Проблемы физики, математики и техники, № 1 (38), 2019

УДК 512.548

О НЕ *n*-ПОЛУАБЕЛЕВОСТИ ПОЛИАДИЧЕСКИХ ГРУППОИДОВ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

А.М. Гальмак

Могилёвский государственный университет продовольствия

ON NON-*n*-SEMIABELIANISM POLYADIC GROUPOIDS OF SPECIAL CLASS

A.M. Gal'mak

Mogilev State University of Food Technologies

Изучается перестановочность элементов в полиадических группоидах с полиадической операцией $\eta_{s,\sigma,k}$, которая определяется на декартовой степени A^k n-арного группоида $< A, \eta >$ с помощью подстановки $\sigma \in \mathbf{S}_k$ и n-арной операции η. Основным результатом статьи является теорема, в которой сформулированы достаточные условия не n-полуабелевости l-арного группоида $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$, где $l = s(n-1)+1$, $k \geq 2$. Приведены многочисленные следствия из этой теоремы. В частности установлено, что если подстановка σ удовлетворяет условиям $\sigma^{n-1} \neq \sigma$, $\sigma^l = \sigma$, n-арная группа $< A, \eta >$ имеет не менее двух элементов, то полиадический группоид $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ является не n-полуабелевой полиадической группой.

Ключевые слова: *полиадическая операция*, *n-арный группоид*, *абелевость*, *полуабелевость*, *нейтральная последовательность.*

The permutability of the elements in polyadic groupoids with polyadic operation $\eta_{s,\sigma,k}$ that is defined on Cartesian power of A^k n-ary groupoid $< A, \eta >$ by substitution $\sigma \in \mathbf{S}_k$ and n-ary operation η are considered. The main result of the article is the theorem in which sufficient conditions of non-n-semiabelianism of l-ary ($l = s(n-1)+1$, $k \geq 2$) groupoid $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ are formulated. Numerous consequences of this theorem are given. In particular, it was found that if substitution σ satisfies the conditions $\sigma^{n-1} \neq \sigma$, $\sigma^l = \sigma$, n-ary group $< A, \eta >$ has no less than two elements, then polyadic groupoid $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ is a non-n-semiabelian polyadic group.

Keywords: *polyadic operation*, *n-ary groupoid*, *abelianism*, *semiabelianism*, *neutral sequence.*

Введение

Полиадическими группоидами специального вида мы называем l-арные группоиды $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ с l-арной операцией $\eta_{s,\sigma,k}$, которая первоначально была определена в [1, определение 1.1] следующим образом.

Пусть $< A, \eta >$ – n-арный группоид, $n \geq 2$, $s \geq 1$, $l = s(n-1)+1$, $k \geq 2$, $\sigma \in \mathbf{S}_k$. Определим на A^k вначале n-арную операцию

$$\eta_{1,\sigma,k}(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n) =$$

$$= \eta_{1,\sigma,k}((x_{11}, \ldots, x_{1k}) \ldots (x_{n1}, \ldots, x_{nk})) = \quad (0.1)$$

$$= (\eta(x_{11}x_{2\sigma(1)} \ldots x_{n\sigma^{n-1}(1)}), \ldots, \eta(x_{1k}x_{2\sigma(k)} \ldots x_{n\sigma^{n-1}(л)})),$$

а затем l-арную операцию

$$\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_l) =$$

$$= \eta_{1,\sigma,k}(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{n-1}\eta_{1,\sigma,k}(\mathbf{x}_n \ldots \mathbf{x}_{2(n-1)}$$

$$\eta_{1,\sigma,k}(\ldots \eta_{1,\sigma,k}(\mathbf{x}_{(s-2)(n-1)+1} \ldots \mathbf{x}_{(s-1)(n-1)}$$

$$\eta_{1,\sigma,k}(\mathbf{x}_{(s-1)(n-1)+1} \ldots \mathbf{x}_{s(n-1)+1})) \ldots))). \quad (0.2)$$

В работе [2] для любых целых $k \geq 2$, $l \geq 2$ и любой подстановки σ множества $\{1, \ldots, k\}$ на k-ой декартовой степени A^k группоида A была определена l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$, которая является частным случаем l-арной операции $\eta_{s,\sigma,k}$, так как совпадает с ней при $n = 2$. Заметим, что ранее в книге [3] l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$ была определенна на k-ой декартовой степени полугруппы. В свою очередь, частными случаями l-арной операции $[\ ]_{l,\sigma,k}$ являются две полиадические операции, которые Э. Пост определил и изучал в [4]. Одна из них была определена им на декартовой степени симметрической группы. Вторую операцию Э. Пост определил на декартовой степени полной линейной группы над полем комплексных чисел. Частным случаем l-арной операции $\eta_{s,\sigma,k}$ является и n-арная операция $\tilde{\eta}$ из [3, с. 227], которая совпадает с n-арной операцией $\eta_{1,(12\ldots n-1),n-1}$.

Статья посвящена нахождению достаточных условий при которых l-арный группоид $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ не является n-полуабелевым.

1 Предварительные сведения, используемые результаты

При изучении l-арной операции $\eta_{s,\sigma,k}$ полезна следующая

***Теорема* 1.1** [1, теорема 1.1]. *Если*

$$\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ik}),\ i = 1, 2, \ldots, l,$$

$$\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_l) = (y_1, \ldots, y_{\mathrm{k}}),$$

то для любого $j \in \{1, \ldots, k\}$ j-я компонента y_j находится по формуле

$$y_j = \eta(x_{1j}x_{2\sigma(j)} \ldots x_{(n-1)\sigma^{n-2}(j)}$$

$$\eta(x_{n\sigma^{n-1}(j)} \ldots x_{(2(n-1))\sigma^{2(n-1)-1}(j)}\ \eta(\ldots$$

$$\ldots \eta\,(x_{((s-1)(n-1)+1)\sigma^{(s-1)(n-1)}(j)} \ldots$$

$$\ldots\ \eta\ x_{(s(n-1)+1)\sigma^{s(n-1)}(j)})\ \ldots))). \qquad (1.1)$$

***Замечание* 1.1.** Если n-арная операция η ассоциативна, то (1.1) может быть переписано следующим образом

$$y_j = \eta(x_{1j}x_{2\sigma(j)}\ \ldots\ x_{(s(n-1)+1)\sigma^{s(n-1)}(j)}) =$$
$$= \eta(x_{1j}x_{2\sigma(j)}\ \ldots\ x_{l\sigma^{l-1}(j)}). \qquad (1.2)$$

Если η – бинарная операция, обозначаемая символом $\circ$, то бинарная операция $\eta_{1,\sigma,k}$ совпадает с бинарной операцией $\overset{\sigma}{\circ}$, а l-арная операция $\eta_{s,\sigma,k}$, где $l = s + 1$, совпадает с $(s + 1)$-арной операцией $[\ ]_{s+1,\sigma,k}$ из [2]. При этом равенства (0.1), (0.2) и (1.1) принимают соответственно вид

$$\mathbf{x}_1 \overset{\sigma}{\circ} \mathbf{x}_2 = (x_{11}, \ldots, x_{1k}) \overset{\sigma}{\circ} (x_{21}, \ldots, x_{2k}) =$$
$$= (x_{11}x_{2\sigma(1)}, \ldots, x_{1k}x_{2\sigma(k)}),$$
$$[\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_k]_{l,\sigma,k} =$$
$$= \mathbf{x}_1 \overset{\sigma}{\circ} (\mathbf{x}_2 \overset{\sigma}{\circ} (\ \ldots (\mathbf{x}_{l-2} \overset{\sigma}{\circ} (\mathbf{x}_{l-1} \overset{\sigma}{\circ} \mathbf{x}_l)) \ldots)),$$
$$y_j = (x_{1j}(x_{2\sigma(j)}(\ \ldots (\ x_{s\sigma^{s-1}(j)}\ x_{(s+1)\sigma^{s}(j)}) \ldots))). \quad (1.3)$$

Для сокращения записей в правой части равенства (1.3) символ операции $\circ$ не указан.

Для ассоциативной бинарной операции η равенства (1.2) и (1.3) принимают вид

$$y_j = x_{1j}x_{2\sigma(j)}\ \ldots\ x_{s\sigma^{s-1}(j)}\ x_{(s+1)\sigma^{s}(j)} =$$
$$= x_{1j}x_{2\sigma(j)}\ \ldots\ x_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)}\ x_{l\sigma^{l-1}(j)},$$

где снова символ операции $\circ$ не указан. Именно последним равенством в [3, определении 3.1.4] была определена l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$ на k-ой декартовой степени полугруппы A.

Следующие теоремы показывают, что свойства «быть полиадической полугруппой», «быть полиадической группой» переносятся с n-арного группоида $< A, \eta >$ на l-арный группоид $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$, если подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$. Для соответствующего переноса свойства «быть полиадической квазигруппой» условие $\sigma^l = \sigma$ не обязательно.

***Теорема* 1.2** [1, теорема 2.1]. *Если n-арная операция* η *– ассоциативна, подстановка* σ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$, *то l-арная операция* $\eta_{s,\sigma,k}$ *ассоциативна.*

***Теорема* 1.3** [5, теорема 4.1]. *Если* $< A, \eta >$ *– n-арная группа, подстановка* σ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$, *то* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *– l-арная группа.*

***Теорема* 1.4** [5, теорема 3.1]. *Если* $< A, \eta >$ *– n-арная квазигруппа, то* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *– l-арная квазигруппа.*

Напомним, что последовательность $e_1 \ldots e_{n-1}$ элементов n-арного группоида $< A, [\ ] >$ называют: *нейтральной* в нём, если для любого $x \in A$ верно

$$[e_1 \ldots e_{n-1}x] = [xe_1 \ldots e_{n-1}] = x;$$

левой нейтральной в нём, если для любого $x \in A$ верно

$$[e_1 \ldots e_{n-1}x] = x;$$

правой нейтральной в нём, если для любого $x \in A$ верно

$$[xe_1 \ldots e_{n-1}] = x.$$

Нейтральные последовательности впервые были определены Э. Постом в [4] для n-арных групп.

Если в n-арном группоиде $< A, \eta >$ для любой подстановки σ множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ выполняется тождество

$$\eta(x_1x_2 \ldots x_n) = \eta(x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)} \ldots x_{\sigma(n)}),$$

то n-арный группоид $< A, \eta >$ и n-арную операцию η называют *абелевыми*.

n-Арный группоид $< A, \eta >$, в котором выполняется тождество

$$\eta(xx_1 \ldots x_{n-2}y) = \eta(yx_1 \ldots x_{n-2}x),$$

называют *полуабелевым*. *Полуабелевой* в этом случае называют и саму n-арную операцию η.

Абелевы и полуабелевы n-арные операции впервые появились у В. Дёрнте [6] при изучении n-арных групп.

При $n = 2$ понятия абелевости и полуабелевости совпадают, так как в этом случае указанные выше тождества принимают вид $xy = yx$.

Ещё одним обобщением абелевых группоидов являются n-полуабелевы l-арные группоиды.

Пусть $l = s(n – 1) + 1$, $s \geq 1$. l-Арный группоид $< A, \eta >$ называется n-полуабелевым, если в нём для любых $t = 0, 1, \ldots, s – 1$ выполняется тождество

$$\eta(x_1 \ldots x_{t(n-1)}x_{t(n-1)+1}x_{t(n-1)+2} \ldots x_{(t+1)(n-1)}$$
$$x_{(t+1)(n-1)+1}x_{(t+1)(n-1)+2} \ldots x_{s(n-1)+1}) =$$
$$= \eta(x_1 \ldots x_{t(n-1)}x_{(t+1)(n-1)+1}x_{t(n-1)+2} \ldots$$
$$\ldots x_{(t+1)(n-1)}x_{t(n-1)+1}x_{(t+1)(n-1)+2} \ldots x_{s(n-1)+1}). \quad (1.4)$$

В частности, при $t = 0$ тождество (1.4) принимает вид

$$\eta(x_1x_2 \ldots x_{n-1}x_nx_{n+1} \ldots x_{s(n-1)+1}) =$$
$$= \eta(x_nx_2 \ldots x_{n-1}x_1x_{n+1} \ldots x_{s(n-1)+1}). \qquad (1.5)$$

Поэтому l-арный группоид $< A, \eta >$ не является n-полуабелевым, если в нём не выполняется последнее тождество.

Если положить

$$\alpha_i = x_{(i-1)(n-1)+2} \ldots x_{i(n-1)},\ i = 1, \ldots s,$$

то тождество (1.4) можно переписать следующим образом

$$[x_1\alpha_1x_n\ldots x_{(t-1)(n-1)+1}\alpha_tx_{t(n-1)+1}\alpha_{t+1}x_{(t+1)(n-1)+1}\alpha_{t+2}\ldots\alpha_sx_l] =$$
$$= [x_1\alpha_1x_n\ldots x_{(t-1)(n-1)+1}\alpha_tx_{(t+1)(n-1)+1}\alpha_{t+1}x_{t(n-1)+1}\alpha_{t+2}\ldots\alpha_sx_l].$$

***Замечание* 1.2.** Понятно, что 2-полуабелевые l-арные группоиды – это в точности абелевы l-арные группоиды. Ясно также, что l-полуабелевые l-арные группоиды – это в точности полуабелевы l-арные группоиды.

n-Полуабелевые полиадически операции впервые появились у Э. Поста [4] при изучении полиадических групп.

Полиадический группоид, не являющийся n-полуабелевым, будем называть также *не n-полуабелевым*.

2 Неравенства в $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$

Прежде чем сформулировать признаки не n-полуабелевости l-арного группоида $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$, докажем некоторые неравенства, которые справедливы в $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$.

***Теорема* 2.1**. *Пусть для подстановки* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *подстановка* σ^{n-1} *не является тождественной, n-арный группоид* $< A, \eta >$ *обладает такими элементами* $a, e_1, \ldots, e_{n-1}$, *что* $a \neq e_{n-1}$,

$$\eta(ae_1 \ldots e_{n-1}) = a, \qquad (2.1)$$

$$\eta(e_{n-1}e_1 \ldots e_{n-1}) = e_{n-1}. \qquad (2.2)$$

Зафиксируем $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$, *для которого* $\sigma^{n-1}(j) \neq j$, *и положим*

$$\mathbf{a} = (a_1 = e_{n-1}, \ldots, = a_{j-1} = e_{n-1}, a_j = a, a_{j+1} = e_{n-1}, \ldots, = a_k = e_{n-1}), \qquad (2.3)$$

$$\mathbf{e}_1 = (\underbrace{e_1, \ldots, e_1}_{k}),\ \mathbf{e}_2 = (\underbrace{e_2, \ldots, e_2}_{k}),\ \ldots,\ \mathbf{e}_{n-1} = (\underbrace{e_{n-1}, \ldots, e_{n-1}}_{k}).$$

Тогда

$$\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{a}\underbrace{\mathbf{e}_1 \ldots \mathbf{e}_{n-1} \ldots \mathbf{e}_1 \ldots \mathbf{e}_{n-1}}_{s}) \neq$$

$$\neq \eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{e}_{n-1}\mathbf{e}_1 \ldots \mathbf{e}_{n-2}\mathbf{a}\underbrace{\mathbf{e}_1 \ldots \mathbf{e}_{n-1} \ldots \mathbf{e}_1 \ldots \mathbf{e}_{n-1}}_{s-1}). \qquad (2.4)$$

Доказательство. Заметим, что выбор $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ с условием $\sigma^{n-1}(j) \neq j$ возможен, так как подстановка $\sigma^{n-1}(j)$ не является тождественной. Положим

$$\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{a}\underbrace{\mathbf{e}_1 \ldots \mathbf{e}_{n-1} \ldots \mathbf{e}_1 \ldots \mathbf{e}_{n-1}}_{s}) = (y_1, y_2, \ldots, y_k),$$

$$\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{e}_{n-1}\mathbf{e}_1 \ldots \mathbf{e}_{n-2}\mathbf{a}\underbrace{\mathbf{e}_1 \ldots \mathbf{e}_{n-1} \ldots \mathbf{e}_1 \ldots \mathbf{e}_{n-1}}_{s-1}) = (z_1, z_2, \ldots, z_k).$$

Тогда, согласно теореме 1.1,

$$y_j = \eta(ae_1 \ldots e_{n-2}\underbrace{\eta(e_{n-1}e_1 \ldots e_{n-2}\eta(e_{n-1}e_1 \ldots e_{n-2} \ldots \eta(e_{n-1}e_1 \ldots e_{n-2}}_{s-2}\eta(e_{n-1}e_1 \ldots e_{n-1}))\ldots))).$$

Применяя к полученному равенству $s - 1$ раз равенство (2.2), получим

$$y_j = \eta(ae_1 \ldots e_{n-2}\underbrace{\eta(e_{n-1}e_1 \ldots e_{n-2}\eta(e_{n-1}e_1 \ldots e_{n-2} \ldots \eta(e_{n-1}e_1 \ldots e_{n-2}}_{s-3}\eta(e_{n-1}e_1 \ldots e_{n-1}))\ldots))) =$$

$$\ldots$$

$$= \eta(ae_1 \ldots e_{n-2}\eta(e_{n-1}e_1 \ldots e_{n-1})) = \eta(ae_1 \ldots e_{n-2}e_{n-1}),$$

то есть

$$y_j = \eta(ae_1 \ldots e_{n-2}e_{n-1}).$$

Из этого равенства и из равенства (2.1) вытекает $y_j = a$.

Согласно теореме 1.1,

$$z_j = \eta(e_{n-1}e_1 \ldots e_{n-2}\eta(a_{\sigma^{n-1}(j)}e_1 \ldots e_{n-2}\underbrace{\eta(e_{n-1}e_1 \ldots e_{n-2}\eta(e_{n-1}e_1 \ldots e_{n-2} \ldots \eta(e_{n-1}e_1 \ldots e_{n-2}}_{s-3}\eta(e_{n-1}e_1 \ldots e_{n-1}))\ldots))).$$

Кроме того, из (2.3), ввиду $\sigma^{n-1}(j) \neq j$, следует $a_{\sigma^{n-1}(j)} = e_{n-1}$. Таким образом,

$$z_j = \eta(e_{n-1}e_1 \ldots e_{n-2}\eta(e_{n-1}e_1 \ldots e_{n-2}\underbrace{\eta(e_{n-1}e_1 \ldots e_{n-2}\eta(e_{n-1}e_1 \ldots e_{n-2} \ldots \eta(e_{n-1}e_1 \ldots e_{n-2}}_{s-3}\eta(e_{n-1}e_1 \ldots e_{n-1}))\ldots))).$$

Применяя к полученному равенству s раз равенство (2.2), получим $z_j = e_{n-1}$. А так как

$$y_j = a,\ z_j = e_{n-1},\ a \neq e_{n-1},$$

то $y_j \neq z_j$, откуда следует, что доказываемое неравенство (2.4) из формулировки теоремы верно. □

Сформулируем следствие из теоремы 2.1 для $n = 3$.

***Следствие* 2.1.** *Пусть для подстановки* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *подстановка* σ^2 *не является тождественной, тернарный группоид* $< A, \eta >$ *обладает такими элементами* a, e_1, e_2, *что*

$$a \neq e_2,\ \eta(ae_1e_2) = a,\ \eta(e_2e_1e_2) = e_2.$$

Зафиксируем $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$, *для которого* $\sigma^2(j) \neq j$, *положим*

$$\mathbf{a} = (a_1 = \ldots = a_{j-1} = e_2, a_j = a, a_{j+1} = \ldots = a_k = e_2), \qquad (2.5)$$

и определим элементы $\mathbf{e}_1$ *и* $\mathbf{e}_2$ *так же, как в теореме* 2.1. *Тогда*

$$\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{a}\underbrace{\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 \ldots \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2}_{s}) \neq$$

$$\neq \eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1\mathbf{a}\underbrace{\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 \ldots \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2}_{s-1}). \qquad (2.6)$$

Если в теореме 2.1 положить $a = e_1$, то верна

***Теорема* 2.2.** *Пусть для подстановки* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *подстановка* σ^{n-1} *не является тождественной, n-арный группоид* $< A, \eta >$, *где* $n \geq 3$, *обладает такими элементами* $e_1, \ldots, e_{n-1}$, *что* $e_1 \neq e_{n-1}$,

$$\eta(e_1e_1 \ldots e_{n-1}) = e_1,$$

$$\eta(e_{n-1}e_1 \ldots e_{n-1}) = e_{n-1}.$$

Зафиксируем $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$, *для которого* $\sigma^{n-1}(j) \neq j$, *положим*

$$\mathbf{a} = (a_1 = \ldots = a_{j-1} = e_{n-1}, a_j = e_1, a_{j+1} = \ldots = a_k = e_{n-1}) \qquad (2.7)$$

и определим элементы $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{n-1}$ *так же, как в теореме* 2.1. *Тогда верно неравенство* (2.4).

Полагая в теореме 2.2 $n = 3$, получим

***Следствие* 2.2.** *Пусть для подстановки* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *подстановка* σ^2 *не является тождественной, тернарный группоид* $< A, \eta >$ *обладает такими элементами* e_1, e_2, *что*

$$e_1 \neq e_2,\ \eta(e_1e_1e_2) = e_1,\ \eta(e_2e_1e_2) = e_2.$$

Зафиксируем $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$, *для которого* $\sigma^2(j) \neq j$, *положим*

$$\mathbf{a} = (a_1 = \ldots = a_{j-1} = e_2, a_j = e_1, a_{j+1} = \ldots = a_k = e_2) \qquad (2.8)$$

и определим элементы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ *так же, как в теореме* 2.1. *Тогда верно неравенство* (2.6).

Случай нейтральных последовательностей. Так как для правой нейтральной (нейтральной) последовательности $e_1 \ldots e_{n-1}$ n-арного группоида $< A, \eta >$ верны равенства (2.1) и (2.2), то теореме 2.1 соответствует следующая

Теорема 2.3. *Пусть для подстановки* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *подстановка* σ^{n-1} *не является тождественной, неодноэлементный* n*-арный группоид* $< A, \eta >$ *обладает правой нейтральной* (*нейтральной*) *последовательностью* $e_1 \ldots e_{n-1}$. *Зафиксируем* $a \in A$ $(a \neq e_{n-1})$, *а также* $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$, *для которого* $\sigma^{n-1}(j) \neq j$, *и определим элементы* $\mathbf{a}$, $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{n-1}$ *так же, как в теореме* 2.1. *Тогда верно неравенство* (2.4).

Сформулируем следствие из теоремы 2.3 для $n = 3$.

Следствие 2.3. *Пусть для подстановки* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *подстановка* σ^2 *не является тождественной, неодноэлементный тернарный группоид* $< A, \eta >$ *обладает правой нейтральной* (*нейтральной*) *последовательностью* e_1e_2. *Зафиксируем* $a \in A$ $(a \neq e_2)$, *а также* $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$, *для которого* $\sigma^2(j) \neq j$, *и определим элемент* $\mathbf{a}$ *с помощью* (2.5), *а элементы* $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ – *так же, как в теореме* 2.1. *Тогда верно неравенство* (2.6).

Следующая теорема вытекает из теоремы 2.3, если в ней положить $a = e_1$.

Теорема 2.4. *Пусть для подстановки* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *подстановка* σ^{n-1} *не является тождественной,* n*-арный группоид* $< A, \eta >$, *где* $n \geq 3$, *обладает такой правой нейтральной* (*нейтральной*) *последовательностью* $e_1 \ldots e_{n-1}$, *что* $e_1 \neq e_{n-1}$. *Зафиксируем* $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$, *для которого* $\sigma^{n-1}(j) \neq j$, *и определим элемент* $\mathbf{a}$ *с помощью* (2.7), *а элементы* $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{n-1}$ – *так же, как в теореме* 2.1. *Тогда верно неравенство* (2.4).

Следующее следствие может быть получено из теоремы 2.4, если в ней положить $n = 3$.

Следствие 2.4. *Пусть для подстановки* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *подстановка* σ^2 *не является тождественной, тернарный группоид* $< A, \eta >$ *обладает такой правой нейтральной* (*нейтральной*) *последовательностью* e_1e_2, *что* $e_1 \neq e_2$. *Зафиксируем* $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$, *для которого* $\sigma^2(j) \neq j$, *и определим элемент* $\mathbf{a}$ *с помощью* (2.8), *а элементы* $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ – *так же, как в теореме* 2.1. *Тогда верно неравенство* (2.6).

Случай идемпотентов. Если в теореме 2.1 все $e_1, \ldots, e_{n-1}$ совпадают с некоторым идемпотентом e n-арного группоида $< A, \eta >$, то верно равенство (2.2). Поэтому справедлива

Теорема 2.5. *Пусть для подстановки* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *подстановка* σ^{n-1} *не является тождественной,* n*-арный группоид* $< A, \eta >$ *обладает такими элементом* a *и идемпотентом* e, *что*

$$a \neq e,\ \eta(a\underbrace{e \ldots e}_{n-1}) = a. \qquad (2.9)$$

Зафиксируем $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$, *для которого* $\sigma^{n-1}(j) \neq j$, *и положим*

$$\mathbf{a} = (a_1 = \ldots = a_{j-1} = e,\ a_j = a,$$
$$a_{j+1} = \ldots = a_k = e),\ \mathbf{e} = (\underbrace{e, \ldots, e}_{k}). \qquad (2.10)$$

Тогда

$$\eta_{s,\,\sigma,\,k}(\mathbf{a}\underbrace{\mathbf{e} \ \ldots \ \mathbf{e}}_{s(n-1)}) \neq \eta_{s,\,\sigma,\,k}(\underbrace{\mathbf{e} \ldots \mathbf{e}}_{n-1}\mathbf{a}\underbrace{\mathbf{e} \ \ldots \ \mathbf{e}}_{(s-1)(n-1)}). \ (2.11)$$

Сформулируем следствие из теоремы 2.5 для $n = 3$.

Следствие 2.5. *Пусть для подстановки* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *подстановка* σ^2 *не является тождественной, тернарный группоид* $< A, \eta >$ *обладает такими элементом* a *и идемпотентом* e, *что* $a \neq e$, $\eta(aee) = a$. *Зафиксируем* $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$, *для которого* $\sigma^2(j) \neq j$, *и определим элементы* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{e}$ *с помощью* (2.10). *Тогда*

$$\eta_{s,\,\sigma,\,k}(\mathbf{a}\underbrace{\mathbf{e} \ldots \mathbf{e}}_{2s}) \neq \eta_{s,\,\sigma,\,k}(\mathbf{eea}\underbrace{\mathbf{e} \ldots \mathbf{e}}_{2(s-1)}). \qquad (2.12)$$

Случай единиц. Если неодноэлементный n-арный группоид $< A, \eta >$ обладает правой единицей (единицей) e, то для любого его элемента a, отличного от e, выполняется условие (2.9) из теоремы 2.5. Поэтому справедлива

Теорема 2.6. *Пусть для подстановки* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *подстановка* σ^{n-1} *не является тождественной, неодноэлементный* n*-арный группоид* $< A, \eta >$ *обладает правой единицей* (*единицей*) e. *Зафиксируем* $a \in A$ $(a \neq e)$, *а также* $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$, *для которого* $\sigma^{n-1}(j) \neq j$, *и определим элементы* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{e}$ *с помощью* (2.10). *Тогда верно неравенство* (2.11).

Сформулируем следствие из теоремы 2.6 для $n = 3$.

Следствие 2.6. *Пусть для подстановки* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *подстановка* σ^2 *не является тождественной, неодноэлементный тернарный группоид* $< A, \eta >$ *обладает правой единицей* (*единицей*) e. *Зафиксируем* $a \in A$ $(a \neq e)$, *а также* $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$, *для которого* $\sigma^2(j) \neq j$, *и определим элементы* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{e}$ *с помощью* (2.10). *Тогда верно неравенство* (2.12).

Если η – бинарная операция ($n = 2$), то l-арная операция $\eta_{s,\,\sigma,\,k}$ совпадает с $(s + 1)$-арной операцией $[\ ]_{s+1,\,\sigma,\,k}$. Поэтому из теоремы 2.1 или из теоремы 2.5 вытекает

Следствие 2.7. *Пусть подстановка* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *не является тождественной, группоид* $< A, \eta >$ *обладает элементом* a *и идемпотентом* e *такими, что*

$$a \neq e,\ \eta(ae) = a.$$

Зафиксируем $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$, *для которого* $\sigma(j) \neq j$, *и определим элементы* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{e}$ *с помощью* (2.10). *Тогда*

$$[\mathbf{a}\underbrace{\mathbf{e} \ldots \mathbf{e}}_{s}]_{s+1,\,\sigma,\,k} \neq [\mathbf{ea}\underbrace{\mathbf{e} \ldots \mathbf{e}}_{s-1}]_{s+1,\,\sigma,\,k}.$$

***Замечание* 2.1.** Так как в группоидах правая нейтральная последовательность является правой единицей, а всякая правая единица группоида является его идемпотентом, то следствия из теорем 2.3 и 2.6 для $n = 2$ содержатся в следствии 2.7.

3 Не *n*-полуабелевость *l*-арного группоида $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$

Неравество (2.4) означает, что в l-арном группоиде $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ не выполняется тождество вида (1.5). Поэтому для каждого результата предыдущего раздела можно сформулировать признак не n-полуабелевости соответствующего полиадического группоида.

Например, теоремам 2.1–2.6 соответствуют следующие признаки.

***Теорема* 3.1.** *Пусть для подстановки* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *подстановка* σ^{n-1} *не является тождественной, n-арный группоид* $< A, \eta >$ *обладает такими элементами* $a, e_1, \ldots, e_{n-1}$, *что* $a \neq e_{n-1}$, *и верны равенства* (2.1) и (2.2). *Тогда l-арный группоид* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *не является n-полуабелевым.*

***Теорема* 3.2.** *Пусть для подстановки* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *подстановка* σ^{n-1} *не является тождественной, n-арный группоид* $< A, \eta >$, *где* $n \geq 3$, *обладает такими элементами* $e_1, \ldots, e_{n-1}$, *что* $e_1 \neq e_{n-1}$,

$$\eta(e_1e_1 \ldots e_{n-1}) = e_1, \eta(e_{n-1}e_1 \ldots e_{n-1}) = e_{n-1}.$$

Тогда l-арный группоид $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *не является n-полуабелевым.*

***Теорема* 3.3.** *Пусть для подстановки* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *подстановка* σ^{n-1} *не является тождественной, неодноэлементный n-арный группоид* $< A, \eta >$ *обладает правой нейтральной* (*нейтральной*) *последовательностью. Тогда l-арный группоид* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *не является n-полуабелевым.*

***Замечание* 3.1**. Теорема 3.3 доказана в [7, теорема 3.1] для n-арного группоида $< A, \eta >$, являющегося n-арной полугруппой.

***Теорема* 3.4.** *Пусть для подстановки* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *подстановка* σ^{n-1} *не является тождественной, n-арный группоид* $< A, \eta >$, *где* $n \geq 3$, *обладает такой правой нейтральной* (*нейтральной*) *последовательностью* $e_1 \ldots e_{n-1}$, *что* $e_1 \neq e_{n-1}$. *Тогда l-арный группоид* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *не является n-полуабелевым.*

***Теорема* 3.5.** *Пусть для подстановки* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *подстановка* σ^{n-1} *не является тождественной, n-арный группоид* $< A, \eta >$ *обладает таким элементом a и идемпотентом e, что верно* (2.9). *Тогда l-арный группоид* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *не является n-полуабелевым.*

***Теорема* 3.6.** *Пусть для подстановки* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *подстановка* σ^{n-1} *не является тождественной, неодноэлементный n-арный группоид* $< A, \eta >$ *обладает правой единицей* (*единицей*). *Тогда l-арный группоид* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *не является n-полуабелевым.*

Так как согласно замечанию 1.2, 2-полуабелевость l-арного группоида $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ совпадает с его абелевостью, то из теоремы 3.1 при $n = 2$ вытекает следующее следствие. Оно же вытекает и из следствия 2.7.

Следствие 3.1. *Пусть подстановка* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *не является тождественной, группоид* $< A, \eta >$ *обладает элементом a и идемпотентом e такими, что*

$$a \neq e, \eta(ae) = a.$$

Тогда $(s + 1)$*-арный группоид* $< A^k, [\ ]_{s+1,\sigma,k} >$ *не является абелевым.*

***Замечание* 3.2**. Если в теоремах 3.1–3.6 n-арный группоид $< A, \eta >$ заменить n-арной полугруппой $< A, \eta >$ и потребовать дополнительно, чтобы подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_k$ удовлетворяла условию $\sigma^l = \sigma$, то получим новые признаки не n-полуабелевости, в которых, согласно теореме 1.2, вместо l-арного группоида $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ будет фигурировать l-арная полугруппа $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$.

Таким образом, теоремам 3.1–3.6 соответствует следующие теоремы.

***Теорема* 3.7.** *Пусть для подстановки* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *подстановка* σ^{n-1} *не является тождественной, подстановка* σ^{l-1} *является тождественной, n-арная полугруппа* $< A, \eta >$ *обладает такими элементами* $a, e_1, \ldots, e_{n-1}$, *что* $a \neq e_{n-1}$, *и верны равенства* (2.1) и (2.2). *Тогда* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *– не n-полуабелева l-арная полугруппа.*

***Теорема* 3.8.** *Пусть для подстановки* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *подстановка* σ^{n-1} *не является тождественной, подстановка* σ^{l-1} *является тождественной, n-арная полугруппа* $< A, \eta >$, *где* $n \geq 3$, *обладает такими элементами* $e_1, \ldots, e_{n-1}$, *что* $e_1 \neq e_{n-1}$,

$$\eta(e_1e_1 \ldots e_{n-1}) = e_1, \eta(e_{n-1}e_1 \ldots e_{n-1}) = e_{n-1}.$$

Тогда $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *– не n-полуабелева l-арная полугруппа.*

***Теорема* 3.9.** *Пусть для подстановки* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *подстановка* σ^{n-1} *не является тождественной, подстановка* σ^{l-1} *является тождественной, неодноэлементная n-арная полугруппа* $< A, \eta >$ *обладает правой нейтральной* (*нейтральной*) *последовательностью. Тогда* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *– не n-полуабелева l-арная полугруппа.*

***Теорема* 3.10.** *Пусть для подстановки* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *подстановка* σ^{n-1} *не является тождественной, подстановка* σ^{l-1} *является тождественной, n-арная полугруппа* $< A, \eta >$, *где* $n \geq 3$, *обладает такой правой нейтральной* (*нейтральной*) *последовательностью* $e_1 \ldots e_{n-1}$, *что* $e_1 \neq e_{n-1}$. *Тогда* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *– не n-полуабелева l-арная полугруппа.*

***Теорема* 3.11.** *Пусть для подстановки* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *подстановка* σ^{n-1} *не является тождественной, подстановка* σ^{l-1} *является тождественной, n-арная полугруппа* $< A, \eta >$ *обладает таким элементом a и идемпотентом e, что верно* (2.9).

Тогда $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *– не n-полуабелева l-арная полугруппа.*

***Теорема* 3.12.** *Пусть для подстановки* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *подстановка* σ^{n-1} *не является тождественной, подстановка* σ^{l-1} *является тождественной, неодноэлементная n-арная полугруппа* $< A, \eta >$ *обладает правой единицей (единицей). Тогда* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *– не n-полуабелева l-арная полугруппа.*

Следующее следствие вытекает как из теоремы 3.1, так и из следствия 3.1.

***Следствие* 3.2.** *Пусть нетождественная подстановка* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$, *полугруппа A обладает элементом a и идемпотентом e такими, что*

$$a \neq e,\ \eta(ae) = a.$$

Тогда $< A^k, [\ ]_{s+1,\sigma,k} >$ *– неабелева* $(s + 1)$*-арная полугруппа.*

Случай $s = n$. Представляет интерес следующая

***Теорема* 3.13**. *Пусть для нетождественной подстановки* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *подстановка* σ^n *является тождественной, n-арная полугруппа* $< A, \eta >$ *обладает такими элементами* $a, e_1, \ldots, e_{n-1}$, *что* $a \neq e_{n-1}$,

$$\eta(ae_1 \ldots e_{n-1}) = a,\ \eta(e_{n-1}e_1 \ldots e_{n-1}) = e_{n-1}.$$

Тогда $< A^k, \eta_{n,\sigma,k} >$ *– не n-полуабелева l-арная полугруппа.*

Доказательство. Так как по условию теоремы для нетождественной подстановки σ подстановка σ^n является тождественной подстановкой, то σ^{n-1} – нетождественная подстановка, при этом подстановка $\sigma^{n(n-1)}$ – тождественная. Поэтому, полагая в теореме 3.1

$$s = n,\ l = n(n - 1) + 1,$$

и применяя теорему 1.2, получим не n-полуабелевость l-арной полугруппы $< A^k, \eta_{n,\sigma,k} >$, где $l = n(n - 1) + 1$. □

Следующее следствие, вытекает из теоремы 3.13, если в ней положить σ – цикл длины $k \geq 2$ из $\mathbf{S}_k$, $n = k$. В этом случае $s = n = k \geq 2$, $l = k(k - 1) + 1$.

***Следствие* 3.3.** *Пусть* σ *– цикл длины* $k \geq 2$ *из* $\mathbf{S}_k$, *k-арная полугруппа* $< A, \eta >$ *обладает такими элементами* $a, e_1, \ldots, e_{k-1}$, *что* $a \neq e_{k-1}$,

$$\eta(ae_1 \ldots e_{k-1}) = a,\ \eta(e_{k-1}e_1 \ldots e_{k-1}) = e_{k-1}.$$

Тогда $< A^k, \eta_{k,\sigma,k} >$ *– не k-полуабелева l-арная полугруппа, где* $l = k(k - 1) + 1$.

Полагая в следствии 3.3 $\sigma = (12 \ldots k)$, получим

***Следствие* 3.4.** *Пусть k-арная полугруппа* $< A, \eta >$ *обладает такими элементами* $a, e_1, \ldots, e_{k-1}$, *что* $a \neq e_{k-1}$,

$$\eta(ae_1 \ldots e_{k-1}) = a,\ \eta(e_{k-1}e_1 \ldots e_{k-1}) = e_{k-1}.$$

Тогда $< A^k, \eta_{k,(12 \ldots k),k} >$ *– не k-полуабелева l-арная полугруппа, где* $l = k(k - 1) + 1$.

Полагая в следствиях 3.3 и 3.4 $k = 3$, получим ещё два следствия.

***Следствие* 3.5.** *Пусть* σ *– цикл длины 3 из* $\mathbf{S}_3$, *тернарная полугруппа* $< A, \eta >$ *обладает такими элементами* a, e_1, e_2, *что*

$$a \neq e_2,\ \eta(ae_1e_2) = a,\ \eta(e_2e_1e_2) = e_2.$$

Тогда $< A^3, \eta_{3,\sigma,3} >$ *– не 3-полуабелева 7-арная полугруппа.*

***Следствие* 3.6.** *Пусть тернарная полугруппа* $< A, \eta >$ *обладает такими элементами* a, e_1, e_2, *что*

$$a \neq e_2,\ \eta(ae_1e_2) = a,\ \eta(e_2e_1e_2) = e_2.$$

Тогда $< A^3, \eta_{3,(123),3} >$ *– не 3-полуабелева 7-арная полугруппа.*

Теорема 3.13 и следствия 3.3 и 3.4 позволяют сформулировать следующие три утверждения.

***Теорема* 3.14**. *Пусть для нетождественной подстановки* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *подстановка* σ^n *является тождественной, неодноэлементная n-арная полугруппа* $< A, \eta >$ *обладает правой нейтральной (нейтральной) последовательностью. Тогда* $< A^k, \eta_{n,\sigma,k} >$ *– не n-полуабелева l-арная полугруппа.*

***Следствие* 3.7.** *Пусть* σ *– цикл длины* $k \geq 2$ *из* $\mathbf{S}_k$, *неодноэлементная k-арная полугруппа* $< A, \eta >$ *обладает правой нейтральной (нейтральной) последовательностью. Тогда* $< A^k, \eta_{k,\sigma,k} >$ *– l-арная полугруппа не являющаяся k-полуабелевой, где* $l = k(k - 1) + 1$.

***Следствие* 3.8.** *Пусть неодноэлементная k-арная полугруппа* $< A, \eta >$ *обладает правой нейтральной (нейтральной) последовательностью. Тогда* $< A^k, \eta_{k,(12 \ldots k),k} >$ *– не k-полуабелева l-арная полугруппа, где* $l = k(k - 1) + 1$.

Случай левой нейтральной последовательности. В связи с теоремой 3.3 возникает вопрос: *можно ли в ней правую нейтральную последовательность заменить левой нейтральной последовательностью*? Покажем, что ответ на поставленный вопрос будет утвердительным, если в теореме 3.3 n-арный группоид заменить n-арной полугруппой.

***Теорема* 3.15**. *Пусть для подстановки* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *подстановка* σ^{n-1} *не является тождественной, неодноэлементная n-арная полугруппа* $< A, \eta >$ *обладает левой нейтральной (нейтральной) последовательностью. Тогда l-арный группоид* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *не является n-полуабелевым.*

Доказательство. Так как подстановка σ^{n-1} не является тождественной, то

$$\sigma^{(s-1)(n-1)} \neq \sigma^{s(n-1)}.$$

Поэтому существует $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ с условием

$$\sigma^{(s-1)(n-1)}(j) \neq \sigma^{s(n-1)}(j).$$

Зафиксируем в $< A, \eta >$ левую нейтральную (нейтральную) последовательность $e_1 \ldots e_{n-1}$ и элемент $a \neq e_1$.

Пусть $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_{n-1}$ – те же, что и в теореме 2.1, и положим

$$\mathbf{a} = (\underbrace{e_1, \;\; \ldots, \;\; e_1}_{\sigma^{s(n-1)}(j)-1}, a, \underbrace{e_1, \;\; \ldots, \;\; e_1}_{k-\sigma^{s(n-1)}(j)}) =$$

$$= (a_1, \ldots, a_{\sigma^{s(n-1)}(j)-1}, a_{\sigma^{s(n-1)}(j)}, a_{\sigma^{s(n-1)}(j)+1}, \ldots, a_k),$$

$$\eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{\mathbf{e}_1 \ldots \mathbf{e}_{n-1} \ldots \mathbf{e}_1 \ldots \mathbf{e}_{n-1}}_{s-1} \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 \ldots \mathbf{e}_{n-1}\mathbf{a}) =$$

$$= (y_1, y_2, \ldots, y_k),$$

$$\eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{\mathbf{e}_1 \ldots \mathbf{e}_{n-1} \ldots \mathbf{e}_1 \ldots \mathbf{e}_{n-1}}_{s-1} \mathbf{a}\mathbf{e}_2 \ldots \mathbf{e}_{n-1}\mathbf{e}_1) =$$

$$= (z_1, z_2, \ldots, z_k).$$

Тогда

$$y_j = \eta(\underbrace{e_1 \ldots e_{n-1} \ldots e_1 \ldots e_{n-1}}_{s-1} e_1e_2 \ldots e_{n-1}\, a_{\sigma^{s(n-1)}(j)}),$$

$$z_j = \eta(\underbrace{e_1 \ldots e_{n-1} \ldots e_1 \ldots e_{n-1}}_{s-1} a_{\sigma^{(s-1)(n-1)}(j)}\, e_2 \ldots e_{n-1}e_1),$$

Так как $e_1 \ldots e_{n-1}$ – левая нейтральная последовательность n-арной полугруппы $< A, \eta >$, то

$$y_j = a_{\sigma^{s(n-1)}(j)} = a.$$

А так как

$$\sigma^{(s-1)(n-1)}(j) \neq \sigma^{s(n-1)}(j),$$

то

$$a_{\sigma^{(s-1)(n-1)}(j)} = e_1,$$

откуда

$$z_j = \eta(\underbrace{e_1 \ldots e_{n-1} \ldots e_1 \ldots e_{n-1}}_{s-1} e_1e_2 \ldots e_{n-1}e_1).$$

Снова, используя левую нейтральность последовательности $e_1 \ldots e_{n-1}$, получаем $z_j = e_1$. Из $y_j = a$, $z_j = e_1$, $a \neq e_1$ следует $y_j \neq z_j$, откуда

$$\eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{\mathbf{e}_1 \ldots \mathbf{e}_{n-1} \ldots \mathbf{e}_1 \ldots \mathbf{e}_{n-1}}_{s-1} \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 \ldots \mathbf{e}_{n-1}\mathbf{a}) \neq$$

$$\neq \eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{\mathbf{e}_1 \ldots \mathbf{e}_{n-1} \ldots \mathbf{e}_1 \ldots \mathbf{e}_{n-1}}_{s-1} \mathbf{a}\mathbf{e}_2 \ldots \mathbf{e}_{n-1}\mathbf{e}_1).$$

Следовательно, l-арный группоид $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ не является n-полуабелевым. □

Следующая теорема, вытекающая из теоремы 3.15, является двойственной для теоремы 3.6, если в ней $< A, \eta >$ – n-арная полугруппа.

***Теорема* 3.16.** *Пусть для подстановки* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *подстановка* σ^{n-1} *не является тождественной, неодноэлементная n-арная полугруппа* $< A, \eta >$ *обладает левой единицей* (*единицей*). *Тогда l-арный группоид* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *не является n-полуабелевым*.

Теоремы 3.15, 3.16 и теорема 1.2 позволяют сформулировать следующие две теоремы.

***Теорема* 3.17.** *Пусть для подстановки* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *подстановка* σ^{n-1} *не является тождественной, подстановка* σ^{l-1} *является тождественной, неодноэлементная n-арная полугруппа* $< A, \eta >$ *обладает левой нейтральной* (*нейтральной*) *последовательностью. Тогда* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *– не n-полуабелева l-арная полугруппа*.

***Теорема* 3.18.** *Пусть для подстановки* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *подстановка* σ^{n-1} *не является тождественной, подстановка* σ^{l-1} *является тождественной, неодноэлементная n-арная полугруппа* $< A, \eta >$ *обладает левой единицей* (*единицей*). *Тогда* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *– не n-полуабелева l-арная полугруппа*.

Случай n-арной группы. Так как в любой n-арной группе имеются нейтральные последовательности, то теоремы 1.3 и 3.3 позволяют сформулировать следующую теорему.

***Теорема* 3.19.** *Пусть для подстановки* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *подстановка* σ^{n-1} *не является тождественной, подстановка* σ^{l-1} *является тождественной,* $< A, \eta >$ *– неодноэлементная n-арная группа. Тогда* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *– не n-полуабелева l-арная группа*.

Теоремы 1.4 и 3.3 позволяют сформулировать следующую теорему.

***Теорема* 3.20.** *Пусть для подстановки* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *подстановка* σ^{n-1} *не является тождественной,* $< A, \eta >$ *– неодноэлементная n-арная группа. Тогда* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *– не n-полуабелева l-арная квазигруппа*.

Полагая в теоремах 3.19 и 3.20 $n = 2$, получим два следствия.

***Следствие* 3.9.** *Пусть нетождественная подстановка* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$, $< A, \eta >$ *– неединичная группа. Тогда* $< A^k, [\;]_{s+1,\sigma,k} >$ *– неабелева* $(s+1)$*-арная группа*.

***Следствие* 3.10.** *Пусть* σ *– нетождественная подстановка* из $\mathbf{S}_k$, $< A, \eta >$ *– неединичная группа. Тогда* $< A^k, [\;]_{s+1,\sigma,k} >$ *– неабелева* $(s+1)$*-арная квазигруппа*.

***Замечание* 3.3**. Результаты о не n-полуабелевых l-арных полугруппах и l-арных группах имеются в [8]. В частности, в этой работе сформулированы признаки полуабелевости, но не n-полуабелевости l-арных полугрупп и l-арных групп.

4 Перестановочность элементов и тотальная неассоциативность

Напомним, что n-арная операция η n-арного группоида $< A, \eta >$ называется *тотально неассоциативной* [9], если в $< A, \eta >$ для любых $i \neq j$, где $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, не выполняются тождества

$$\eta(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{i-1}\eta(\mathbf{x}_i \ldots \mathbf{x}_{i+n-1})\mathbf{x}_{i+n} \ldots \mathbf{x}_{2n-1}) =$$

$$= \eta(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{j-1}\eta(\mathbf{x}_j \ldots \mathbf{x}_{j+n-1})\mathbf{x}_{j+n} \ldots \mathbf{x}_{2n-1}).$$

Тотально неассоциативным в этом случае называется и n-арный группоид $< A, \eta >$.

Нам понадобятся следующие две теоремы.

***Теорема* 4.1** [9, теорема 5.1]. *Если неодноэлементная n-арная полугруппа* $< A, \eta >$ *обладает единицей, подстановка* σ *из* $\mathbf{S}_k$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l \neq \sigma$, *то l-арная операция* $\eta_{s,\sigma,k}$ *является тотально неассоциативной*.

***Теорема* 4.2** [9, теорема 3.1]. *Если* $< A, \eta >$ *– неодноэлементная n-арная группа, подстановка* σ *из* $\mathbf{S}_k$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l \neq \sigma$, *то* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *– тотально неассоциативная l-арная квазигруппа*.

Согласно теореме 3.6, если неодноэлементный n-арный группоид $< A, \eta >$ обладает единицей, подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_k$ удовлетворяет условию $\sigma^n \neq \sigma$, то l-арный группоид $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ не является n-полуабелевым. С другой стороны, согласно теореме 4.1, если $< A, \eta >$ – неодноэлементная n-арная полугруппа с единицей, подстановка σ из $\mathbf{S}_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l \neq \sigma$, то l-арная операция $\eta_{s,\sigma,k}$ является тотально неассоциативной. Таким образом, верна

***Теорема* 4.3**. *Пусть неодноэлементная n-арная полугруппа $< A, \eta >$ обладает единицей, подстановка σ из $\mathbf{S}_k$ удовлетворяет условиям $\sigma^n \neq \sigma$, $\sigma^l \neq \sigma$. Тогда l-арная операция $\eta_{s,\sigma,k}$ является тотально неассоциативной, а l-арный группоид $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ не является n-полуабелевым.*

***Следствие* 4.1.** *Пусть неодноэлементная n-арная полугруппа $< A, \eta >$ обладает единицей, подстановка σ из $\mathbf{S}_k$ порядка $d \geq 2$ удовлетворяет условию $\sigma^n \neq \sigma$,*

$$l = s(n-1) + 1 \in \{td + r \mid t = 0, 1, 2, \ldots; r = 2, \ldots, d\}.$$

Тогда l-арная операция $\eta_{s,\sigma,k}$ является тотально неассоциативной, а l-арный группоид $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ не является n-полуабелевым.

***Следствие* 4.2.** *Пусть неодноэлементная n-арная полугруппа $< A, \eta >$ обладает единицей, цикл σ из $\mathbf{S}_k$ длины k удовлетворяет условию $\sigma^n \neq \sigma$,*

$$l = s(n-1) + 1 \in \{tk + r \mid t = 0, 1, 2, \ldots; r = 2, \ldots, k\}.$$

Тогда l-арная операция $\eta_{s,\sigma,k}$ является тотально неассоциативной, а l-арный группоид $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ не является n-полуабелевым.

***Следствие* 4.3.** *Пусть неодноэлементная n-арная полугруппа $< A, \eta >$ обладает единицей, цикл $(12 \ldots k)$ из $\mathbf{S}_k$ удовлетворяет условию $\sigma^n \neq \sigma$, t, r и l такие же как в следствии 4.2. Тогда l-арная операция $\eta_{s,(12\ldots k),k}$ является тотально неассоциативной, а l-арный группоид $< A^k, \eta_{s,(12\ldots k),k} >$ не является n-полуабелевым.*

Полагая в следствии 4.1 $d = 2$, получим

***Следствие* 4.4.** *Пусть неодноэлементная n-арная полугруппа $< A, \eta >$ обладает единицей, подстановка σ из $\mathbf{S}_k$ порядка 2 удовлетворяет условию $\sigma^n \neq \sigma$, $l = s(n-1) + 1$ – чётное. Тогда l-арная операция $\eta_{s,\sigma,k}$ является тотально неассоциативной, а l-арный группоид $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ не является n-полуабелевым.*

***Следствие* 4.5.** *Пусть неодноэлементная n-арная полугруппа $< A, \eta >$ обладает единицей, транспозиция σ из $\mathbf{S}_k$ удовлетворяет условию $\sigma^n \neq \sigma$, $l = s(n-1) + 1$ – чётное. Тогда l-арная операция $\eta_{s,\sigma,k}$ является тотально неассоциативной, а l-арный группоид $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ не является n-полуабелевым.*

Полагая в теореме 4.3 и во всех следствиях из неё $n = 2$, получим следующие результаты.

***Теорема* 4.4**. *Пусть неодноэлементная полугруппа A обладает единицей, нетождественная подстановка σ из $\mathbf{S}_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l \neq \sigma$. Тогда l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$ является тотально неассоциативной, а l-арный группоид $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ не является абелевым.*

***Следствие* 4.6.** *Пусть неодноэлементная полугруппа A обладает единицей, σ – нетождественная подстановка из $\mathbf{S}_k$ порядка d,*

$$l = s + 1 \in \{td + r \mid t = 0, 1, 2, \ldots; r = 2, \ldots, d\}.$$

Тогда l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$ является тотально неассоциативной, а l-арный группоид $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ не является абелевым.

***Следствие* 4.7.** *Пусть неодноэлементная полугруппа A обладает единицей, σ – цикл из $\mathbf{S}_k$ длины k,*

$$l = s + 1 \in \{tk + r \mid t = 0, 1, 2, \ldots; r = 2, \ldots, k\}.$$

Тогда l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$ является тотально неассоциативной, а l-арный группоид $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ не является абелевым.

***Следствие* 4.8.** *Пусть неодноэлементная полугруппа A обладает единицей, t, r и l такие же как в следствии 4.7. Тогда l-арная операция $[\ ]_{l,(12\ldots k),k}$ является тотально неассоциативной, а l-арный группоид $< A^k, [\ ]_{l,(12\ldots k),k} >$ не является абелевым.*

***Следствие* 4.9.** *Пусть неодноэлементная полугруппа A обладает единицей, σ – подстановка из $\mathbf{S}_k$ порядка 2, $l = s + 1$ – чётное. Тогда l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$ является тотально неассоциативной, а l-арный группоид $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ не является абелевым.*

***Следствие* 4.10.** *Пусть неодноэлементная полугруппа A обладает единицей, σ – транспозиция из $\mathbf{S}_k$, $l = s + 1$ – чётное. Тогда l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$ является тотально неассоциативной, а l-арный группоид $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ не является абелевым.*

Теоремы 3.20 и 4.2 позволяют сформулировать следующий результат.

***Теорема* 4.5**. *Пусть $< A, \eta >$ – неодноэлементная n-арная группа, подстановка σ из $\mathbf{S}_k$ удовлетворяет условиям $\sigma^n \neq \sigma$, $\sigma^l \neq \sigma$. Тогда $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ – тотально неассоциативная l-арная квазигруппа, не являющаяся n-полуабелевой.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гальмак, А.М.* О полиадических операциях на декартовых степенях / А.М. Гальмак, А.Д. Русаков // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2014. – № 3 (84). – С. 35–40.

2. *Гальмак, А.М.* Об операции $[\ ]_{l,\sigma,k}$ / А.М. Гальмак // Веснік МДУ ім. А.А. Куляшова. – 2010. – № 1 (35). – С. 34–38.

3. *Гальмак, А.М.* Многоместные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак. – Минск: Изд. центр БГУ, 2009. – 265 с.

4. *Post*, *E.L.* Polyadic groups / E.L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208–350.

5. *Гальмак*, *А.М.* О разрешимости уравнений в $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ / А.М. Гальмак // Веснік МДУ ім. А.А. Куляшова. – 2018. – № 1 (51). – С. 4–10.

6. *Dörnte*, *W.* Untersuchungen über einen verallgemeinerten Gruppenbegrieff / W. Dörnte // Math. Z. – 1928. – Bd. 29. – S. 1–19.

7. *Гальмак*, *А.М.* О не *n*-полуабелевых полиадических группоидах специального вида / А.М. Гальмак, Ю.И. Кулаженко // Веснік МДУ ім. А.А. Куляшова. – 2018. – № 2. – С. 55–61.

8. *Гальмак*, *А.М.* О перестановочности элементов полиадических группоидах специального вида / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2018. – № 3 (36). – С. 70–75.

9. *Гальмак*, *А.М*. О тотальной неассоциативности полиадических операций / А.М. Гальмак // Веснік МДУ ім. А.А. Куляшова. – 2018. – № 2. – С. 4–14.

Поступила в редакцию 20.09.18.