

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С НАСЛЕДСТВЕННО G -ПЕРЕСТАНОВОЧНЫМИ ПОДГРУППАМИ МАЛОГО ПОРЯДКА

П.В. Бычков¹, С.Ф. Каморников¹, В.Н. Тютянов²

¹Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

²Международный университет «МИТСО», Гомель

FINITE GROUPS WITH HEREDITARILY G -PERMUTABLE SUBGROUPS OF SMALL ORDER

P.V. Bychkov¹, S.F. Kamornikov¹, V.N. Tyutyunov²

¹Francisk Skorina Gomel State University

²Gomel Branch of International University «MITSO», Gomel

Аннотация. Исследуется строение конечной группы G , все подгруппы которой порядка 2 и 3, а также все циклические подгруппы порядка 4 являются наследственно G -перестановочными в G .

Ключевые слова: конечная группа, наследственно G -перестановочная подгруппа, разрешимая группа.

Для цитирования: Бычков, П.В. Конечные группы с наследственно G -перестановочными подгруппами малого порядка / П.В. Бычков, С.Ф. Каморников, В.Н. Тютянов // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 1 (58). – С. 63–67. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_1_58_63. – EDN: NMFTFX

Abstract. The structure of a finite group G is investigated, in which all subgroups of order 2 and 3 as well as all cyclic subgroups of order 4 are hereditarily G -permutable in G .

Keywords: finite group, hereditarily G -permutable subgroup, soluble group.

For citation: Bychkov, P.V. Finite groups with hereditarily G -permutable subgroups of small order / P.V. Bychkov, S.F. Kamornikov, V.N. Tyutyunov // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2024. – № 1 (58). – P. 63–67. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_1_58_63 (in Russian). – EDN: NMFTFX

Введение

Все группы, которые мы рассматриваем в данной работе, являются конечными.

Следующая концепция, развивающая понятие *квазиперестановочной подгруппы* (см. [1]), т. е. подгруппы, перестановочной со всеми подгруппами группы, предложена в работе [2].

Определение 1. Пусть A, B – подгруппы группы G . Тогда A называется:

(1) G -перестановочной с B , если $AB^x = B^x A$ для некоторого $x \in G$;

(2) наследственно G -перестановочной с B , если $AB^x = B^x A$ для некоторого элемента $x \in \langle A, B \rangle$.

Определение 2. Подгруппа A группы G называется (наследственно) G -перестановочной в G , если A (наследственно) G -перестановочна со всеми подгруппами из G .

Наследственно G -перестановочные подгруппы в последнее время нашли ряд интересных приложений, связанных с изучением нормальной структуры конечной группы и получением критериев ее не простоты [3]–[8].

В частности, в [3], [4], отвечая на вопрос о существовании G -перестановочных и наследственно G -перестановочных подгрупп в неабелевых простых группах (см. вопрос 17.112 из «Куровской тетради» [9]), А.А. Гальт и В.Н. Тютянов показали, что спорадические и исключительные группы лиева типа не содержат нетривиальных наследственно G -перестановочных подгрупп.

В [5] доказана разрешимость группы, у которой все минимальные подгруппы являются наследственно G -перестановочными (под *минимальной подгруппой* группы G понимается любая ее подгруппа простого порядка).

В [6] доказано, что если S – силовская 2-подгруппа группы G и каждая максимальная подгруппа из S является наследственно G -перестановочной в G , то G разрешима.

В работах [7], [8] исследовано нормальное и формационное строение группы, у которой любая подгруппа Шмидта является наследственно G -перестановочной (*подгруппой Шмидта* называется ненильпотентная группа, все собственные подгруппы которой являются нильпотентными).

В данной работе развиваются результаты из [5]. Здесь исследуется строение группы, у которой все подгруппы порядка 2 и 3, а также все циклические подгруппы порядка 4 являются наследственно G -перестановочными.

Наша главная цель – доказательство следующей теоремы.

Теорема А. Пусть G – группа, у которой все подгруппы порядка 2 и 3, а также все циклические подгруппы порядка 4 являются наследственно G -перестановочными. Тогда G – $\{2,3\}$ -сверхразрешимая группа.

Напомним, что для множества π простых чисел группа G называется π -сверхразрешимой, если она обладает главным рядом, каждый фактор которого либо является π' -группой, либо имеет простой порядок p для некоторого $p \in \pi$.

Из теоремы А, в частности, следует, что если G – $3'$ -группа, у которой все подгруппы порядка 2, а также все циклические подгруппы порядка 4 являются наследственно G -перестановочными, то G 2-сверхразрешима.

1 Определения и предварительные результаты

В данной работе мы используем определения и обозначения, которые приняты в книге [10].

Будем использовать следующие обозначения:

- если p – простое число, то $Syl_p(G)$ – множество всех силовских p -подгрупп группы G ;
- $\Phi(G)$ – подгруппа Фраттини группы G ;
- $Z(G)$ – центр группы G ;
- Z_n – циклическая группа порядка n ;
- если A и B – подгруппы группы G , то $A : B$ – их полупрямое произведение.

Доказательство следующего результата осуществляется простой проверкой.

Лемма 1.1. Пусть H и K – подгруппы группы G , причем K нормальна в G . Если подгруппа H является наследственно G -перестановочной в G , то подгруппа HK/K является наследственно G/K -перестановочной в G/K .

Минимальная неразрешимая группа – это неразрешимая группа, все собственные подгруппы которой разрешимы. Простая проверка показывает, что группа G является минимальной неразрешимой группой тогда и только тогда, когда $G/\Phi(G)$ – минимальная простая группа, т. е. неабелева простая группа, все собственные подгруппы которой разрешимы. Полный список минимальных простых групп приведен Томпсоном в [11]. Этот список содержит следующие группы:

- $PSL_2(2^p)$, где p – простое число;
- $PSL_2(3^p)$, где p – простое число, большее 3;
- $PSL_2(p)$, где p – простое число, большее 5, и $p^2 + 1 \equiv 0 \pmod{5}$;

– $PSL_3(3)$;

– $Sz(2^p)$, p – простое нечетное число.

Будем использовать следующий результат.

Лемма 1.2 [5, лемма 3]. Пусть G – минимальная простая группа. Тогда G не содержит нетривиальных наследственно G -перестановочных подгрупп.

Предложение 1.1. Пусть G – $3'$ -группа, у которой все подгруппы порядка 2 и все циклические подгруппы порядка 4 являются наследственно G -перестановочными. Тогда группа G разрешима.

Доказательство. Пусть группа G – минимальный контрпример к предложению. Если собственная подгруппа группы G имеет нечетный порядок, то она разрешима по теореме Томпсона-Фейта; если же она имеет четный порядок, то она неразрешима, поскольку G является минимальным контрпримером к предложению. Следовательно, G – минимальная неразрешимая группа. Если G является простой неабелевой группой, то она будет минимальной простой группой и $G \cong Sz(2^p)$ для некоторого простого числа $p \geq 3$. Данный случай невозможен ввиду леммы 1.2.

Таким образом, G не является простой неабелевой группой. Легко показать, что $G/\Phi(G)$ – минимальная простая неабелева $3'$ -группа. Таким образом, $G/\Phi(G) \cong Sz(2^p)$ для некоторого простого числа $p \geq 3$. Согласно леммам 1.1 и 1.2, все элементы группы G , имеющие порядок 2 и 4, содержатся в подгруппе $\Phi(G)$.

Пусть $x \in \Phi(G)$ и $|x|=2$. Тогда ввиду условия предложения для некоторых силовских подгрупп $U \in Syl_t(G)$ и $S \in Syl_s(G)$, где $t \in \pi(q - \sqrt{2q} + 1)$ и $s \in \pi(q + \sqrt{2q} + 1)$, существуют подгруппы $\langle x \rangle U$ и $\langle x \rangle S$. Так как подгруппа $\Phi(G)$ нильпотентна, то подгруппа $R \in Syl_2(\Phi(G))$ нормальна в G . Отсюда следует, что

$$\langle x \rangle S \cap R = \langle x \rangle U \cap R = \langle x \rangle.$$

Поэтому $\langle x \rangle S = \langle x \rangle : S = \langle x \rangle \times S$ и $\langle x \rangle U = \langle x \rangle : U = \langle x \rangle \times U$. Если $\langle S, U \rangle$ – собственная подгруппа группы G , то $\langle S, U \rangle$ является разрешимой группой. Тогда группа $G/\Phi(G) \cong Sz(2^p)$ содержит собственную разрешимую подгруппу

$$\langle S\Phi(G)/\Phi(G), U\Phi(G)/\Phi(G) \rangle,$$

где

$$U\Phi(G)/\Phi(G) \in Syl_t(G/\Phi(G))$$

и $S\Phi(G)/\Phi(G) \in Syl_s(G/\Phi(G))$. Последнее невозможно ввиду строения группы $Sz(2^p)$ (см., например, [12]).

Таким образом, $\langle S, U \rangle = G$ и $x \in Z(G)$. Поскольку $\langle x \rangle$ – произвольный элемент порядка 2, то все элементы группы G , имеющие порядок 2, содержатся в $Z(G)$.

Пусть $x \in \Phi(G)$ такой, что $|x| = 4$. Так же как в случае $|x| = 2$ показывается, что $\langle x \rangle \triangleleft G = \langle S, U \rangle$. Ввиду [13, лемма 5.4.1] $x \in Z(G)$. Так как x – произвольный элемент порядка 4, то все элементы группы G , имеющие порядок 4, содержатся в $Z(G)$.

Таким образом, все элементы порядка 2 и 4 группы G содержатся в $Z(G)$. Ввиду [14, теорема IV.5.5] группа G является 2-нильпотентной, что невозможно.

Предложение доказано.

При доказательстве теоремы А мы будем опираться на следующий результат из [15].

Лемма 1.3. Пусть p и q – простые числа, m и n – натуральные числа, причем $p^m = q^n + 1$. Тогда выполняется одно из следующих утверждений:

- 1) $q = 2, p = 3, n = 3$ и $m = 2$;
- 2) $q = 2, m = 1, n$ является степенью числа 2, а $p^n + 1$ – простое число Ферма;
- 3) $p = 2, n = 1$ и $q = p^m - 1$ – простое число Мерсенна, в частности, m является простым числом.

Описание подгрупп группы $PSL_2(p)$ содержится в известной теореме Диксона (см., например, [14, теорема II.8.27]). В дальнейшем мы будем опираться на нее без дополнительных ссылок.

2 Доказательство теоремы А

Покажем сначала, что группа G является разрешимой. Предположим, что это не так и G – минимальный контрпример. Ввиду предложения 1.1 будем считать, что 3 делит порядок группы G . Ясно, что G – минимальная неразрешимая группа. Более того, ввиду леммы 1.2 мы можем считать, что G не является простой неабелевой группой. Следовательно, $\Phi(G) \neq 1$ и $G/\Phi(G)$ – минимальная простая группа. Согласно леммам 1.1 и 1.2, все элементы группы G порядков 2, 3 и 4 содержатся в подгруппе $\Phi(G)$. Рассмотрим все возможные случаи.

1. $G/\Phi(G) \cong PSL_2(2^p)$, где p – простое число.

Из теоремы Диксона следует, что в группе $PSL_2(2^p) = PSL_2(q)$ силовская 2-подгруппа U содержится в единственной максимальной подгруппе $B \cong q:(q-1)$. Кроме того, $PSL_2(q)$ содержит циклическую подгруппу $T \cong Z_{q+1}$. При этом числа $q, q-1, q+1$ являются попарно

взаимно простыми. Ввиду леммы 1.3 равенство $2^p + 1 = 3^m$ имеет место только в случае $p = 3$ и $m = 2$ для группы $PSL_2(2^3)$. В оставшихся случаях имеется простой делитель s числа $q+1$, отличный от 3. Пусть $S \in Syl_s(PSL_2(2^p))$. В силу изложенного имеем $\langle U, S \rangle = PSL_2(2^p)$.

Пусть сначала $p \neq 3$. Рассмотрим элемент $x \in \Phi(G)$ такой, что $|x| = 3$. Тогда ввиду условия теоремы для некоторых подгрупп $U \in Syl_2(G)$ и $S \in Syl_s(G)$, где $s \in \pi(2^p + 1) \setminus \{3\}$, существуют подгруппы $\langle x \rangle S$ и $\langle x \rangle U$. Так как подгруппа $\Phi(G)$ nilпотентна, то подгруппа $R \in Syl_3(\Phi(G))$ нормальна в G . Отсюда следует, что

$$\langle x \rangle S \cap R = \langle x \rangle U \cap R = \langle x \rangle.$$

Поэтому $\langle x \rangle S = \langle x \rangle : S$ и $\langle x \rangle U = \langle x \rangle : U$. Если $\langle S, U \rangle$ – собственная подгруппа группы G , то $\langle S, U \rangle$ является разрешимой группой. Тогда группа $G/\Phi(G) \cong PSL_2(2^p)$ содержит собственную разрешимую подгруппу

$$\langle S\Phi(G)/\Phi(G), U\Phi(G)/\Phi(G) \rangle,$$

где $U\Phi(G)/\Phi(G) \in Syl_2(G/\Phi(G))$ и $S\Phi(G)/\Phi(G) \in Syl_s(G/\Phi(G))$. Последнее невозможно ввиду строения группы $PSL_2(2^p)$.

Таким образом, $\langle S, U \rangle = G$ и подгруппа $\langle x \rangle$ нормальна в G . Следовательно, для любого элемента $z \in G$ порядка 3 подгруппа $\langle z \rangle$ нормальна в G . Ясно, что $\langle z \rangle \subseteq Z(R)$. Поэтому $\Phi(G) \subseteq C_G(\langle z \rangle)$. Так как подгруппа $C_G(\langle z \rangle)$ является нормальной в G , то $C_G(\langle z \rangle) = G$ и $z \in Z(G)$. Поскольку z – произвольный элемент порядка 3, то все элементы группы G , имеющие порядок 3, содержатся в $Z(G)$. Ввиду теоремы IV.3.5 из [14] группа G является 3-нильпотентной, что невозможно.

Пусть теперь $G/\Phi(G) \cong PSL_2(8)$. Отметим, что в группе $PSL_2(8)$ порядка $2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$ силовская 7-подгруппа S и силовская 3-подгруппа T порождают $PSL_2(8)$.

Пусть $x \in \Phi(G)$ такой, что $|x| = 2$. Тогда ввиду условия теоремы для некоторых подгрупп $U \in Syl_7(G)$ и $S \in Syl_3(G)$ существуют подгруппы $\langle x \rangle S$ и $\langle x \rangle U$. Так как подгруппа $\Phi(G)$ nilпотентна, то подгруппа $R \in Syl_2(\Phi(G))$ нормальна в G . Отсюда следует, что

$$\langle x \rangle S \cap R = \langle x \rangle U \cap R = \langle x \rangle.$$

Поэтому $\langle x \rangle S = \langle x \rangle : S = \langle x \rangle \times S$ и $\langle x \rangle U = \langle x \rangle : U = \langle x \rangle \times U$.

Так как $\langle S, U \rangle = G$, то $x \in Z(G)$. Поскольку x – произвольный элемент порядка 2, то все

элементы группы G , имеющие порядок 2, содержатся в $Z(G)$.

Пусть $x \in \Phi(G)$ такой, что $|x|=4$. Так же как в случае $|x|=2$ показывается, что $\langle x \rangle \triangleleft G = \langle S, U \rangle$. Ввиду [13, лемма 5.4.1] $x \in Z(G)$. Так как x – произвольный элемент порядка 4, то все элементы группы G , имеющие порядок 4, содержатся в $Z(G)$.

Таким образом, все элементы порядка 2 и 4 группы G содержатся в $Z(G)$. Ввиду [14, теорема IV.5.5] группа G является 2-нильпотентной, что невозможно.

2. $G/\Phi(G) \cong PSL_2(p)$, где p – простое число, большее 5, и $p^2 + 1 \equiv 0 \pmod{5}$ или $G/\Phi(G) \cong PSL_2(3^p)$, где p – простое число, большее 3.

Рассмотрим элемент $x \in \Phi(G)$ такой, что $|x|=3$. Тогда из строения группы $G/\Phi(G)$ следует, что $G = \langle U, S \rangle$, где $U \in Syl_2(G)$ и $S \in Syl_3(G)$ для некоторого простого s , большего 3. Рассуждая далее по аналогии с описанным в пункте 1 случае, получаем, что все элементы группы G , имеющие порядок 3, содержатся в $Z(G)$. Ввиду теоремы IV.3.5 из [14] группа G является 3-нильпотентной, что невозможно.

3. $G/\Phi(G) \cong PSL_3(3)$.

Из [15] следует, что в группе $PSL_3(3)$ силовская 13-подгруппа S и силовская 3-подгруппа T порождают группу $PSL_3(3)$. Далее по аналогии с описанным в пункте 1 случае $G/\Phi(G) \cong PSL_2(8)$ приходим к противоречию.

Итак, G – разрешимая группа. Покажем теперь, что любая группа, удовлетворяющая условиям теоремы, является π -сверхразрешимой, где $\pi = \{2, 3\}$.

Предположим, что это не так. Тогда существует по крайней мере одна группа, которая не является π -сверхразрешимой, но все ее подгруппы порядка 2 и 3, а также все ее циклические подгруппы порядка 4 являются наследственно G -перестановочными. Выберем среди них группу G , имеющую наименьший порядок. Пусть M – ее произвольная максимальная подгруппа. Тогда из $|M| < |G|$ и выбора группы G следует, что M – π -сверхразрешимая группа. Так как группа G не является π -сверхразрешимой, то G – минимальная не F -группа, где F – формация всех π -сверхразрешимых групп.

Так как группа G является разрешимой, то ввиду теоремы 24.2 из [16] она обладает следующими свойствами:

1) G^F является p -группой, где $p \in \{2, 3\}$;

2) $G^F/\Phi(G^F)$ – нециклический главный фактор группы G ;

3) $\Phi(G^F) = G^F \cap \Phi(G) \subseteq Z(G^F)$;

4) если группа G^F неабелева, то ее центр, коммутант и подгруппа Фраттини совпадают и имеют экспоненту p ;

5) если группа G^F абелева, то она элементарна;

6) если $p=3$, то G^F имеет экспоненту 3; если $p=2$, то экспонента G^F не превышает 4.

Если $p=3$, то из 6) следует, что в G^F найдется элемент x порядка 3, который не лежит в $\Phi(G^F)$. Тогда ввиду утверждения 2) $\langle x \rangle \Phi(G^F)/\Phi(G^F)$ – собственная подгруппа группы $G^F/\Phi(G^F)$, имеющая порядок 3. Пусть $M/\Phi(G^F)$ – максимальная подгруппа группы $G^F/\Phi(G^F)$, не содержащая $\langle x \rangle \Phi(G^F)/\Phi(G^F)$. Очевидно,

$$|G : M| = |G^F/\Phi(G^F)| = 3^n,$$

при этом ввиду утверждения 2) $n > 1$. По лемме 1.1 $\langle x \rangle \Phi(G^F)/\Phi(G^F)$ – наследственно $G/\Phi(G^F)$ -перестановочная подгруппа в $G/\Phi(G^F)$. Поэтому в G найдется элемент y такой, что $\langle x \rangle M^y = M^y \langle x \rangle$. Из максимальнойности M в G следует, что $\langle x \rangle M^y = G$, а значит, $|G : M| = 3$. Противоречие.

Если $p=2$, то из 4)–6) следует, что в G^F найдется по крайней мере один элемент x порядка 2 или 4, который не лежит в $\Phi(G^F)$. Тогда ввиду утверждения 2) $\langle x \rangle \Phi(G^F)/\Phi(G^F)$ – собственная подгруппа группы $G^F/\Phi(G^F)$, имеющая порядок 2. Рассуждая далее по аналогии со случаем $p=3$, снова приходим к противоречию, которое и завершает доказательство теоремы. \square

ЛИТЕРАТУРА

1. Ore, O. Contributions in the theory of groups of finite order / O. Ore // Duke Math. J. – 1939. – Vol. 5. – P. 431–460.
2. Го, В. X -перестановочные подгруппы / В. Го, А.Н. Скиба, К.П. Шам // Сибирский математический журнал. – 2007. – Т. 48, № 4. – С. 742–759.
3. Гальт, А.А. О существовании G -перестановочных подгрупп в простых спорадических группах / А.А. Гальт, В.Н. Тютянов // Сибирский математический журнал. – 2022. – Т. 63, № 4. – С. 831–841.
4. Гальт, А.А. О существовании G -перестановочных подгрупп в исключительных группах

G лиева типа / А.А. Гальт, В.Н. Тютянов // Сибирский математический журнал. – 2023. – Т. 64, № 5. – С. 935–945.

5. Каморников, С.Ф. Конечные группы с наследственно G -перестановочными минимальными подгруппами / С.Ф. Каморников, В.Н. Тютянов // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2023. – Т. 29, № 1. – С. 102–110.

6. Каморников, С.Ф. О разрешимости и сверхразрешимости конечных групп / С.Ф. Каморников, В.Н. Тютянов // Сибирский математический журнал. – 2023. – Т. 64, № 2. – С. 312–320.

7. *Finite groups with G -permutable Schmidt subgroups* / A. Ballester-Bolinches, S.F. Kamornikov, V. Pérez-Calabuig, V.N. Tyutyaynov // *Mediterranean Journal of Mathematics*. – 2023. – Vol. 20. – Article 174. – P. 1–12.

8. *Finite groups with hereditarily G -permutable Schmidt subgroups* / A. Ballester-Bolinches, S.F. Kamornikov, V. Pérez-Calabuig, V.N. Tyutyaynov // *Bull. Austral. Math. Soc.* – 2023. – P. 1–7. – DOI: doi.org/10.1017/S0004972723000771.

9. *The Kurovka Notebook: Unsolved problems in group theory*. – Novosibirsk: Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, 2022. – 269 p.

10. Doerk, K. *Finite soluble groups* / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

11. Thompson, J.G. *Nonsolvable finite groups all of whose local subgroups are solvable* /

J.G. Thompson // *Bull. Amer. Math. Soc.* – 1968. – Vol. 74, № 3. – P. 383–437.

12. Suzuki, M. *On a class double transitive groups* / M. Suzuki // *Ann. Math.* – 1962. – Vol. 75, № 1. – P. 105–145.

13. Gorenstein, D. *Finite groups* / D. Gorenstein. – New York: American Mathematical Society, 1980. – 519 p.

14. Huppert, B. *Endliche Gruppen I* / B. Huppert. – Berlin: Springer-Verlag, 1967. – 796 p.

15. *Atlas of finite groups* / J.H. Conway, R.T. Curtis, S.P. Norton, R.A. Parker, R.A. Wilson. – Oxford: Clarendon Press, 1985. – 252 p.

16. Шеметков, Л.А. *Формации конечных групп* / Л.А. Шеметков. – Москва: Наука, 1978. – 272 с.

Исследования второго и третьего авторов выполнены при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований в рамках научного проекта Ф23РНФ-237.

Поступила в редакцию 03.02.2024.

Информация об авторах

Бычков Павел Владимирович – к.ф.-м.н., доцент
Каморников Сергей Федорович – д.ф.-м.н., профессор
Тютянов Валентин Николаевич – д.ф.-м.н., профессор