

ОБ ОДНОЙ ХАРАКТЕРИЗАЦИИ ОБОБЩЕННОЙ ПОДГРУППЫ ФРАТТИНИ КОНЕЧНОЙ РАЗРЕШИМОЙ ГРУППЫ

С.Ф. Каморников¹, О.Л. Шеметкова²

¹Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

²Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова, Москва

ON SOME CHARACTERIZATION OF GENERAL FRATTINI SUBGROUP OF FINITE SOLUBLE GROUP

S.F. Kamornikov¹, O.L. Shemetkova²

¹F. Scorina Gomel State University

²Plekhanov Russian University of Economics, Moscow

Пусть G – конечная разрешимая группа, θ – регулярный подгрупповой m -функтор и $\Phi_\theta(G)$ – пересечение всех максимальных θ -подгрупп группы G . Пусть n – длина G -главного ряда группы $\text{Soc}(G/\Phi_\theta(G))$, а k – число центральных G -главных факторов этого ряда. В статье доказано, что в G существуют $4n-3k$ максимальные θ -подгруппы, пересечение которых равно $\Phi_\theta(G)$.

Ключевые слова: конечная разрешимая группа, максимальная подгруппа, θ -подгруппа Фраттини.

Let G be a finite soluble group, θ be a regular subgroup m -functor, and $\Phi_\theta(G)$ be the intersection of all maximal θ -subgroups of G . Let n be the length of a G -series of the group $\text{Soc}(G/\Phi_\theta(G))$, and k be the number of central G -chief factors of this series. We prove that in this case G contains $4n-3k$ maximal θ -subgroups whose intersection is $\Phi_\theta(G)$.

Keywords: finite soluble group, maximal subgroup, Frattini θ -subgroup.

Введение

В работе рассматриваются только конечные разрешимые группы и разрешимые подгрупповые m -функторы, т. е. m -функторы, определенные на классе $\mathfrak{S}$ всех разрешимых конечных групп.

Согласно [1], подгрупповым m -функтором называется функция θ , которая сопоставляет каждой группе G некоторое множество $\theta(G)$ ее максимальных подгрупп и саму группу G . При этом предполагается, что если $\theta(G) = \{M_1, \dots, M_n, G\}$, то $\theta(G^\alpha) = \{M_1^\alpha, \dots, M_n^\alpha, G^\alpha\}$ для любого изоморфизма $\alpha: G \rightarrow G^\alpha$.

Подгрупповой m -функтор θ называется *регулярным*, если выполняются следующие условия:

1) из $N \triangleleft G$ и $M \in \theta(G)$ следует

$$MN/N \in \theta(G/N);$$

2) из $M/N \in \theta(G/N)$ следует $M \in \theta(G)$.

Если θ – подгрупповой m -функтор, то через $\Phi_\theta(G)$ обозначается *обобщенная подгруппа Фраттини* (θ -подгруппа Фраттини) группы G , которая определяется как пересечение всех подгрупп, принадлежащих $\theta(G)$. Отметим, что если для любой группы G множество $\theta(G)$ содержит

все максимальные подгруппы из G , то $\Phi_\theta(G) = \Phi(G)$ – подгруппа Фраттини группы G . Так как множество всех максимальных θ -подгрупп группы G автоморфно допустимо, то $\Phi_\theta(G)$ – характеристическая подгруппа группы G .

Из основного результата работы [2] следует, что для получения подгруппы $\Phi(G)$ разрешимой группы G можно ограничиться пересечением лишь некоторых $3n$ ее максимальных подгрупп, где n – число дополняемых факторов некоторого главного ряда группы G .

Другой подход, направленный на сокращение числа максимальных подгрупп, пересечение которых дает подгруппу Фраттини, предложен В.С. Монаховым в [3], где установлено, что для любой разрешимой группы G ее подгруппа Фраттини $\Phi(G)$ совпадает с пересечением всех тех максимальных подгрупп M из G , для которых выполняется равенство $MF(G) = G$ (здесь $F(G)$ – подгруппа Фиттинга группы G , т. е. наибольшая нормальная нильпотентная подгруппа группы G).

В [4] отмеченные подходы объединены: для группы G доказано, что если n – длина G -главного ряда группы $F(G)/\Phi(G)$, а k – число центральных G -главных факторов этого ряда, то в G существуют $4n-3k$ максимальные подгруппы, пересечение которых равно $\Phi(G)$.

В данной работе этот результат распространяется на все θ -подгруппы Фраттини группы G . Наша главная цель – доказательство следующей теоремы.

Теорема. Пусть θ – регулярный подгрупповой m -функтор и G – конечная разрешимая группа, для которой $\Phi_\theta(G) \neq G$. Если n – длина G -главного ряда группы $\text{Soc}(G/\Phi_\theta(G))$, а k – число центральных G -главных факторов этого ряда, то в G существуют $4n - 3k$ максимальные θ -подгруппы, пересечение которых равно $\Phi_\theta(G)$.

Для некоторых регулярных подгрупповых функторов θ условие $\Phi_\theta(G) \neq G$ выполняется для любой неединичной группы G (это имеет место, например, для подгруппового функтора θ , выделяющего в каждой группе все ее максимальные подгруппы). Однако для большинства функторов θ условие $\Phi_\theta(G) \neq G$ ограничивает группу G . В частности, если θ – регулярный подгрупповой m -функтор, выделяющий в каждой группе все ее абнормальные максимальные подгруппы, то условие $\Phi_\theta(G) \neq G$ равносильно тому, что группа G не является нильпотентной.

Как отмечено в [4], оценка числа максимальных подгрупп, приведенная в теореме, является точной. В то же время для ряда конкретных подгрупповых функторов θ и групп G со специальными свойствами (например, для S_4 -свободных групп) она может быть улучшена.

1 Основные определения и предварительные результаты

Используются определения и обозначения, принятые в [5]. Через $\text{Soc}(G)$ обозначается цокль группы G , т. е. подгруппа группы G , порожденная всеми ее минимальными нормальными подгруппами. Если n – длина G -главного ряда группы $\text{Soc}(G)$, то, очевидно, $\text{Soc}(G) = N_1 N_2 \dots N_n$ – произведение n минимальных нормальных подгрупп $N_1, N_2, \dots, N_n$ группы G . Если, кроме того, $\Phi(G) = 1$, то ввиду леммы 7.9 из [6] подгруппа $\text{Soc}(G)$ дополняема в группе G и $\text{Soc}(G) = F(G) = N_1 N_2 \dots N_n$ – произведение n дополняемых минимальных нормальных подгрупп $N_1, N_2, \dots, N_n$ группы G .

Доказательство следующей леммы осуществляется простой проверкой (см., например, [7]).

Лемма 1.1. Пусть θ – регулярный подгрупповой m -функтор. Тогда для любой группы G справедливы утверждения:

- 1) если $N \triangleleft G$ и $N \subseteq \Phi_\theta(G)$, то $\Phi_\theta(G/N) = \Phi_\theta(G)/N$;
- 2) $\Phi_\theta(G/\Phi_\theta(G)) = 1$ и, в частности, $\Phi(G/\Phi_\theta(G)) = 1$.

Если H – подгруппа группы G и A/B – ее нормальная секция, то говорят, что:

- 1) H покрывает A/B , если $HB \supseteq A$;
- 2) H изолирует A/B , если $H \cap A \subseteq B$;
- 3) H является дополнением секции A/B , если $HA = G$ и $H \cap A = B$.

Лемма 1.2 [8, лемма 1]. Пусть θ – регулярный подгрупповой m -функтор. Если M и S – максимальные подгруппы группы G , дополняющие один и тот же главный фактор разрешимой группы G , то из $M \in \theta(G)$ всегда следует $S \in \theta(G)$.

Через $\text{Core}_G(H)$ далее обозначается ядро подгруппы H в группе G , т. е. наименьшая нормальная подгруппа группы G , содержащаяся в подгруппе H . Напомним, что группа G называется примитивной, если она обладает такой максимальной подгруппой M , что $\text{Core}_G(M) = 1$. В этом случае подгруппа M называется примитиватором группы G .

Лемма 1.3 [5, лемма A.15.4]. Если M – максимальная подгруппа группы G , то $G/\text{Core}_G(M)$ – примитивная группа.

Из [9] следует, что разрешимая группа G примитивна тогда и только тогда, когда она представима в виде полупрямого произведения $G = NM$ минимальной нормальной подгруппы N и максимальной подгруппой M , причем $C_G(N) = N$.

Доказательство теоремы базируется также на следующих двух леммах.

Лемма 1.4 [4, лемма 2.5]. Пусть G – примитивная группа и M – ее примитиватор. Тогда существуют такие элементы $x, y, z \in G$, для которых справедливо равенство

$$M \cap M^x \cap M^y \cap M^z = 1.$$

Лемма 1.5 [4, лемма 2.6]. Если M – максимальная подгруппа группы G , то существуют такие элементы $x, y, z \in G$, для которых справедливо равенство

$$M \cap M^x \cap M^y \cap M^z = \text{Core}_G(M).$$

2 Доказательство теоремы

Пусть G – группа наименьшего порядка, для которой теорема неверна. Ввиду условия теоремы θ -подгруппа Фраттини $\Phi_\theta(G)$ группы G отлична от G , поэтому группа $G/\Phi_\theta(G)$ не единична и длина G -главного ряда группы $\text{Soc}(G/\Phi_\theta(G))$ больше нуля.

Рассмотрим группу $G/\Phi_\theta(G)$ и ее подгруппу $\text{Soc}(G/\Phi_\theta(G))$. Так как ввиду леммы 1.1 справедливо равенство $\Phi_\theta(G/\Phi_\theta(G)) = 1$, то

$$\text{Soc}(G/\Phi_\theta(G)/\Phi_\theta(G/\Phi_\theta(G))) \simeq \text{Soc}(G/\Phi_\theta(G)).$$

Отсюда, в частности, следует, что длина $G/\Phi_\theta(G)$ -главного ряда группы

$$\text{Soc}(G/\Phi_\theta(G)/\Phi_\theta(G/\Phi_\theta(G)))$$

равна n и число центральных $G/\Phi_\theta(G)$ -главных факторов этого ряда равно k . Если $\Phi_\theta(G) \neq 1$, то $|G/\Phi_\theta(G)| < |G|$, а значит, ввиду выбора группы G существуют максимальные θ -подгруппы $M_1/\Phi_\theta(G)$, $M_2/\Phi_\theta(G)$, ..., $M_{4n-3k}/\Phi_\theta(G)$ группы $G/\Phi_\theta(G)$, пересечение которых есть единичная подгруппа группы $G/\Phi_\theta(G)$. Но тогда отсюда следует, что $M_1 \cap M_2 \cap \dots \cap M_{4n-3k} = \Phi_\theta(G)$. При этом из регулярности подгруппового m -функтора θ следует, что $M_i \in \theta(G)$ для всех $i = 1, 2, \dots, 4n - 3k$. Пришли к противоречию с выбором группы G .

Следовательно, $\Phi_\theta(G) = 1$. Тогда ввиду утверждения 2) леммы 1.1 справедливо равенство $\Phi(G) = 1$, а потому, как отмечено выше, $\text{Soc}(G) = F(G) = N_1 N_2 \dots N_n$ – произведение n дополняемых минимальных нормальных подгрупп $N_1, N_2, \dots, N_n$ группы G . Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что подгруппы $N_1, N_2, \dots, N_k$ центральны, а подгруппы $N_{k+1}, \dots, N_n$ не лежат в центре группы G .

Предположим, что для некоторого $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ любая максимальная подгруппа группы G , дополняющая N_i , не принадлежит $\theta(G)$. Тогда любая максимальная подгруппа группы G , принадлежащая $\theta(G)$, содержит N_i . Отсюда следует, что $N_i \subseteq \Phi_\theta(G)$. Пришли к противоречию с тем, что $\Phi_\theta(G) = 1$. Значит, для любого $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ существует максимальная подгруппа группы G , дополняющая N_i и принадлежащая $\theta(G)$. Тогда по лемме 1.2 любая максимальная подгруппа группы G , дополняющая N_i , принадлежит $\theta(G)$.

Как отмечено выше, подгруппа $\text{Soc}(G)$ дополняема в G . Пусть H – дополнение к $\text{Soc}(G)$ в G . Простая проверка показывает, что подгруппа $M_i = N_1 \dots N_{i-1} \dots N_{i+1} \dots N_n H$ максимальна в G и дополняет N_i в группе G . Поэтому $M_i \in \theta(G)$. Отметим еще, что максимальная подгруппа M_i дополняет главный фактор $N_1 N_2 \dots N_i / N_1 N_2 \dots N_{i-1}$.

Рассмотрим G -главный ряд $1 = N_0 \subset N_1 \subset N_1 N_2 \subset \dots \subset N_1 N_2 \dots N_n = F(G)$ и систему определенных выше максимальных подгрупп M_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Очевидно, для каждого $i = 1, 2, \dots, n$ подгруппа

$$F = \text{Core}_G(M_1) \cap \text{Core}_G(M_2) \cap \dots \cap \text{Core}_G(M_n)$$

изолирует каждый главный фактор

$$N_1 N_2 \dots N_i / N_1 N_2 \dots N_{i-1}.$$

Отсюда следует, что

$$F \cap F(G) = F \cap N_1 N_2 \dots N_n \subseteq \\ \subseteq F \cap N_1 N_2 \dots N_{n-1} \subseteq \dots \subseteq F \cap N_0 = 1.$$

Предположим, что $F \neq 1$ и N – минимальная нормальная подгруппа группы G , содержащаяся в F . Тогда $N \subseteq \text{Soc}(G) = F(G)$, а значит, $N \subseteq F \cap F(G)$. Пришли к противоречию с тем, что $F \cap F(G) = 1$. Таким образом, $F = 1$, а значит,

$$\text{Core}_G(M_1) \cap \text{Core}_G(M_2) \cap \dots \cap \text{Core}_G(M_n) = \\ = 1 = \Phi_\theta(G).$$

Ввиду леммы 1.5 для каждого $i = 1, 2, \dots, n$ существуют такие элементы $x_i, y_i, z_i \in G$, для которых справедливо равенство

$$M_i \cap M_i^{x_i} \cap M_i^{y_i} \cap M_i^{z_i} = \text{Core}_G(M_i).$$

Так как подгруппы $N_1, N_2, \dots, N_k$ центральны в G , то максимальные подгруппы $M_1, M_2, \dots, M_k$ нормальны в G . Поэтому $\text{Core}_G(M_1) = M_1$, $\text{Core}_G(M_2) = M_2$, ..., $\text{Core}_G(M_k) = M_k$. Отсюда следует, что

$$\Phi_\theta(G) = \text{Core}_G(M_1) \cap \\ \cap \text{Core}_G(M_2) \cap \dots \cap \text{Core}_G(M_n) = \\ = M_1 \cap M_2 \cap \dots \cap M_k \cap \\ \cap (M_{k+1} \cap M_{k+1}^{x_{k+1}} \cap M_{k+1}^{y_{k+1}} \cap M_{k+1}^{z_{k+1}}) \cap \dots \\ \cap (M_n \cap M_n^{x_n} \cap M_n^{y_n} \cap M_n^{z_n}),$$

т. е. θ -подгруппа Фраттини $\Phi_\theta(G)$ группы G представима в виде пересечения $4(n-k) + k = 4n - 3k$ максимальных подгрупп группы G . Снова пришли к противоречию с выбором группы G . $\square$

3 Следствия теоремы

Приведем сначала прямые следствия теоремы для конкретных регулярных подгрупповых m -функторов.

Если θ – подгрупповой m -функтор, выделяющий в каждой группе все ее максимальные подгруппы, то имеем

Следствие 3.1 [4, теорема 1.1]. Пусть G – разрешимая группа, n – длина G -главного ряда группы $F(G)/\Phi(G)$, а k – число центральных G -главных факторов этого ряда. Тогда в G существуют $4n - 3k$ максимальные подгруппы, пересечение которых равно $\Phi(G)$.

Если θ – подгрупповой m -функтор, выделяющий в каждой группе все ее абнормальные максимальные подгруппы, то $\Phi_\theta(G) = \Delta(G)$ – подгруппа Гашюца группы G [10]. Так как подгруппа $\Delta(G)$ нильпотентна, то $\Delta(G) \subseteq F(G)$. Кроме того, все G -главные факторы группы $F(G)/\Delta(G)$ являются эксцентральными. Поэтому имеем

Следствие 3.2. Пусть G – разрешимая нильпотентная группа и n – длина G -главного ряда группы $F(G)/\Delta(G)$. Тогда в G существуют $4n$ максимальные подгруппы, пересечение которых равно $\Delta(G)$.

Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация, т. е. класс групп, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений. Тогда каждая группа G обладает наименьшей нормальной подгруппой, факторгруппа по которой принадлежит формации $\mathfrak{F}$ (эта подгруппа обозначается через $G^{\mathfrak{F}}$ и называется $\mathfrak{F}$ -корадикалом группы G). Максимальная подгруппа M группы G называется: 1) $\mathfrak{F}$ -нормальной, если $G^{\mathfrak{F}} \subseteq M$; 2) $\mathfrak{F}$ -абнормальной, если $MG^{\mathfrak{F}} = G$. Группа G называется $\mathfrak{F}$ -совершенной, если справедливо равенство $G^{\mathfrak{F}} = G$.

Пусть θ – подгрупповой t -функтор, выделяющий в каждой группе все ее $\mathfrak{F}$ -абнормальные максимальные подгруппы и $\Phi_{\theta}(G) = \Delta^{\mathfrak{F}}(G)$ – пересечение всех $\mathfrak{F}$ -абнормальных максимальных подгрупп группы G (описание строения подгруппы $\Delta^{\mathfrak{F}}(G)$ можно найти в [1], [6]).

Следствие 3.3. Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация и G – разрешимая группа, не принадлежащая $\mathfrak{F}$. Если n – длина G -главного ряда группы $\text{Soc}(G/\Delta^{\mathfrak{F}}(G))$, а k – число центральных G -главных факторов этого ряда, то в G существуют $4n-3k$ максимальные подгруппы, пересечение которых равно $\Delta^{\mathfrak{F}}(G)$.

Если N – нормальная подгруппа группы G , то полный прообраз подгруппы Фиттинга $F(G/N)$ будем обозначать через $F(G \bmod N)$, а полный прообраз подгруппы Фраттини $\Phi(G/N)$ – через $\Phi(G \bmod N)$.

Пусть θ – подгрупповой t -функтор, выделяющий в каждой группе все ее $\mathfrak{F}$ -нормальные максимальные подгруппы и $\Phi_{\theta}(G)$ – пересечение всех $\mathfrak{F}$ -нормальных максимальных подгрупп группы G . Как отмечено в [7], справедливо равенство $\Phi_{\theta}(G) = \Phi(G \bmod G^{\mathfrak{F}})$. Отсюда, с учетом следствия 3.1, имеем

Следствие 3.4. Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация и G – разрешимая группа, которая не является $\mathfrak{F}$ -совершенной. Пусть θ – подгрупповой t -функтор, выделяющий в каждой группе все ее $\mathfrak{F}$ -нормальные максимальные подгруппы. Если n – длина G -главного ряда группы

$$F(G \bmod G^{\mathfrak{F}}) / \Phi(G \bmod G^{\mathfrak{F}}),$$

а k – число центральных G -главных факторов этого ряда, то в G существуют $4n-3k$

максимальные подгруппы, пересечение которых равно $\Phi_{\theta}(G)$.

Пусть π – некоторое множество простых чисел. Пусть θ – подгрупповой t -функтор, выделяющий в каждой группе все ее максимальные подгруппы, индексы которых не делятся на числа из π , и $\Phi_{\theta}(G) = \Phi_{\pi}(G)$ – пересечение всех максимальных θ -подгрупп группы G . Простая проверка показывает, что подгрупповой t -функтор θ является регулярным. Кроме того, имеет место равенство

$$\Phi_{\theta}(G) = \Phi(G \bmod O_{\pi}(G)).$$

Следствие 3.5. Пусть π – некоторое множество простых чисел, θ – подгрупповой t -функтор, выделяющий в каждой группе все ее максимальные подгруппы, индексы которых не делятся на числа из π , и G – конечная разрешимая πd -группа. Если n – длина G -главного ряда группы $\text{Soc}(G/\Phi(G \bmod O_{\pi}(G)))$, а k – число центральных G -главных факторов этого ряда, то в G существуют $4n-3k$ максимальные θ -подгруппы, пересечение которых равно $\Phi_{\theta}(G)$.

В случае, когда множество π состоит из одного простого числа p и θ – подгрупповой t -функтор, выделяющий в каждой группе все ее максимальные подгруппы, индексы которых не делятся на p , θ -подгруппа Фраттини $\Phi_{\theta}(G)$ группы G совпадает с введенной Дескинсом в [11] подгруппой $\Phi_p(G)$.

Следствие 3.6. Пусть p – некоторое простое число, θ – подгрупповой t -функтор, выделяющий в каждой группе все ее максимальные подгруппы, индексы которых не делятся на p , и G – конечная разрешимая pd -группа. Если n – длина G -главного ряда группы

$$\text{Soc}(G/\Phi(G \bmod O_p(G))),$$

а k – число центральных G -главных факторов этого ряда, то в G существуют $4n-3k$ максимальные θ -подгруппы, пересечение которых равно $\Phi_{\theta}(G)$.

Отметим, что другая характеристика подгруппы $\Phi(G \bmod O_p(G))$ в виде пересечения четырех p -префраттиниевых подгрупп приведена в работе [12].

Используем теперь теорему для оценки порядков групп G и $\Phi_{\theta}(G)$.

Следствие 3.7. Пусть θ – регулярный подгрупповой t -функтор и G – конечная разрешимая группа, для которой $\Phi_{\theta}(G) \neq G$. Если n – длина G -главного ряда группы $\text{Soc}(G/\Phi_{\theta}(G))$, а k – число центральных G -главных факторов этого ряда, то:

$$1) |\Phi_{\theta}(G)|^2 \geq \frac{|G|}{|\text{Soc}(G/\Phi_{\theta}(G))|} \times$$

$$\times \frac{1}{|\text{Soc}(G/\Phi_\theta(G))/\text{Soc}(G/\Phi_\theta(G)) \cap Z(G/\Phi_\theta(G))|^3};$$

$$2) |G| \leq |\Phi_\theta(G)|^2 \cdot |\text{Soc}(G/\Phi_\theta(G))| \times$$

$$\times |\text{Soc}(G/\Phi_\theta(G))/\text{Soc}(G/\Phi_\theta(G)) \cap Z(G/\Phi_\theta(G))|^3.$$

Доказательство. Подгруппа $\text{Soc}(G/\Phi_\theta(G))$ представима в виде

$\text{Soc}(G/\Phi_\theta(G)) = (N_1/\Phi_\theta(G)) \cdot \dots \cdot (N_n/\Phi_\theta(G))$,
где $N_1/\Phi_\theta(G), \dots, N_n/\Phi_\theta(G)$ – дополняемые минимальные нормальные подгруппы группы $G/\Phi_\theta(G)$, причем подгруппы $N_1/\Phi_\theta(G), \dots, N_k/\Phi_\theta(G)$ центральны в $G/\Phi_\theta(G)$, а подгруппы $N_{k+1}/\Phi_\theta(G), \dots, N_n/\Phi_\theta(G)$ не лежат в центре группы $G/\Phi_\theta(G)$. Ввиду теоремы существуют максимальные θ -подгруппы $M_1/\Phi_\theta(G), \dots, M_n/\Phi_\theta(G)$ группы $G/\Phi_\theta(G)$, дополняющие в $G/\Phi_\theta(G)$ соответственно подгруппы $N_1/\Phi_\theta(G), \dots, N_n/\Phi_\theta(G)$, и для каждого $i = k+1, \dots, n$ существуют такие элементы $x_i, y_i, z_i \in G$, что

$$\Phi_\theta(G) = M_1 \cap M_2 \cap \dots \cap M_k \cap$$

$$\cap (M_{k+1} \cap M_{k+1}^{x_{k+1}} \cap M_{k+1}^{y_{k+1}} \cap M_{k+1}^{z_{k+1}}) \cap \dots$$

$$\cap (M_n \cap M_n^{x_n} \cap M_n^{y_n} \cap M_n^{z_n}).$$

Пусть $\alpha: G \rightarrow G/\Phi_\theta(G)$ – естественный гомоморфизм. Используя элементарное равенство $|A \cdot B| = \frac{|A| \cdot |B|}{|A \cap B|}$, где A и B – подгруппы группы G , для подгрупп $M_1, \dots, M_k, M_{k+1}, M_{k+1}^{x_{k+1}}, \dots, M_n^{z_n}$ последовательно получаем

$$|\alpha(G)| \geq |\alpha(M_1) \cdot \alpha(M_2)| =$$

$$= \frac{|\alpha(M_1)| \cdot |\alpha(M_2)|}{|\alpha(M_1) \cap \alpha(M_2)|} =$$

$$= \frac{|\alpha(M_1)| \cdot |\alpha(M_2)|}{|\alpha(M_1) \cap \alpha(M_2) \cap \alpha(M_3)|} \times$$

$$\times \frac{|\alpha(M_3)|}{|(\alpha(M_1) \cap \alpha(M_2)) \cdot \alpha(M_3)|} \geq$$

$$\geq \frac{|\alpha(M_1)| \cdot |\alpha(M_2)| \cdot |\alpha(M_3)|}{|\alpha(M_1) \cap \alpha(M_2) \cap \alpha(M_3)| \cdot |\alpha(G)|}.$$

Таким образом,

$$|\alpha(G)|^2 \geq \frac{|\alpha(M_1)| \cdot |\alpha(M_2)| \cdot |\alpha(M_3)|}{|\alpha(M_1) \cap \alpha(M_2) \cap \alpha(M_3)|}.$$

Отсюда имеем

$$|\alpha(G)|^2 \geq \frac{|\alpha(M_1)| \cdot |\alpha(M_2)| \cdot |\alpha(M_3)|}{|\alpha(M_1) \cap \alpha(M_2) \cap \alpha(M_3)|} =$$

$$= \frac{|\alpha(M_1)| \cdot |\alpha(M_2)|}{|\alpha(M_1) \cap \alpha(M_2) \cap \alpha(M_3) \cap \alpha(M_4)|} \times$$

$$\times \frac{|\alpha(M_3)| \cdot |\alpha(M_4)|}{|(\alpha(M_1) \cap \alpha(M_2) \cap \alpha(M_3)) \cdot \alpha(M_4)|} \geq$$

$$\geq \frac{|\alpha(M_1)| \cdot |\alpha(M_2)| \cdot |\alpha(M_3)| \cdot |\alpha(M_4)|}{|\alpha(M_1) \cap \alpha(M_2) \cap \alpha(M_3) \cap \alpha(M_4)| \cdot |\alpha(G)|}.$$

Значит,

$$|\alpha(G)|^3 \geq \frac{|\alpha(M_1)| \cdot |\alpha(M_2)| \cdot |\alpha(M_3)| \cdot |\alpha(M_4)|}{|\alpha(M_1) \cap \alpha(M_2) \cap \alpha(M_3) \cap \alpha(M_4)|}.$$

Продолжая процесс, получим окончательно

$$|\alpha(G)|^{k+4(n-k)-1} \geq$$

$$\frac{\prod_{i=1}^k |\alpha(M_i)| \cdot \prod_{j=k+1}^n |\alpha(M_j)|}{\left| \bigcap_{i=1}^k \alpha(M_i) \cap \bigcap_{j=k+1}^n (\alpha(M_j) \cap \alpha(M_j^{x_j}) \cap \alpha(M_j^{y_j}) \cap \alpha(M_j^{z_j})) \right|} \times$$

$$\times \prod_{j=k+1}^n |\alpha(M_j^{x_j})| \cdot \prod_{j=k+1}^n |\alpha(M_j^{y_j})| \cdot \prod_{j=k+1}^n |\alpha(M_j^{z_j})|.$$

Отметим, что

$$|\Phi_\theta(G)| = \left| \bigcap_{i=1}^k \alpha(M_i) \cap \left(\bigcap_{j=k+1}^n (\alpha(M_j) \cap \right. \right.$$

$$\left. \left. \cap \alpha(M_j^{x_j}) \cap \alpha(M_j^{y_j}) \cap \alpha(M_j^{z_j})) \right) \right|.$$

Кроме того,

$$\prod_{i=1}^k |\alpha(M_i)| \cdot \prod_{j=k+1}^n |\alpha(M_j)| =$$

$$= \prod_{i=1}^k |M_i/\Phi_\theta(G)| \cdot \prod_{j=k+1}^n |M_j/\Phi_\theta(G)| =$$

$$= \prod_{i=1}^k |G/\Phi_\theta(G) : N_i/\Phi_\theta(G)| \times$$

$$\times \prod_{j=k+1}^n |G/\Phi_\theta(G) : N_j/\Phi_\theta(G)| =$$

$$= \frac{|G|^n}{|\Phi_\theta(G)|^n \cdot |\text{Soc}(G/\Phi_\theta(G))|}.$$

Аналогично показывается, что

$$\prod_{j=k+1}^n |\alpha(M_j^{x_j})| = \prod_{j=k+1}^n |\alpha(M_j^{y_j})| =$$

$$= \prod_{j=k+1}^n |\alpha(M_j^{z_j})| = \frac{|G|^{n-k}}{|\Phi_\theta(G)|^{n-k}} \times$$

$$\times \frac{1}{|\text{Soc}(G/\Phi_\theta(G))/\text{Soc}(G/\Phi_\theta(G)) \cap Z(G/\Phi_\theta(G))|^3}.$$

Теперь имеем

$$\frac{|G|^{4n-3k-1}}{|\Phi_\theta(G)|^{4n-3k-1}} \geq \frac{|G|^{4n-3k}}{|\Phi_\theta(G)|^{4n-3k+1} \cdot |\text{Soc}(G/\Phi_\theta(G))|} \times$$

$$\times \frac{1}{|\text{Soc}(G/\Phi_\theta(G))/\text{Soc}(G/\Phi_\theta(G)) \cap Z(G/\Phi_\theta(G))|^3}.$$

Значит,

$$|\Phi_\theta(G)|^2 \geq \frac{|G|}{|\text{Soc}(G/\Phi_\theta(G))|} \times$$

$$\times \frac{1}{|\text{Soc}(G/\Phi_\theta(G))/\text{Soc}(G/\Phi_\theta(G)) \cap Z(G/\Phi_\theta(G))|^3}.$$

Отсюда имеем

$$|G| \leq |\Phi_0(G)|^2 \cdot |\text{Soc}(G/\Phi_0(G))| \times \\ \times |\text{Soc}(G/\Phi_0(G))/\text{Soc}(G/\Phi_0(G)) \cap Z(G/\Phi_0(G))|^3.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Каморников, С.Ф. Подгрупповые функторы и классы конечных групп / С.Ф. Каморников, М.В. Селькин. – Мн.: Белорусская наука, 2003. – 256 с.
2. Kamornikov, S.F. Intersections of prefrattini subgroups in finite soluble groups / S.F. Kamornikov // Int. J. Group Theory. – 2017. – Vol. 6, № 2. – P. 1–5.
3. Монахов, В.С. Замечание о максимальных подгруппах конечных групп / В.С. Монахов // Докл. НАН Беларуси. – 2003. – Т. 47, № 4. – С. 31–33.
4. Каморников, С.Ф. Об одной характеристике подгруппы Фраттини конечной разрешимой группы / С.Ф. Каморников // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2017. – Т. 23, № 4. – С. 176–180.
5. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New-York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

6. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 272 с.

7. Каморников, С.Ф. $\mathfrak{X}$ -корона конечной разрешимой группы / С.Ф. Каморников, Л.А. Шеметков // Алгебра и логика. – 2010. – Т. 49, № 5. – С. 591–614.

8. Авдашкова, Л.П. Об одном свойстве подгрупп Фраттиниева типа / Л.П. Авдашкова, С.Ф. Каморников, О.Л. Шеметкова // Известия НАН Беларуси. Серия физ.-мат. наук. – 2014. – № 3. – С. 38–43.

9. Baer, R. Classes of finite groups and their properties / R. Baer // Illinois J. Math. – 1957. – Vol. 1. – P. 115–187.

10. Gaschütz, W. Über die Φ -Untergruppen endlicher Gruppen / W. Gaschütz // Math. Z. – 1953. – Vol. 58. – P. 160–170.

11. Deskins, W.E. A condition for the solvability of a finite group / W.E. Deskins // Ill. J. Math. – 1961. – Vol. 5, № 2. – P. 306–313.

12. Каморников, С.Ф. О ядре p -префраттиниевой подгруппы конечной разрешимой группы / С.Ф. Каморников // Проблемы физики, математики и техники. – 2018. – № 2 (35). – С. 46–50.

Поступила в редакцию 02.01.19.