad j=\overline{1,N}. \tag{1}$$

Далее предполагается, что матрица $S(n)$ неприводима. Для её неприводимости достаточно (но не необходимо), чтобы неприводимой была хотя бы одна из матриц P или R. Тогда уравнение (1), которое будем называть уравнением трафика, при фиксированных $\mu_i,\nu_i,n_1,n_2,\ldots,n_N,\ i=\overline{1,N}$, будет иметь единственное положительное решение. Если изменять эти параметры, то решения (1) будут функциями от них. Заметим, что в классической сети Джексона решение уравнения трафика определяется матрицей P и не зависит от параметров $\mu_i,\ i=\overline{1,N}$.

Лемма 1. *При выполнении (1)*

$$\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i(n_i)s_{i0}(n_i-1)=1. \tag{2}$$

Складывая (1) по $j=1,2,\ldots,N$ и используя стохастичность матрицы $S(n)$, получим

$$\sum_{j=1}^{N}\varepsilon_j(n_j)=1+\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i(n_i)\sum_{j=1}^{N}s_{ij}(n_i-1)=1+\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i(n_i)(1-s_{i0}(n_i-1))=1+\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i(n_i)-\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i(n_i)s_{i0}(n_i-1),$$

откуда вытекает (2). Физический смысл состоит в том, что (2), умноженное на λ, выражает равенство интенсивностей выходящего из сети и входящего в сеть потоков требований.

2. Уравнения глобального и локального равновесия. Состояния сети в момент t будем описывать марковским процессом или цепью Маркова с непрерывным временем $n(t)=(n_1(t),n_2(t),\ldots n_N(t))$, где $n_i(t)$ – число требований на i-й станции в момент времени t. Пространство состояний этого процесса $\mathrm{X}=\mathrm{Z}_+^N$, где $\mathrm{Z}_+=\{0,1,\ldots\}$. В силу неприводимости матрицы маршрутизации и положительности интенсивностей выхода из состояний в моменты ее скачков $n(t)$, очевидно, – неприводимая цепь Маркова. Об условиях её эргодичности, которые далее предполагаются выполненными, будет сказано ниже. Пусть $\{p(n),n\in\mathrm{X}\}$ – её предельное эргодическое распределение, которое в этом случае будет единственным решением уравнений глобального равновесия

$$p(n)\left[\lambda+\sum_{i=1}^{N}\left(\mu_i(1-p_{ii})+\nu_i(1-r_{ii})\mathrm{I}_{\{n_i\neq1\}}\right)\mathrm{I}_{\{n_i\neq0\}}\right]=\sum_{i=1}^{N}p(n-e_i)\lambda p_{0i}+\sum_{i=1}^{N}p(n+e_i)\left(\mu_ip_{i0}+\nu_ir_{i0}\mathrm{I}_{\{n_i\neq0\}}\right)+$$
$$+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1,j\neq i}^{N}p(n+e_j-e_i)\left(\mu_jp_{ji}+\nu_jr_{ji}\mathrm{I}_{\{n_j\neq0\}}\right),\quad n\in\mathrm{X}, \tag{3}$$

удовлетворяющим условию нормировки $\sum\limits_{n\in\mathrm{X}}p(n)=1$. Здесь e_i – единичный вектор i-го направления, причём предполагается, что $p(n)=0$ при $n\in\mathrm{X}$. Разобьем (3) на уравнения локального равновесия. Первое уравнение получается, если приравнять интенсивность потока вероятности из состояния n за счёт поступления требований в сеть извне интенсивности потока вероятности в состояние n за счёт ухода требований из сети:

$$\lambda p(n)=\sum_{i=1}^{N}p(n+e_i)\left(\mu_ip_{i0}+\nu_ir_{i0}\mathrm{I}_{\{n_i\neq0\}}\right),\qquad n\in\mathrm{X}. \tag{4}$$

Остальные N уравнений локального равновесия получаются, если для каждой станции приравнять интенсивность потока вероятности из состояния n за счёт ухода требований из этой станции интенсивности потока вероятности в состояние n за счёт поступления требований на эту станцию (извне и из других станций)

$$p(n)\left(\mu_i(1-p_{ii})+\nu_i(1-r_{ii})\mathrm{I}_{\{n_i\neq 1\}}\right)=p(n-e_i)\lambda p_{0i}+$$

$$+\sum_{j=1,\, j\neq i}^{N} p(n+e_j-e_i)\left(\mu_j p_{ji}+\nu_j r_{ji}\mathrm{I}_{\{n_j\neq 0\}}\right),\quad n\in \mathrm{X},\ i=\overline{1,N}. \tag{5}$$

Так как (3) получается сложением (4) с просуммированными по $i=\overline{1,N}$ уравнениями (5), то всякое решение локальных уравнения равновесия (4), (5) будет являться решением глобального уравнения равновесия (3).

3. Изолированный от сети узел в искусственной случайной среде. Изолируем i-ю станцию от сети, помещая её в фиктивную случайную среду, отличающуюся от условий её функционирования в сети только тем, что в неё поступает поток моментов последовательных скачков процесса чистого размножения с интенсивностью рождения $\lambda\varepsilon_i(n_i)$, зависящей от числа требований n_i в этой станции. Получается процесс размножения и гибели $\tilde{n}_i(t)$ с интенсивностями рождения $\lambda\varepsilon_i(n_i)$ $(n_i=0,1,\ldots)$ и интенсивностями гибели $\mu_i+\nu_i\mathrm{I}_{\{n_i\neq 1\}}$ $(n_i=1,2,\ldots)$. При этом стационарные вероятности цепи Маркова $\tilde{n}_i(t)$, если они существуют, удовлетворяют следующим уравнениям равновесия для вертикальных сечений в графе переходов процесса размножения и гибели:

$$\lambda\varepsilon_i(n_i-1)p_i(n_i-1)=\left(\mu_i+\nu_i\mathrm{I}_{\{n_i\neq 1\}}\right)p_i(n_i)\qquad (n_i=1,2,\ldots), \tag{6}$$

Эта система уравнений может быть записана в виде

$$\lambda\varepsilon_i(0)p_i(0)=\mu_i p_i(1), \tag{7}$$

$$\lambda\varepsilon_i(n_i-1)p_i(n_i-1)=(\mu_i+\nu_i)p_i(n_i),\qquad (n_i=2,3,\ldots). \tag{8}$$

Из уравнений (7), (8) находим

$$p_i(n_i)=p_i(0)\frac{1}{\mu_i(\mu_i+\nu_i)^{n_i-1}}\prod_{l=0}^{n_i-1}(\lambda\varepsilon_i(l)). \tag{9}$$

Из условия нормировки следует, что

$$p_i(0)=\left(1+\frac{\mu_i+\nu_i}{\mu_i}\sum_{n_i=1}^{\infty}\prod_{l=0}^{n_i-1}\frac{\lambda\varepsilon_i(l)}{\mu_i+\nu_i}\right)^{-1} \tag{10}$$

и кроме того, что условие

$$\sum_{n_i=1}^{\infty}\prod_{l=0}^{n_i-1}\frac{\lambda\varepsilon_i(l)}{\mu_i+\nu_i}<\infty \tag{11}$$

является необходимым и достаточным для существования стационарного распределения, а значит, необходимым для эргодичности процесса размножения и гибели $\tilde{n}_i(t)$. Для доказательства достаточности этого условия для эргодичности остаётся показать, что при выполнении (11) процесс $\tilde{n}_i(t)$ является регулярным. Из сходимости ряда в (11) следует, что его общий член $\prod_{l=0}^{n_i-1}\frac{\lambda\varepsilon_i(l)}{\mu_i+\nu_i}$ стремится к нулю при $n_i\to\infty$. Но тогда $\prod_{l=1}^{n_i}\frac{\mu_i+\nu_i}{\lambda\varepsilon_i(l)}\to\infty$, т. е. ряд $\sum_{n_i=1}^{\infty}\prod_{l=1}^{n_i}\frac{\mu_i+\nu_i}{\lambda\varepsilon_i(l)}$ расходится к $+\infty$, что является достаточным условием регулярности процесса размножения и гибели.

Итак, для эргодичности процесса $\tilde{n}_i(t)$, описывающего изолированную станцию необходимо и достаточно выполнения (11). При этом эргодическое распределение определяется соотношениями (9), (10) и удовлетворяет равенствам (6).

4. О стационарном распределении в форме произведения.

Докажем, что вероятности

$$p(n) = p_1(n_1)p_2(n_2)\dots p_N(n_N) \tag{12}$$

с множителями, определенными с помощью (6), удовлетворяют уравнениям локального равновесия (4). Прежде всего отметим, что из (6), (12) следует, что

$$\frac{p_i(n_i)}{p_i(n_i-1)} = \frac{\lambda\varepsilon_i(n_i-1)}{\mu_i + \nu_i \mathrm{I}_{\{n_i\neq 1\}}},$$

$$\frac{p(n-e_i)}{p(n)} = \frac{p_i(n_i-1)}{p_i(n_i)} = \frac{\mu_i + \nu_i \mathrm{I}_{\{n_i\neq 1\}}}{\lambda\varepsilon_i(n_i-1)} \mathrm{I}_{\{n_i\neq 0\}}, \tag{13}$$

$$\frac{p(n+e_i)}{p(n)} = \frac{p_i(n_i+1)}{p_i(n_i)} = \frac{\lambda\varepsilon_i(n_i)}{\mu_i + \nu_i \mathrm{I}_{\{n_i\neq 0\}}}, \tag{14}$$

$$\frac{p(n+e_j-e_i)}{p(n)} = \frac{p_j(n_j+1)}{p_j(n_j)}\frac{p_i(n_i-1)}{p_i(n_i)} = \frac{\varepsilon_j(n_j)}{\varepsilon_i(n_i-1)}\frac{\mu_i + \nu_i \mathrm{I}_{\{n_i\neq 1\}}}{\mu_j + \nu_j \mathrm{I}_{\{n_j\neq 0\}}} \mathrm{I}_{\{n_i\neq 0\}}. \tag{15}$$

Разделив (4) на $p(n)$, подставляя в полученное равенство (14) и используя (2), получим:

$$\lambda = \sum_{i=1}^{N} \lambda\varepsilon_i(n_i)\frac{\mu_i p_{i0} + \nu_i r_{i0}\mathrm{I}_{\{n_i\neq 0\}}}{\mu_i + \nu_i \mathrm{I}_{\{n_i\neq 0\}}} = \lambda\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i(n_i)s_{i0}(n_i-1) = \lambda,$$

т. е. (4) выполняется. Проверим выполнение (5). Если $n_i = 0$, то (5), очевидно, превращается в тождество $0 = 0$. Если же $n_i \neq 0$, то разделив (5) на $p(n)$, подставляя в полученное равенство (13), (15) и используя уравнение трафика (1), получим:

$$\mu_i(1-p_{ii}) + \nu_i(1-r_{ii})\mathrm{I}_{\{n_i\neq 1\}} = \frac{p(n-e_i)}{p(n)}\lambda p_{0i} + \sum_{j=1,\, j\neq i}^{N} \frac{p(n+e_j-e_i)}{p(n)}\left(\mu_j p_{ji} + \nu_j r_{ji}\mathrm{I}_{\{n_j\neq 0\}}\right) =$$

$$= \frac{\mu_i + \nu_i \mathrm{I}_{\{n_i\neq 1\}}}{\lambda\varepsilon_i(n_i-1)}\lambda p_{0i} + \sum_{j=1,\, j\neq i}^{N} \frac{\lambda\varepsilon_j(n_j)}{\mu_j + \nu_j \mathrm{I}_{\{n_j\neq 0\}}}\frac{\mu_i + \nu_i \mathrm{I}_{\{n_i\neq 1\}}}{\lambda\varepsilon_i(n_i-1)}\left(\mu_j p_{ji} + \nu_j r_{ji}\mathrm{I}_{\{n_j\neq 0\}}\right) =$$

$$= \frac{\mu_i + \nu_i \mathrm{I}_{\{n_i\neq 1\}}}{\varepsilon_i(n_i-1)}\left[p_{0i} + \sum_{j=1,\, j\neq i}^{N}\varepsilon_j(n_j)\frac{\mu_j p_{ji} + \nu_j r_{ji}\mathrm{I}_{\{n_j\neq 0\}}}{\mu_j + \nu_j \mathrm{I}_{\{n_j\neq 0\}}}\right] = \frac{\mu_i + \nu_i \mathrm{I}_{\{n_i\neq 1\}}}{\varepsilon_i(n_i-1)}\left[p_{0i} + \sum_{j=1,\, j\neq i}^{N}\varepsilon_j(n_j)s_{ji}(n_j-1)\right] =$$

$$= \frac{\varepsilon_i(n_i)}{\varepsilon_i(n_i-1)}\left(\mu_i + \nu_i \mathrm{I}_{\{n_i\neq 1\}}\right)\left(1 - s_{ii}(n_i-1)\right) = \frac{\varepsilon_i(n_i)}{\varepsilon_i(n_i-1)}\left(\mu_i + \nu_i \mathrm{I}_{\{n_i\neq 1\}}\right)\left(1 - \frac{\mu_i p_{ii} + \nu_i r_{ii}\mathrm{I}_{\{n_i\neq 1\}}}{\mu_i + \nu_i \mathrm{I}_{\{n_i\neq 1\}}}\right) =$$

$$= \frac{\varepsilon_i(n_i)}{\varepsilon_i(n_i-1)}\left(\mu_i(1-p_{ii}) + \nu_i(1-r_{ii})\mathrm{I}_{\{n_i\neq 1\}}\right),$$

т. е. (4) выполняется тогда и только тогда, когда $\varepsilon_i(n_i) = \varepsilon_i(n_i-1)$, т. е. когда $\varepsilon_i(n_i)$ не зависит от n_i. Таким образом, не существует стационарного распределения состояний сети в форме произведения множителей, зависящих от состояний отдельных станций.

К сожалению, если для удовлетворения нулевого уравнения локального равновесия взять (1), то для удовлетворения уравнений локального равновесия для узлов придётся брать другое уравнение трафика, которое совпадает с (1), в котором в левой части надо взять $\varepsilon_j(n_j-1)$ вместо $\varepsilon_j(n_j)$.

Заключение. В настоящей работе исследовались сети с однолинейными станциями, что ограничивает возможность применения полученных результатов. Отметим, что возможность варьирования матрицами маршрутизации обслуженных и не дождавшихся обслуживания требований позволяет учитывать самые разнообразные практические ситуации и снижать необходимым образом нагрузку в «узких местах» исследуемых сетей. А это очень важно при проектировании новых и модернизации уже существующих информационно-вычислительных сетей.

Литература

1. Якубович, О. В. Стационарное распределение сети массового обслуживания с различными типами сигналов и положительных заявок и ограничением на время пребывания / О. В. Якубович // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2008. – № 5 (50). – Ч. 2. – С. 207–211.

2. Якубович, О. В. Сеть массового обслуживания со случайным временем пребывания положительных, отрицательных заявок и сигналов / О. В. Якубович, В. Е. Евдокимович// Проблемы физики, математики и техники. – 2010. – № 4 (5). – С. 63–67.

3. Летунович, Ю. Е. Неоднородные сети с ограничением на время пребывания в режимах обслуживания / Ю. Е. Летунович // АВТ. – 2010. – № 5. – С. 33–41.

4. Якубович, О. В. Многорежимная сеть массового обслуживания со случайным временем пребывания различных типов отрицательных заявок / О. В. Якубович, Ю. Е. Дудовская // Проблемы физики, математики и техники. – 2012. – № 4 (137). – С. 74–77.

5. Малинковский, Ю. В. Сети массового обслуживания с симметричными резервными каналами / Ю. В. Малинковский // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. – 1986. – № 4. – С. 69–77.

6. Ковалев, Е. А. Сети массового обслуживания с резервными приборами / Е. А. Ковалев, Ю. В. Малинковский // АВТ. – 1987. – № 2. – С. 64–70.

7. Малинковский, Ю. В. Сети массового обслуживания с конечным числом потоков отрицательных заявок и с ограниченным временем пребывания / Ю. В. Малинковский, Н. Н. Бородин // Проблемы физики, математики и техники. – 2018. – № 1 (34). – С. 64–68.

Гомельский государственный
университет имени Франциска Скорины

Поступила в редакцию 31.10.2023