УДК 517.977

ПРИМЕНЕНИЕ ЗАДАЧИ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ ДЛЯ ОСУЩЕСТВЛЕНИЯ ЗАДАННОГО ДВИЖЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Е.А. Ружицкая, Г.Л. Карасёва

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

APPLICATION OF THE PROBLEM OF SPEED FOR REALIZING OF A GIVEN MOTION OF A DYNAMIC SYSTEM

E.A. Ruzhitskaya, G.L. Karaseva

F. Scorina Gomel State University

Рассматривается задача осуществления заданного движения динамической системы. С использованием методов оптимального управления вычисляются значения оптимальной обратной связи с помощью решения специальной вспомогательной задачи оптимального управления – задачи быстродействия. Результаты иллюстрируются на примере динамической системы второго порядка, осуществляющей предельный цикл.

Ключевые слова: *стабилизация*, *оптимальная обратная связь*, *динамическая система*, *задача быстродействия*, *задача оптимального управления*, *задача осуществления движений.*

The problem of the given motions realization by dynamic systems is investigated. Using the optimal control methods current values of limited optimal feedbacks are calculated with the help of solution of special auxiliary optimal control problems – speed problems. The results are illustrated by the example of the second order dynamical system, realizing a limited cycle.

Keywords: *stabilization*, *optimal feedback*, *dynamic system*, *speed problem*, *optimal control problem*, *problem of realizing given motions*.

Введение

Проблема построения обратных связей, обеспечивающих заданные свойства переходных процессов, является центральной в математической теории управления [1]. Одной из основных задач теории управления является задача стабилизации, поскольку устойчивое поведение системы – одно из ее важнейших свойств [2]. Стабилизация динамических систем изучается с момента возникновения теории регулирования [3] и была исследована в работах [4], [5].

Как правило, при решении задачи стабилизации накладываются дополнительные ограничения на переходные процессы. Одним из таких ограничений является требование наибыстрейшего устойчивого поведения системы.

В работе Р. Габасова и др. [6] решена задача осуществления заданных движений динамических систем. При этом для построения обратных связей были использованные две вспомогательные задачи оптимального управления: задача минимизации интенсивности управления и задача минимизации расхода топлива.

В работе [7] задача стабилизации динамической системы решалась с использованием вспомогательной задачи – задачи быстродействия.

В настоящей работе для решения задачи осуществления заданного движения динамической системы в качестве вспомогательной задачи оптимального управления используется задача быстродействия.

Работа продолжает исследования [8]–[11], в которых описаны методы реализации оптимального управления типа обратной связи с использованием теории оптимального управления. При этом структура обратной связи не задается в явном, формульном виде. Её значения вычисляются с помощью решения специальной вспомогательной задачи оптимального управления.

1 Постановка задачи

Рассмотрим динамическую систему с управлением, поведение которой при $t \geq 0$ описывается уравнением

$$\dot{x} = Ax + bu, \tag{1.1}$$

где $x = x(t)$ – n-вектор состояния системы в момент t, $u = u(t)$ – значение скалярного ограниченного управляющего воздействия $|u(t)| \leq L$, $t \geq 0$, $\operatorname{rank}(b, Ab, \ldots, A^{n-1}b) = n.$

Рассмотрим движение на фазовой плоскости

$$x = x_f(t), \quad t \geq 0, \tag{1.2}$$

заданное кусочно-гладкой функцией $x_f(t)$, $t \geq 0.$

Движение (1.2) допустимо (осуществимо), если существует такое доступное управление $u_f(t)$, $|u_f(t)| \leq L$, $t \geq 0$, что

$$\dot{x}_f = Ax_f(t) + bu_f(t), \quad t \geq 0.$$

Пусть $G \subset R^n$ – область фазового пространства системы (1.1), внутренность которой содержит движение (1.2): $x_f(t) \in \operatorname{int} G, t \geq 0.$

Функция

$$u = u(t, x), \quad x \in G, \quad t \geq 0, \qquad (1.3)$$

называется *ограниченной обратной связью*, *осуществляющей движение* (1.2), если

1) $u(t, x_f(t)) = u_f(t), \quad t \geq 0;$

2) $|u(t, x)| \leq L, \quad x \in G, \quad t \geq 0;$

3) замкнутая система

$$\dot{x} = Ax + bu(t, x), \; x(0) \in G \qquad (1.4)$$

имеет решение $x(t), \quad t \geq 0;$

4) решение $x = x_f(t), \quad t \geq 0,$ системы (1.4) асимптотически устойчиво.

При построении обратной связи необходимо, чтобы переходный процесс

$$x(t) \to x_f(t), \quad t \to \infty,$$

обладал хорошими в определенном смысле характеристиками.

Построение обратных связей (1.3), обладающих указанными свойствами, является основной задачей осуществления движения [6].

Сделаем замену переменных

$$y(t) = x(t) - x_f(t),$$

$$v(t) = u(t) - u_f(t), \quad t \geq 0.$$

Их поведение подчиняется уравнению

$$\dot{y} = Ay + bv \qquad (1.5)$$

и неравенствам

$$-L - u_f(t) \leq v(t) \leq L - u_f(t), \quad t \geq 0.$$

Таким образом, задача устойчивого осуществления движения (1.2) системой (1.1) с постоянным ограничением на управление сводится к задаче стабилизации тривиального решения $y(t) = 0, \quad t \geq 0,$ системы (1.5) управлениями с переменными ограничениями [6].

Обратная связь (1.3), $t = 0, h, 2h, \ldots$ называется дискретной (с периодом квантования $h > 0$), если порождаемая ей траектория замкнутой системы (1.4) с начальным условием $x(0) = x_0$ строится по следующему правилу

$$\dot{x} = Ax + bu(t), \quad x(0) = x_0,$$

$$u(t) = u(kh, x(kh)), \; t \in [kh, (k+1)h[, \; k = 0, 1, 2, \ldots.$$

При малых $h > 0$ качество переходных процессов в системах, замкнутых непрерывной и дискретной обратными связями, практически одно и то же. Для построения обратной связи, решающей задачу осуществления движения, будут использоваться методы оптимального управления. В качестве вспомогательной (сопровождающей) задачи оптимального управления выберем задачу быстродействия.

2 Сопровождающая задача оптимального управления

Выберем натуральное число $N \; (N > n),$ вещественные числа $h > 0, \quad L > 0.$ Положим $t^* = Nh.$

Кусочно-постоянную функцию

$$u(t), t \geq 0,$$

$$u(t) = u_j, \; t \in [(j-1)h, jh[, \quad j = 1, 2, \ldots,$$

удовлетворяющую ограничению

$$|u(t)| \leq L, t \geq 0,$$

будем называть *доступным управлением*.

Пусть $\tau = kh$ – произвольный момент времени. В классе доступных управлений рассмотрим следующую задачу оптимального быстродействия

$$t^* \to \min, \qquad (2.1)$$

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad x(\tau) = z, \qquad (2.2)$$

$$x(\tau + t^*) = x_f(\tau + t^*), \qquad (2.3)$$

$$|u(t) - u_f(t)| \leq L, \quad t \in T = [\tau, \tau + t^*], \; \tau \geq 0, \quad (2.4)$$

где τ – текущий момент времени.

Доступное управление

$$u(t \mid \tau, z), \; t \geq 0$$

назовем *допустимым*, если оно удовлетворяет ограничению (2.4), порождает такую траекторию $x(t), t \geq 0,$ системы (2.2), которая за конечное время $t^* = t^*(u)$ попадает на заданное движение (2.3).

Допустимое управление

$$u^0(t \mid \tau, z), \quad t \in [0, t^*(u^0)],$$

будем называть *оптимальным по быстродействию программным управлением*, *осуществляющим заданное движение* со временем быстродействия $t^{*0} = t^*(u^0)$ для состояния $(\tau, z),$ если:

1) t^{*0} – наименьшее время из возможных $t^* = t^*(u)$ для допустимых управлений;

2) $\max\limits_{t \in [0, t^{*0}]} |u^0(t)| = \min\limits_{u^*} \max\limits_{t \in [0, t^{*0}]} |u^*(t)|,$

где минимум берется по всем допустимым управлениям $u^*(t), t \in [0, t^*(u^*)],$ для которых время $t^*(u^*)$ совпадает со временем оптимального быстродействия t^{*0}.

Обозначим $G(\tau)$ – множество векторов $z \in R^n,$ для которых задача (2.1)–(2.4) с фиксированным τ имеет решение.

Функция

$$\begin{gathered} u^0(\tau, z) = u^0(0 \mid \tau, z), \\ z \in G(\tau), \tau = kh, k = 0, 1, 2, \ldots \end{gathered} \qquad (2.5)$$

называется оптимальным (стартовым) по быстродействию управлением типа обратной связи, осуществляющим заданное движение (1.2).

Согласно работам [8]–[11], будем вычислять нужные значения функции (2.5) по ходу каждого процесса управления.

В качестве обратной связи (1.3), решающей задачу осуществления движения, возьмем функцию (2.5):

$$u(t, x) = u^0(t, x), \quad x \in G(\tau), \quad t \geq 0. \qquad (2.6)$$

3 Алгоритм построения обратной связи

Пусть известны: начальное состояние $z = x_0^*$ системы (2.2), движение $x_f(t), t \ge 0$, и управление $|u_f(t)| < L < \infty, t \ge 0$.

Оптимальное управление по принципу обратной связи осуществляется следующим образом.

До начала процесса функционирования системы в момент $\tau = 0$ при выбранных значениях N, h построим оптимальное по быстродействию программное управление $u^0(t \mid x_0^*), t \in T$, задачи (2.1)–(2.4), соответствующее начальному состоянию x_0^* и заданному движению $x_f(t), t \ge 0$. Для решения задачи (2.1)–(2.4) можно использовать двойственный метод линейного программирования [12], так как все элементы задачи (2.1)–(2.4) известны. Алгоритм решения задачи быстродействия описан в работах [13], [7]. В момент $\tau = 0$ управление $u^*(t) = u^0(0 \mid x_0^*), t \in [0, h[$ подается на вход системы (2.2) и приводит ее в момент h в состояние $x^*(h \mid x_0^*)$.

Пусть процесс управления осуществлен на промежутке $[0, \tau - h]$ и в момент $\tau = kh$ система (2.2), замкнутая обратной связью (2.6), оказалась в состоянии $x^*(\tau \mid x_0^*)$. Управление $u^0(t)$ на следующем промежутке времени $[\tau, \tau + h[$ вычисляется по формуле

$$u^*(t) = u^0(t \mid \tau, x^*(\tau)), t \in [\tau, \tau + h[.$$

Отсюда следует, что в каждом конкретном процессе управления динамической системой нужны значения обратной связи вдоль реализовавшейся траектории $x^*(t), t \ge 0$. При этом нужны значения $u^*(t), t \ge 0$ лишь по ходу конкретного процесса управления.

4 Пример

Рассмотрим систему управления

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y + u, \\ \dot{y} &= -x + u, \end{aligned} \tag{4.1}$$

которая при $u = 0$ имеет периодические движения, среди которых нет заданного предельного цикла

$$(x^* - 2)^2 + (y^* - 2)^2 = 1. \tag{4.2}$$

С помощью решения вспомогательной задачи (2.1)–(2.4) при $h = 0.32$, $L = 2$, $u_f(t) = -2$, $t \ge 0$ (управление, осуществляющее заданное движение) была построена ограниченная оптимальная по быстродействию обратная связь, после замыкания которой заданное движение (4.2) стало асимптотически устойчивым предельным циклом. На рисунке 4.1 показана фазовая траектория (x, y) замкнутой системы для начального состояния $z = (2; 4)$. На рисунке 4.2 представлены реализовавшиеся значения оптимальной обратной связи. При этом время, за которое система (4.1) попала на траекторию предельного цикла (4.2) составило $\tau = 12,24$.

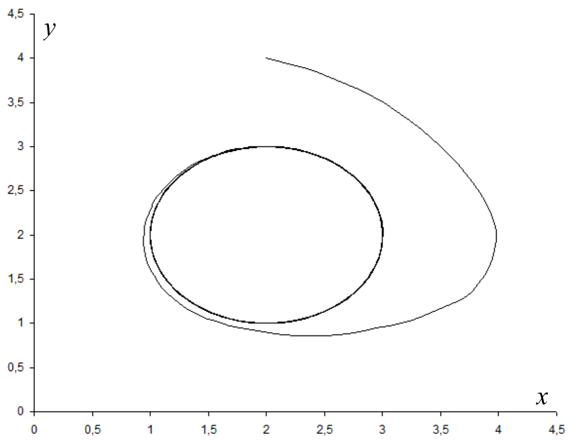

Рисунок 4.1 – Фазовая траектория замкнутой системы, полученная с помощью решения вспомогательной задачи быстродействия (2.1)–(2.4)

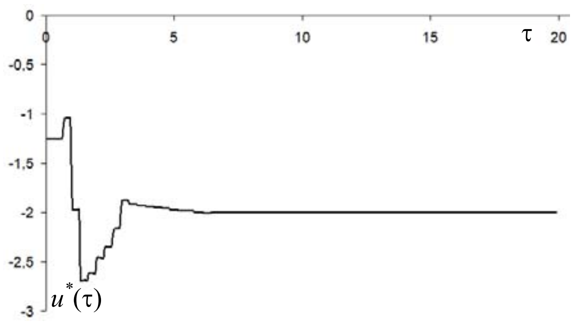

Рисунок 4.2 – Реализовавшиеся значения обратной связи, полученные с помощью решения вспомогательной задачи быстродействия (2.1)–(2.4)

В работе [6] построена оптимальная ограниченная обратная связь для системы (4.1), осуществляющая движение (4.2) с использованием сопровождающей задачи оптимального управления – задачи минимизации интенсивности управления:

$$\begin{gathered} \rho(\tau, z) \to \min, \\ \dot{x} = Ax + bu, \; x(\tau) = z, \\ x(\tau + \theta) = x_f(\tau + \theta), \; \tau \ge 0, \\ |u(t) - u_f(t)| \le \rho, \; t \in T = [\tau, \tau + \theta]. \end{gathered} \tag{4.3}$$

На рисунке 4.3 показана фазовая траектория (x, y) замкнутой системы для начального состояния $z = (2; 4)$. На рисунке 4.4 представлены реализовавшиеся значения оптимальной обратной связи. При решении задачи (4.3) были выбраны следующие значения параметров сопровождающей задачи: $\theta = 8$, $h = 0.32$, $u_f(t) = -2$, $t \ge 0$. При этом время, за которое система (4.1) попала на траекторию предельного цикла (4.2), составило $\tau = 48,72$.

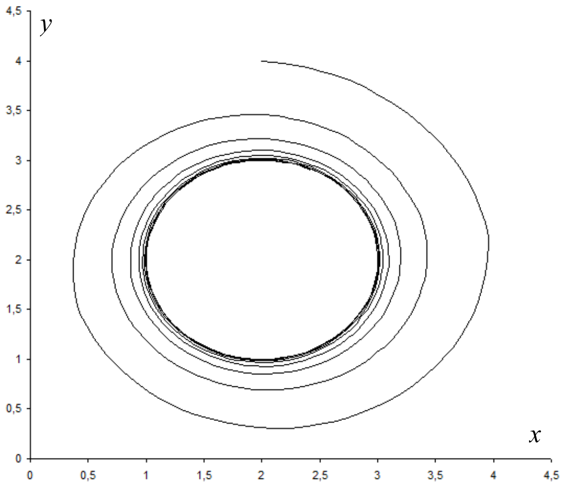

Рисунок 4.3 – Фазовая траектория замкнутой системы, полученная с помощью решения вспомогательной задачи (4.3)

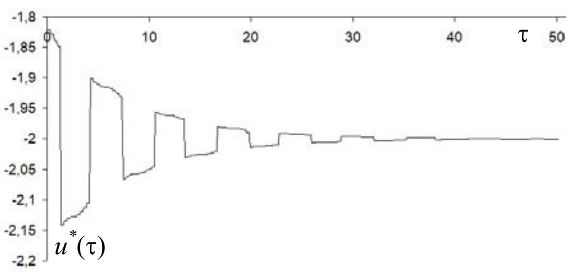

Рисунок 4.4 – Реализовавшиеся значения обратной связи, полученные с помощью решения вспомогательной задачи (4.3)

Заключение

Применение вспомогательной сопровождающей задачи оптимального управления – задачи быстродействия, для построения оптимальных обратных связей, осуществляющих заданное движение, позволило почти в 4 раза сократить время, за которое система попала на траекторию предельного цикла (4.2) и стала осуществлять заданное периодическое движение.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Габасов*, *Р.* Построение оптимальных управлений типа обратной связи в линейной задаче / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова, О.И. Костюкова // Доклады АН СССР. – 1991. – Т. 320, № 6. – С. 1294–1299.

2. *Малкин*, *И.Г.* Теория устойчивости движения / И.Г. Малкин. – М.: Наука, 1966.

3. *Айзерман*, *М.А.* Лекции по теории автоматического регулирования / М.А. Айзерман. – М.: Физматгиз, 1958.

4. *Габасов*, *Р.* Решение классической задачи регулирования методами оптимального управления / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова, Е.А. Ружицкая // Автоматика и телемеханика. – 2001. – № 6. – С. 18–29.

5. *Gabasov*, *R.* Stabilization of dynamical systems with the help of optimization methods / R. Gabasov, F.M. Kirillova, E.A. Ruzhitskaya // Nonsmooth and discontinuous problems of control and optimization. Proceedings volume from the IFAC Workshop, Chelyabinsk, Russia, 1998. – P. 35–41.

6. *Габасов*, *Р.* Синтез обратных связей для систем, осуществляющих заданные движения / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова, Е.А. Ружицкая // Автоматика и телемеханика. – 2003. – № 8. – С. 26– 39.

7. *Ружицкая*, *Е.А.* Стабилизация оптимальных по быстродействию систем / Е.А. Ружицкая // Проблемы физики, математики и техники. – 2010. – № 4 (5). – С. 35–38.

8. *Габасов*, *Р.* Оптимизация линейной системы управления в режиме реального времени / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова, О.И. Костюкова // Известия РАН. Техническая кибернетика. – 1992. – № 4. – С. 3–19.

9. *Gabasov*, *R.* Real-time construction of optimal closable feedbacks / R. Gabasov, F.M. Kirillova // 13th World Congress of IFAC International Federation of Automatic Control. – San Francisco, CA, USA, June 30 – Jule 5. – San Francisco, CA, USA – 1996. – Vol. D. – P. 231–236.

10. *Габасов*, *Р.* Оптимальное управление в режиме реального времени / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова // Вторая международная конференция по проблемам управления (17–19 июня 2003 г.): Пленарные доклады. – М.: Институт проблем управления, 2003. – С. 20–47.

11. *Габасов*, *Р.* Оптимальное управление и наблюдение в реальном времени / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2006. – № 3. – С. 90–111.

12. *Габасов*, *Р.* Конструктивные методы оптимизации. Ч. 1. Линейные задачи / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова, А.И. Тятюшкин. – Минск: Университетское, 1984.

13. *Габасов*, *Р.* Синтез оптимальных по быстродействию систем в классе ограниченных непрерывных управлений с ограниченными производными / Р. Габасов, Е.А. Ружицкая // Известия РАН. Теория и системы управления. – 1998. – № 4. – С. 75–81.

Поступила в редакцию 11.01.19.