

Векторные декартовы пучки Куммера-Гаусса. I. Однородная поляризация. Энергетические свойства

С.С. ГИРГЕЛЬ

Предложены и исследуются аналитические выражения в замкнутой форме для векторных декартовых 3D световых пучков Куммера-Гаусса с однородной поляризацией. Сформулированы ограничения на свободные параметры, чтобы такие пучки Куммера-Гаусса перенесли конечную мощность. Вычислены и графически исследуются потоки энергии таких пучков.

Ключевые слова: параксиальные пучки, векторные декартовы пучки, пучки Куммера-Гаусса, потоки энергии.

The analytical expressions in the closed form for vector cartesian 3D light of Kummer-Gauss beams from a uniform polarization are offered and investigated. Restrictions on free parameters that such of Kummer-Gauss beams transferred final power are formulated. Streams of energy of such beams are calculated and graphically investigated.

Keywords: paraxial beams, vector cartesian beams, Kummer-Gauss beams, streams of energy.

Введение. В работах [1]–[3] изучались скалярные параксиальные декартовы пучки Куммера-Гаусса (К-Г), затем в [4], [5] – скалярные декартовы астигматические и децентрированные пучки К-Г с однородной и неоднородной по сечению пучка поляризацией (энергетические и поляризационные свойства). В настоящей работе обсуждаются энергетические и поляризационные свойства векторных параксиальных декартовых астигматических пучков К-Г с однородной и неоднородной поляризациями. Получены явные выражения для векторов поляризации векторных декартовых астигматических параксиальных световых пучков К-Г. Исследованы поляризационные свойства, продольные и поперечные потоки энергии таких световых пучков.

1. Скалярные астигматические пучки Куммера-Гаусса. Прежде чем перейти к рассмотрению векторных пучков К-Г, предварительно необходимо изложить необходимую информацию о скалярных пучках К-Г. В работах [4]–[5] было представлено общее решение безразмерного параболического уравнения

$$(\partial_{X,X}^2 + \partial_{Y,Y}^2 + 4i\partial_Z)f = 0 \quad (1.1)$$

для амплитуды $f(X, Y, Z)$ трехмерного скалярного астигматического пучка К-Г в форме

$$f(X, Y, Z) = G(X, Y, Z) \cdot h_1(X_1) \cdot h_2(Y_1) \cdot h_3(Z). \quad (1.2)$$

Здесь безразмерные переменные $X = x/x_0$, $Y = y/x_0$, $Z = z/z_0$, астигматический гауссиан

$G(X, Y, Z) \equiv G = \sqrt{\frac{Q_{0X}Q_{0Y}}{Q_X Q_Y}} \exp\left(i\left(\frac{X^2}{Q_X} + \frac{Y^2}{Q_Y}\right)\right)$. Согласующая функция $h_3(Z) = \left(\frac{Q_{0X}P_X}{P_{0X}Q_X}\right)^{\frac{v_1}{2}} \left(\frac{Q_{0Y}P_Y}{P_{0Y}Q_Y}\right)^{\frac{v_2}{2}}$. Но-

вые переменные X_1 , Y_1 выражаются через старые (X, Y) , как $X_1^2 = t_X X^2$, $Y_1^2 = t_Y Y^2$, где зависящие только от Z множители $t_X = i(1/P_X - 1/Q_X)$, $t_Y = i(1/P_Y - 1/Q_Y)$. Для краткости введены четыре безразмерных комплексных параметра пучка $Q_{X,Y} = Z - Q_{0X,0Y}$ и $P_{X,Y} = Z - P_{0X,0Y}$, где свободные комплексные константы $Q_{0X,0Y} = Q'_{0X,0Y} + iQ''_{0X,0Y}$; $P_{0X,0Y} = P'_{0X,0Y} + iP''_{0X,0Y}$.

Амплитуды $h_1(X_1)$ и $h_2(Y_1)$ в плоскостях (X, Z) и (Y, Z) 3D пучка К-Г выражаются через функции Куммера M следующим образом:

$$h_1(X_1) = A_1 \cdot X_1 \cdot M\left(\frac{1}{2} - \frac{\nu_1}{2}, \frac{3}{2}, X_1^2\right) + B_1 \cdot M\left(-\frac{\nu_1}{2}, \frac{1}{2}, X_1^2\right) \equiv h_{1o} + h_{1e}; \quad (1.3)$$

$$h_2(Y_1) = A_2 \cdot Y_1 \cdot M\left(\frac{1}{2} - \frac{\nu_2}{2}, \frac{3}{2}, Y_1^2\right) + B_2 \cdot M\left(-\frac{\nu_2}{2}, \frac{1}{2}, Y_1^2\right) \equiv h_{2o} + h_{2e}, \quad (1.4)$$

где A_1, B_1, A_2, B_2 – некоторые произвольные константы. Пометки o и e здесь и далее указывают соответственно на четность (*even*) и нечетность (*odd*) функций h_e и h_o относительно изменения знаков их аргументов.

Так как существуют четные и нечетные функции h_1 и h_2 , то по четности все решения (1.2) уравнения (1.1) делятся на четыре типа:

$$f_{ee} = Gh_{1e}h_{2e}h_3, f_{oe} = Gh_{1o}h_{2e}h_3, f_{eo} = Gh_{1o}h_{2e}h_3, f_{oo} = Gh_{1o}h_{2o}h_3. \quad (1.5)$$

Кратко эти решения для амплитуд скалярных параксиальных астигматических 3D пучков К-Г можно записать, как $f_{jk} = Gh_{1j}h_{2k}h_3$, где индексы (j, k) принимают два значения (o, e). Функции f_{jk} зависят от трех переменных (X, Y, Z) и шести ($\nu_1, \nu_2, Q_{0X}, Q_{0Y}, P_{0X}, P_{0Y}$) свободных комплексных параметров. Они описывают шестипараметрическое семейство решений для амплитуд скалярных параксиальных астигматических 3D пучков К-Г.

Для физически реализуемых пучков конечной мощности должна выполняться квадратичная интегрируемость (КИ) функций f . Для обсуждаемых пучков с простым астигматизмом условия КИ должны выполняться для каждой из плоскостей (X, Z) и (Y, Z) сечения пучка. В таблице 1 представлены, следуя [4], достаточные условия КИ скалярных 2D пучков К-Г в определенной плоскости, например, (X, Z). Во всех случаях децентровка пучка может только ухудшить условия КИ. Поэтому здесь исключены варианты, содержащие условия типа $Q_0'' = 0$ и $P_0'' = 0$, поскольку тогда условия КИ могут выполняться только для центрированных (несмещенных) пучков. Интересно, что во всех случаях мнимая часть ν'' комплексного параметра $\nu = \nu' + i\nu''$ не влияет на выполнение условий КИ.

Таблица 1 – Условия КИ для 2D световых пучков К-Г с непрерывным свободным параметром $\nu = \nu' + i\nu''$

№	Ограничения на параметры Q_0''	Ограничения на параметры P_0''	Ограничения на индекс $\nu = \nu' + i\nu''$. $\mathbb{N} = 1, 2, \dots$	Предел $ f $ при $ x \rightarrow \infty$	Выполнение условий КИ
1	$Q_0'' > 0$	$P_0'' > 0$	нет	$ f_e \rightarrow 0; f_o \rightarrow 0$	да
2	$Q_0'' > 0$	$P_0'' \leq 0$	$\nu = 2\mathbb{N} - 2$	$ f_e \rightarrow 0; f_o \rightarrow \infty$	только для Gf_e
3	$Q_0'' > 0$	$P_0'' \leq 0$	$\nu = 2\mathbb{N} - 1$	$ f_o \rightarrow 0; f_e \rightarrow \infty$	только для Gf_o
4	$Q_0'' \leq 0$	$P_0'' > 0$	$\nu = -2\mathbb{N}$	$ f_o \rightarrow 0; f_e \rightarrow \infty$	только для Gf_o
5	$Q_0'' \leq 0$	$P_0'' > 0$	$\nu = -2\mathbb{N} + 1$	$ f_e \rightarrow 0; f_o \rightarrow \infty$	только для Gf_e
6	$Q_0'' > 0$	$ P_0'' \rightarrow \infty$	$\nu' > -1/2$	$ f \rightarrow 0$	да
7	$Q_0'' > 0$	$ P_0'' \rightarrow \infty$	$\nu' = -1$	$ f \rightarrow \text{const}$	нет
8	$Q_0'' > 0$	$ P_0'' \rightarrow \infty$	$\nu' \in (-1; -1/2]$	$ f \rightarrow 0$	нет
9	$ Q_0'' \rightarrow \infty$	$P_0'' > 0$	$\nu' < -1/2$	$ f \rightarrow 0$	да
10	$ Q_0'' \rightarrow \infty$	$P_0'' > 0$	$\nu' \in [-1/2; 0)$	$ f \rightarrow 0$	нет
11	$ Q_0'' \rightarrow \infty$	$P_0'' > 0$	$\nu' = 0$	$ f \rightarrow \text{const}$	нет

2. Векторные астигматические световые пучки К-Г с однородной поляризацией.

Перейдем теперь от скалярных к векторным пучкам К-Г с однородной поляризацией. Следуя разработанному нами формализму [4]–[5], векторы электрического и магнитного полей векторных параксиальных декартовых пучков К-Г с однородной поляризацией запишем, как $\mathbf{E} = \mathbf{e}_\perp f + \theta \nabla_\perp f \cdot \mathbf{e}_z$, $\mathbf{H} = n[\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_\perp] f$. Здесь безразмерный параметр параксиальности

пучка $\theta = 1/kx_0 \ll 10^{-4}$. Заданный комплексный постоянный вектор поляризации $\mathbf{e}_\perp = \eta_x \mathbf{e}_x + \eta_y \mathbf{e}_y$ однозначно определяет поляризационные характеристики пучка. Поперечные компоненты вектора \mathbf{E} равны: $E_x = \eta_x f$; $E_y = \eta_y f$. Введем комплексный параметр поляризации $\eta = \eta_y / \eta_x = tg(\psi' + i\psi'')$, тогда азимут световой волны равен ψ' , а ее эллиптичность \mathcal{Y} выражается как $\gamma = th\psi''$ [6]. Продольная составляющая E_z электрического поля пучка выражается через вектор $\mathbf{a} = \nabla f / f$, как $E_z = i\theta(E_x a_x + E_y a_y) = i\theta(\eta_x a_x + \eta_y a_y)f = i\theta \mathbf{e}_\perp \mathbf{a}_\perp f$. Каждому из четырех типов скалярных пучков К-Г, описываемых функциями f_{jk} , соответствует некоторый пучок К-Г с вектором однородной поляризации \mathbf{E}_{jk} . Поперечные компоненты вектора \mathbf{a} : $a_{kx} = \partial_x f_{jk} / f_{jk}$; $a_{ky} = \partial_y f_{jk} / f_{jk}$.

Перейдем к энергетическим характеристикам векторных декартовых пучков К-Г. Усредненные по времени плотности энергии \mathcal{W} , продольного S_z и поперечного \mathbf{S}_\perp потоков энергии электромагнитного поля для параксиальных векторных пучков К-Г с однородной поляризацией можно представить как [2]:

$$w = \frac{\varepsilon |f|^2}{8\pi}; \quad S_z = \frac{c}{n} w; \quad \mathbf{S}_\perp = \mathbf{S}_o + \mathbf{S}_s; \quad \mathbf{S}_o = \theta S_z \cdot \text{Im}(\mathbf{e}_x a_x + \mathbf{e}_y a_y);$$

$$\mathbf{S}_s = \theta S_z \cdot th2\psi'' \cdot \text{Re}(\mathbf{e}_x a_y - \mathbf{e}_y a_x). \quad (2)$$

В выражении для \mathbf{S}_\perp выделены явно, следуя формализму [7]–[8], плотность орбитального \mathbf{S}_o и спинового \mathbf{S}_s потоков энергии.

Вычисляя X-компоненты векторов \mathbf{a} , получаем $a_{ex} = \frac{2iX}{Q_x} - \frac{2t_1 v_1 X \cdot M(1 - v_1/2, 3/2; t_1 X^2)}{M(-v_1/2, 1/2; t_1 X^2)}$;

$$a_{ox} = \frac{1}{X} + \frac{2iX}{Q_x} + \frac{2t_x(v_1 - 1)X \cdot M((3 - v_1)/2, 5/2; t_1 X^2)}{3Q_x M((1 - v_1)/2, 3/2; t_1 X^2)}$$
 и аналогичные выражения для a_{ey} и a_{oy} .

Здесь использованы известные [9] преобразования Куммера $\partial_u M(a, b, u) = \frac{a}{b} M(a + 1, b + 1, u)$.

Чтобы векторные пучки К-Г с однородной поляризацией переносили конечную мощность, необходимо, чтобы для функций f выполнялись условия её КИ. Выше нами были представлены условия КИ для скалярных 2D пучков К-Г. Эти ограничения на свободные параметры пучка, как показывает анализ, справедливы также и для векторных 3D пучков К-Г с однородной поляризацией.

Так как поляризация исследуемых векторных пучков К-Г однородная и она задается предварительно, то перейдем к графическому исследованию свойств энергетических потоков пучков. Продольный поток энергии S_z определяет интенсивность I пучка. Поперечные потоки энергии вследствие параксиального характера рассматриваемых полей значительно меньше продольных, однако часто очень важны в приложениях и ими нельзя пренебречь. Как отмечалось выше, возможны четыре различных типа пучков. На рисунках 2.1–2.3 показаны интенсивность и линии орбитального- \mathbf{S}_o , спинового- \mathbf{S}_s и общего \mathbf{S}_\perp потоков энергии для E_{ee} , E_{eo} , E_{oo} мод векторных декартовых пучков К-Г с однородной поляризацией. Как видим, число пиков интенсивности может изменяться от одного до нескольких. Все картины интенсивности и поперечных потоков энергии обладают двумя XZ и YZ плоскостями симметрии. Поэтому общая точечная группа симметрии $2_z m_x m_y$ у всех рисунков одинакова. Это обусловлено тем, что исходные функции h_1 и h_2 являются четными или нечетными относительно изменения знаков их аргументов. На рисунках 2.1–2.3 выбраны одинаковые значения свободных параметров, чтобы можно было проследить влияние четности или нечетности функций h_1 и h_2 на характеристики картин. По условиям КИ эти изображения соответ-

вуют варианту № 1 таблицы 1. Как видим, картины интенсивностей и поперечных потоков энергии могут быть самыми разнообразными. Как известно [10], для простейших векторных однородно поляризованных пучков Гаусса спиновые потоки энергии представляют собой концентрические окружности, а орбитальные – радиальные линии. Для ТЕ и ТМ мод Гаусса орбитальные потоки энергии снова направлены вдоль поперечных радиусов, а спиновые потоки энергии отсутствуют! Однако для мод К-Г кривые поперечных потоков энергии очень сложные. Переходы $E_{ee} - E_{eo} - E_{oo}$ также значительно изменяют соответствующие картины.

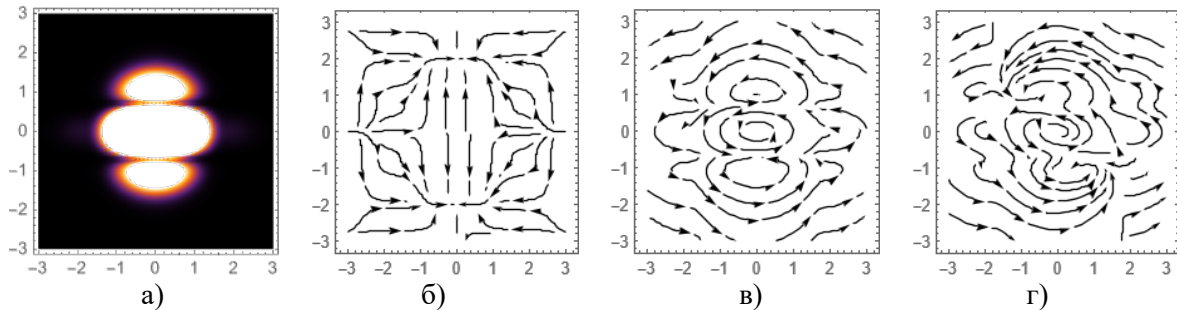


Рисунок 2.1 – Интенсивность I и линии поперечных потоков энергии E_{ee} -мод векторных декартовых пучков К-Г: а) интенсивность I ; б) линии орбитального S_o потока энергии; в) линии спинового S_s потока энергии; г) линии общего S_{\perp} потока энергии. Используемые параметры: $Z = 0.1$; $P''_{ox} = 1$; $P'_{ox} = 0$; $P'_{oy} = 0$; $P''_{oy} = 0.5$; $Q''_{ox} = 3$; $Q''_{oy} = 2$; $Q'_{oy} = 0$; $Q'_{ox} = 0$; $v''_1 = -0.2$; $v''_1 = 0.1$; $v'_1 = -1$; $v'_2 = -2.2$; $v''_2 = -0.1$

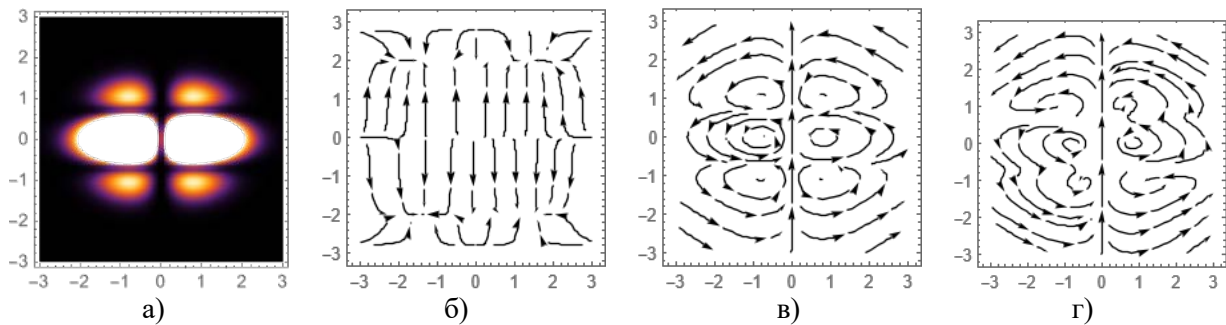


Рисунок 2.2 – Интенсивность I и линии поперечных потоков энергии E_{eo} -мод векторных декартовых пучков К-Г: а) интенсивность I ; б) линии орбитального S_o потока энергии; в) линии спинового S_s потока энергии; г) линии общего S_{\perp} потока энергии. Используемые параметры, как на Рисунке 2.1

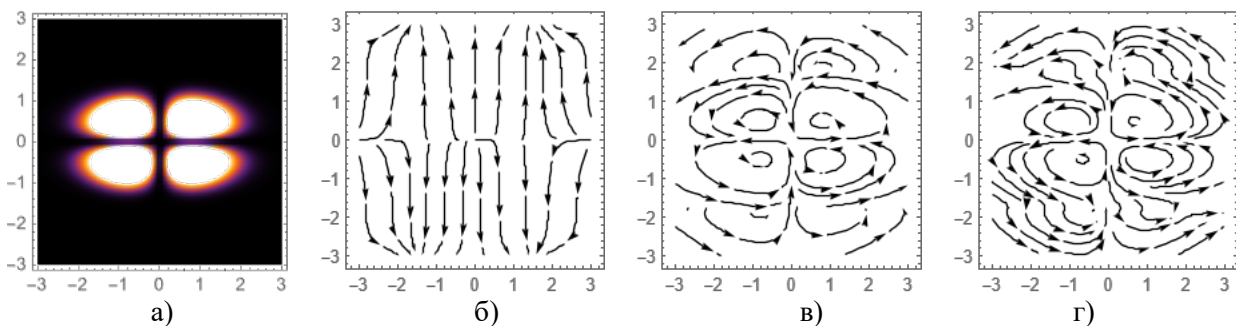


Рисунок 2.3 – Интенсивность I и линии поперечных потоков энергии E_{oo} -мод векторных декартовых пучков К-Г: а) интенсивность I ; б) линии орбитального S_o потока энергии; в) линии спинового S_s потока энергии. г) линии общего S_{\perp} потока энергии. Используемые параметры, как на Рисунке 2.1.

На рисунке 2.4 значение $Q''_{ox} < 0$ и используется функция h_{10} , поэтому для выполнения условий КИ выбран вариант № 4 таблицы 1. Так как здесь $P''_{oy} < 0$ и используется функция

h_{2e} , то выбирались ограничения на параметры, соответствующие варианту № 4 таблицы 1. Аналогичные результаты по условиям КИ будут также наблюдаться для Еео-мод (варианты № 3 и № 5 таблицы 1).

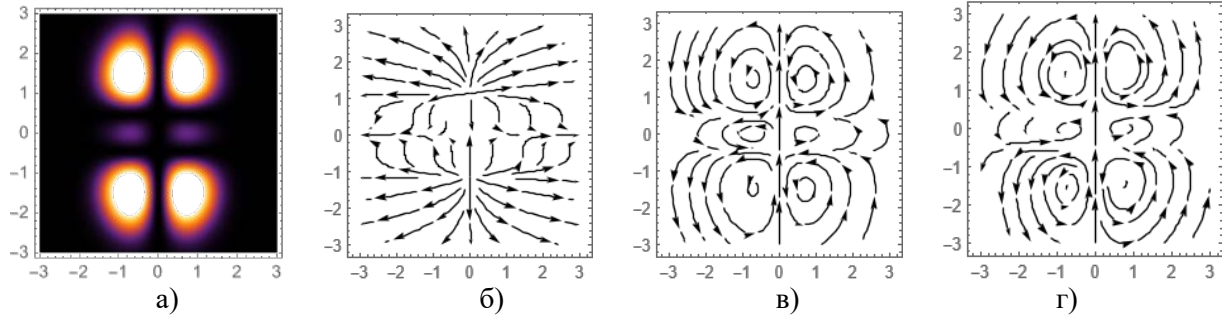


Рисунок 2.4 – Интенсивность I и линии поперечных потоков энергии Еое-мод векторных декартовых пучков К-Г: а) интенсивность I ; б) линии орбитального S_o потока энергии; в) линии спинового S_s потока энергии; г) линии общего S_{\perp} потока энергии. Используемые параметры: $Z=0.1$; $P''_{ox}=1$; $P'_{ox}=0$; $P'_{oy}=0$; $P''_{oy}=-0.5$; $Q''_{ox}=-1$; $Q''_{oy}=2$; $Q'_{oy}=0$; $Q'_{ox}=0$; $v''_1=0$; $v'_1=-2$; $v'_2=2$; $v''_2=0$.

Рисунок 2.5 соответствует варианту № 9 таблицы 1. Аналогичные результаты по условиям КИ будут также наблюдаться для варианта №6 таблицы 1. Вариант № 6 эквивалентен № 9 после замен $P \leftrightarrow Q$. Хотя на рисунке 2.5 построены графики для Еоо-мод, условия КИ и те же самые параметры пригодны также для остальных трех типов мод.

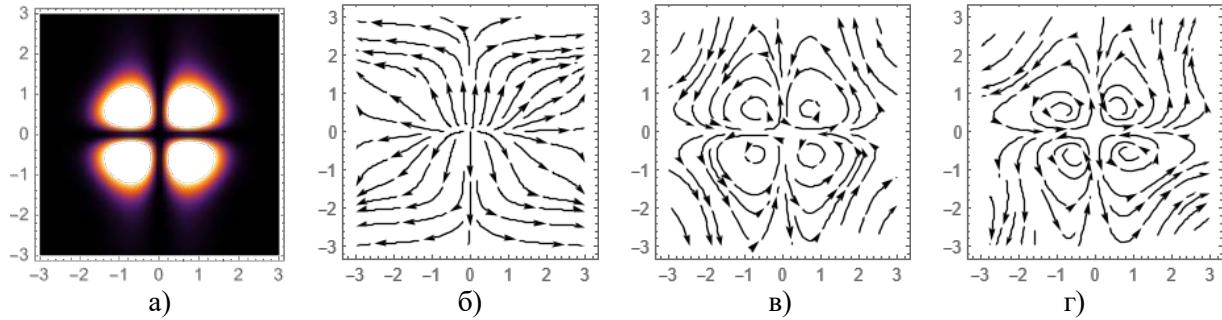


Рисунок 2.5 – Интенсивность I и линии поперечных потоков энергии Еоо-мод векторных декартовых пучков: а) интенсивность I ; б) линии орбитального S_o потока энергии; в) линии спинового S_s потока энергии; г) линии общего S_{\perp} потока энергии. Используемые параметры: $Z=0.1$; $P''_{ox}=1$; $P'_{ox}=0$; $P'_{oy}=0$; $P''_{oy}=0.5$; $Q''_{ox} \rightarrow \infty$; $Q''_{oy} \rightarrow \infty$; $Q'_{oy}=0$; $Q'_{ox}=0$; $v''_1=-0.2$; $v''_1=0.1$; $v'_1=-2$; $v'_2=-1.5$; $v''_2=0.2$.

Коснемся теперь вопроса о влиянии различных свободных параметров на свойства изображений. Возрастание продольного расстояния Z приводит, как известно, к поперечному расплыванию картин. Варьирование остальных комплексных свободных параметров сложным образом влияет на возможные изменения соответствующих картин. Даже мнимые части v''_1 , v''_2 свободных параметров v_1 , v_2 могут количественно и качественно влиять на картины, хотя не изменяют условий физической реализуемости пучков.

Заключение. В данной работе выведены выражения, описывающие практически не изучавшиеся типы пучков – векторные параксиальные астигматические декартовы световые пучки К-Г с однородной поляризацией. Они характеризуются шестью свободными непрерывными комплексными параметрами (v_1 , v_2 , Q_{ox} , Q_{oy} , P_{ox} , P_{oy}). Приведен формализм для вычисления поляризационных характеристик таких пучков. Сформулированы условия физической реализуемости однородно поляризованных декартовых векторных пучков К-Г с переносимой конечной мощностью во всем пространстве. Существенно, что условия КИ пригодны для не-

прерывных комплексных значений свободных параметров ν_1 и ν_2 . Вычислены явные выражения для плотностей продольного и поперечного потоков энергии для исследуемых пучков К-Г. Выполнено графическое моделирование их поперечных потоков энергии и интенсивности. Проведен соответствующий анализ. Установлено, что выбор различных свободных параметров пучка приводит к качественно различным физическим картинам.

Литература

1. Bandres, M. A. Cartesian beams / M. A. Bandres, J. C. Gutierrez-Vega // *Optics Letters*. – 2007. – Vol. 32, № 23. – P. 3459–3461.
2. Гиргель, С. С. Скалярные параксиальные двумерные гауссовоподобные световые пучки / С. С. Гиргель // *Проблемы, физики, математики и техники*. – 2010. – № 1 (2). – С. 7–11.
3. Гиргель, С. С. Скалярные астигматические 3D световые пучки Куммера-Гаусса / С. С. Гиргель // *Проблемы, физики, математики и техники*. – 2013. – № 1 (14). – С. 19–23.
4. Гиргель, С. С. Децентрированные пучки Куммера-Гаусса / С. С. Гиргель // *Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины*. – 2015. – № 6 (93). – С. 112–116.
5. Гиргель, С. С. Поляризационные и энергетические свойства векторных гауссовоподобных пучков. I. Однородная поляризация / С. С. Гиргель // *Проблемы физики, математики и техники*. – 2016. – № 1 (26). – С. 17–21.
6. Гиргель, С. С. Энергетические характеристики векторных декартовых пучков Куммера с переносимой конечной мощностью / С. С. Гиргель // *Проблемы физики, математики и техники*. – 2022. – № 3 (52). – С. 13–17.
7. Berry, M. V. Optical currents / M. V. Berry // *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics*. – 2009. – Vol. 11 (9). – P. 094001.
8. Bekshaev, A. Internal flows and energy circulation in light beams / A. Bekshaev, K. Bliokh, M. Soskin // *Journal of Optics* – 2011. – Vol. 13 (5). – P. 053001.
9. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. – М. : Наука, 1979. – 830 с.
10. Гиргель, С. С. Поляризационные и энергетические свойства векторных параксиальных гауссовых световых пучков / С. С. Гиргель // *Проблемы физики, математики и техники*. – 2012. – № 3 (12). – С. 19–24.