

С.И. Фиалка (УО «ГГУ им. Ф. Скорины», Гомель)

Науч. рук. В.Н. Капшай, к.ф.-м.н., доцент

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ СВЯЗАННЫХ СОСТОЯНИЙ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ДВУХЧАСТИЧНЫХ СИСТЕМ С НЕНУЛЕВЫМ ОРБИТАЛЬНЫМ МОМЕНТОМ

Динамическое описание составных систем частиц требует, при больших дефектах массы, построения последовательной релятивистской теории связанных состояний [1]. Большое применение в приложениях находит подход, основанный на использовании динамических уравнений в локальной квантовой теории поля, например, квазипотенциальных уравнений Логунова-Тавхелидзе и Кадышевского [2], [3]. Ядра интегральных уравнений удастся построить только в низших порядках теории возмущений, поэтому разработка методов точного или приближенного решения квазипотенциальных уравнений позволит учесть вклад непертурбативных эффектов взаимодействия [4]. Один из предложенных ранее методов решения квазипотенциальных уравнений основывается на сведении этих уравнений в импульсном пространстве к дифференциальным [5].

Рассмотрим трехмерные интегральные квазипотенциальные уравнения для связанных состояний систем двух релятивистских бесспиновых частиц массы m с произвольным орбитальным моментом [5]

$$G_{0,j}^{-1}(E, E_p) \psi_{j,l}(\vec{p}) = \int V(E, \vec{p}, \vec{k}) \psi_{j,l}(\vec{k}) m \frac{d\vec{k}}{E_k}. \quad (1)$$

Здесь $\psi_{j,l}(\vec{p})$ – волновые функции относительного движения, \vec{p} и \vec{k} – начальный и конечный относительные импульсы частиц в системе центра инерции, E_p и E_k – начальная и конечная энергии частиц, $2E = 2m \cos w$ – энергия двухчастичной системы, $w \in [0; \pi/2]$, $V(E, \vec{p}, \vec{k})$ – квазипотенциал, $G_{0,j}^{-1}$ – обратные функции Грина (уравнения Логунова-Тавхелидзе ($j=1$), Кадышевского ($j=2$) и их модифицированные версии ($j=3, j=4$)):

$$\begin{aligned} G_{0,1}^{-1}(E, E_p) &= E^2 - E_p^2; & G_{0,2}^{-1}(E, E_p) &= E_p(E - E_p); \\ G_{0,3}^{-1}(E, E_p) &= m(E^2 - E_p^2)/E_p; & G_{0,4}^{-1}(E, E_p) &= m(E - E_p). \end{aligned} \quad (2)$$

Рассмотрим в качестве релятивистского потенциала $V(E, \vec{p}, \vec{k})$ обобщение [5] нерелятивистского потенциала $V(\vec{p}, \vec{k}) = -\lambda(4\pi|\vec{p} - \vec{k}|)^{-1}$

$$V(\vec{p}, \vec{k}) = -\frac{\lambda}{4\pi} \frac{1}{|\vec{\Delta}_{p,k}|} = -\frac{\lambda}{4\pi} \frac{m}{\sqrt{(E_p E_k - \vec{p} \vec{k})^2 - m^4}}. \quad (3)$$

Решение (1) будем искать в виде $\psi_{j,l}(\vec{p}) = \psi_{j,l}(p) Y_l^\mu(\theta_p, \varphi_p)$, при этом потенциал (3) также можно разложить по сферическим гармоникам. Все это, после сокращения на $Y_l^\mu(\theta_p, \varphi_p)$, дает

$$G_{0,j}^{-1}(E, E_p) \psi_{j,l}(p) = \frac{4\pi}{2l+1} m \int_0^\infty V_l(p, k) \psi_{j,l}(k) k^2 \frac{dk}{E_k} \quad (4)$$

и

$$V_l(p, k) = 2\pi \frac{2l+1}{4\pi} \int_0^\pi V(p, k, \cos \theta_{pk}) P_l(\cos \theta_{pk}) \sin \theta_{pk} d\theta_{pk}. \quad (5)$$

Подставим явный вид потенциала (3) в (5), введем обозначения $\alpha = E_p E_k - p k$, $\beta = E_p E_k + p k$, сделаем замену $y = E_p E_k - p k \cos \theta_{pk}$, тогда

$$V_l(p, k) = -\frac{2l+1}{4\pi} \frac{\lambda m}{2} \frac{1}{p k} \int_\alpha^\beta P_l\left(\frac{\beta + \alpha - 2y}{\beta - \alpha}\right) \frac{1}{\sqrt{y^2 - m^4}} dy. \quad (6)$$

Для удобства введем еще одно обозначение

$$I_l(p, k) = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta P_l\left(\frac{\beta + \alpha - 2y}{\beta - \alpha}\right) \frac{1}{\sqrt{y^2 - m^4}} dy, \quad (7)$$

тогда подставляя (6) в (4), с учетом (7), получим

$$G_{0,j}^{-1}(E, E_p) p \psi_{j,l}(p) = -\lambda m^2 \int_0^\infty I_l(p, k) k \psi_{j,l}(k) \frac{dk}{E_k}. \quad (8)$$

Введем параметризацию $p = m \sinh \chi_p$, $k = m \sinh \chi_k$, где χ_p , χ_k – быстроты, и обозначим $p \psi_{j,l}(p) = \phi_{j,l}(\chi_p)$. Ясно, что $\alpha = m \cosh(\chi_p - \chi_k)$, $\beta = m \cosh(\chi_p + \chi_k)$ и квазипотенциальные уравнения (8) примут вид

$$G_{0,j}^{-1}(m \cos w, m \cosh \chi_p) \phi_{j,l}(\chi_p) = -\lambda m^2 \int_0^\infty I_l(\chi_p, \chi_k) \phi_{j,l}(\chi_k) d\chi_k. \quad (9)$$

Для дальнейшего рассуждения необходимо знать явный вид ядра интегральных уравнений (9), для чего необходимо провести вычисление величин (7). Производя интегрирование и выражая ответ через полиномы Лежандра, нами был найден явный вид $I_l(\chi_p, \chi_k)$ для $l=0,1,2,\dots,9$. Анализируя полученные результаты, мы заметили, что зависимость

$I_l(\chi_p, \chi_k)$ при произвольном l может быть представлена в следующем виде:

$$I_l(\chi_p, \chi_k) = \begin{cases} P_l(\coth \chi_k) Q_l(\coth \chi_p), & \text{где } \chi_k \geq \chi_p; \\ P_l(\coth \chi_p) Q_l(\coth \chi_k), & \text{где } \chi_k \leq \chi_p. \end{cases} \quad (10)$$

Замечательным свойством уравнений (9) с ядром (10) является то, что их можно свести к дифференциальным уравнениям, путем двукратного дифференцирования по параметру χ_p . Вводя затем обозначение

$F_{j,l}(\chi_p) = G_{0,j}^{-1}(m \cos w, m \cosh \chi_p) \phi_{j,l}(\chi_p)$, для функций $F_{j,l}(\chi_p)$ получим уравнения, аналогичные уравнению Шредингера (с нулевой энергией)

$$F_{j,l}''(\chi) - \lambda m^2 G_{0,j}(m \cos w, m \cosh \chi) F_{j,l}(\chi) - \frac{l(l+1)}{\sinh^2 \chi} F_{j,l}(\chi) = 0. \quad (11)$$

Граничные условия для функции $F_{j,l}(\chi_p)$ также можно получить из (9), они имеют вид

$$F_{j,l}(0) = 0; \quad F_{j,l}'(\infty) = 0. \quad (12)$$

Исследуем задачу Штурма-Лиувилля (11), (12). При $w = \pi/2$ имеем $E = 0$, тогда дифференциальные уравнения (11) при $j=1$ и $j=2$ примут вид

$$F_{1,2;l}''(\chi) + \lambda \cosh^{-2} \chi F_{1,2;l}(\chi) - l(l+1) \sinh^{-2} \chi F_{1,2;l}(\chi) = 0. \quad (13)$$

Решение уравнения (13), с учетом граничного условия (12) в точке $\chi = 0$, дает функцию $F_{1,2;l}(\chi)$ в виде гипергеометрического ряда

$$F_{1,2;l}(\chi) = A_{l,s} \tanh^{l+1} \chi {}_2F_1\left(\frac{1}{2} + \frac{l}{2} - \frac{s}{2}; 1 + \frac{l}{2} + \frac{s}{2}; \frac{3}{2} + l; \tanh^2 \chi\right), \quad (14)$$

где введено обозначение $\lambda = s(s+1)$. Заметим, что при $l=0$

$$F_{1,2;l}(\chi) = P_s(\tanh \chi), \quad \text{где } s = (\sqrt{1+4\lambda} - 1)/2. \quad (15)$$

Из граничных условий на бесконечности получаем

$$s = 2n + l + 1, \quad \lambda = (2n + l + 1)(2n + l + 2), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (16)$$

Таким образом, (14) и (16) есть аналитические решения задачи (11), (12) когда масса связанного состояния $2E$ стремится к нулю.

При других значениях массы связанного состояния найдём решения задачи (11), (12) численно. Значения константы связи λ получим, рассматривая уравнения (9) используя обозначения для $F_{j,l}(\chi_p)$ и $f^{-1} = \lambda$. Тогда f есть собственные значения (СЗ) интегрального оператора.

Зафиксируем верхний предел интегрирования и разобьем область интегрирования на элементарные отрезки $[\chi^{i-1}; \chi^i = ih]$. Заменяя затем интегралы составной квадратурной формулой трапеций и введя обозначения

$$\begin{aligned} \chi_p^i &= ih; \quad \chi_k^q = qh; & F_{j,l}^i &= F_{j,l}(\chi_p^i); \quad F_{j,l}^q = F_{j,l}(\chi_k^q); \\ T_l^{i,q} &= P_l(\coth \chi_p^i) Q_l(\coth \chi_k^q); \quad B_l^{i,q} = P_l(\coth \chi_k^q) Q_l(\coth \chi_p^i); \\ K_j^q(m \cos w) &= G_{0,j}(m \cos w, m \cosh \chi_k^q), \end{aligned}$$

получим матричную задачу на собственные значения

$$M F_{j,l} = f F_{j,l} \quad \text{или} \quad M_{i,q} F_{j,l}^q = f F_{j,l}^i, \quad (17)$$

где

$$M_{i,q} = \begin{cases} m^2 h T_l^{i,q} K_j^q(m \cos w), & \text{если } q \geq i; \\ m^2 h B_l^{i,q} K_j^q(m \cos w), & \text{если } q < i. \end{cases} \quad (18)$$

Задача на СЗ (17), (18) была решена нами с помощью системы компьютерной алгебры Mathematica [6]. Полученные значения константы связи λ можно затем уточнить, используя экстраполяцию по Ричардсону [7].

Зная СЗ, найдем собственные функции (СФ) дифференциальных уравнений (11) при помощи пакета Mathematica.

Следует отметить, что значения константы λ при $j=3$ и $j=4$ также, как и для $j=1$ и $j=2$, совпадают при $w = \pi/2$. При этом значения λ для $j=1$ и $j=2$, полученные численно, совпадают с точными значениями (16).

На рисунке 1–3 приведена зависимость константы связи λ от параметра $w \in (0; \pi/2]$ при $l=0, 1, 2, 3$ и $j=1, 2, 3, 4$, а также зависимость (СФ) $F(\chi_p)$ и $\psi(p)$ в случае $l=1,2$ и $j=1$ (основное состояние).

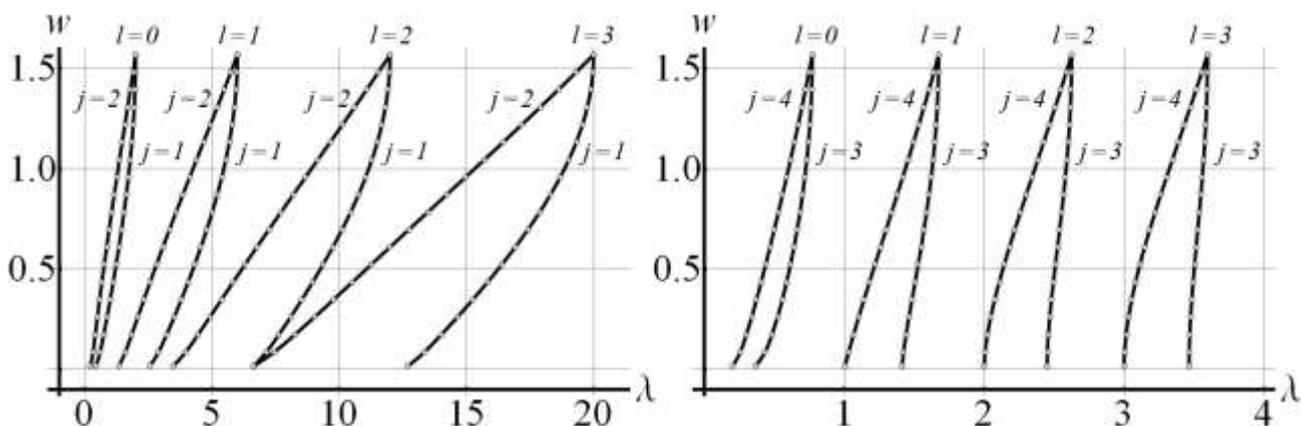


Рисунок 1 – Зависимость константы связи λ от параметра w .

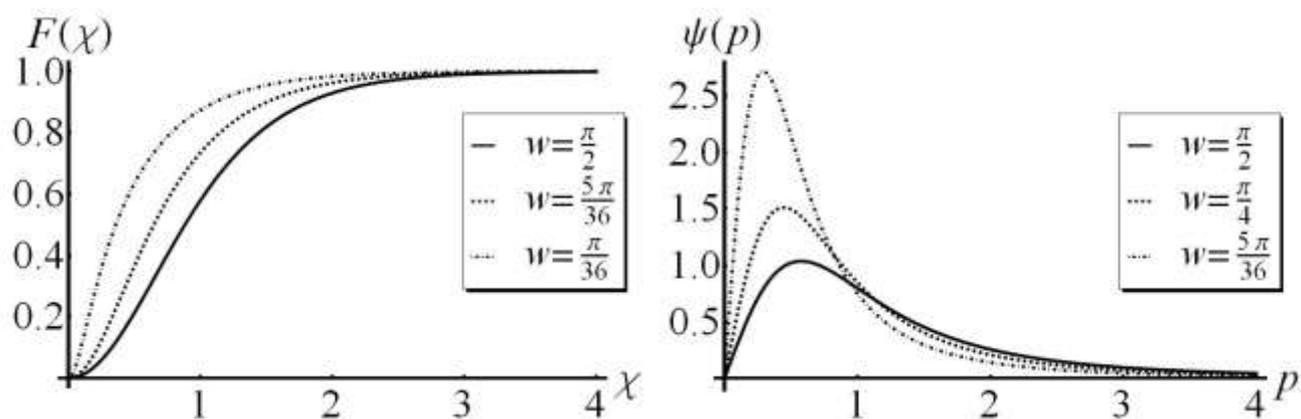


Рисунок 2 – Зависимость СФ дифференциальных уравнений F от быстроты χ и волновых функций ψ от импульса p в случае $l=1$

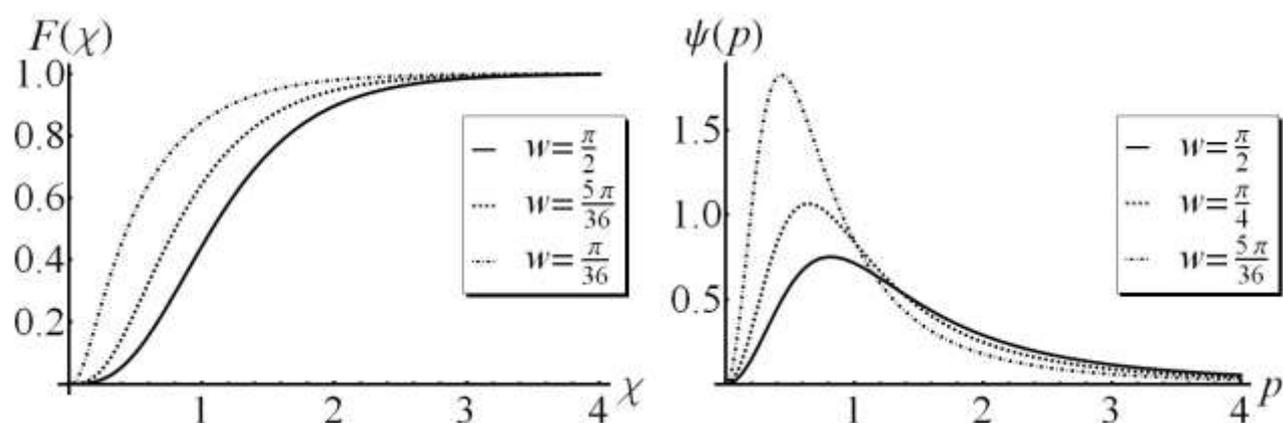


Рисунок 3 – Зависимость СФ дифференциальных уравнений F от быстроты χ и волновых функций ψ от импульса p в случае $l=2$

Значения константы связи λ полученные численно имеют до семи верных значащих чисел после запятой. Максимальная абсолютная погрешность численного решения дифференциальных уравнений при $j=1,2$ и $w = \pi/2$, для которых есть аналитическое решение, имеет порядок 10^{-13} .

В данной работе интегральные уравнения сведены к дифференциальным уравнениям в пространстве быстрот. Найдены аналитические решения в пределе сильной связи, получены численные решения квазипотенциальных уравнений в случае ненулевых масс связанного состояния.

Литература

1. Ициксон, К. Квантовая теория поля, Т.1, 2. / К. Ициксон, Ж.-Б. Зюбер // М.: Мир, 1984.
2. Logunov, A. A. Quasi-optical approach in quantum field theory / A. A. Logunov, A. N. Tavkhelidze // NuovoCimento. – 1963. – Vol. 29. – P. 380–399.

3. Kadyshevsky, V. G. Quasipotential type equation for the relativistic scattering amplitude / V. G. Kadyshevsky // Nucl. Phys. – 1968. – Vol. B6, N1. – P. 125–148.

4. Саврин, В. И. Метод квазипотенциала в теории связанных состояний / В. И. Саврин // Самара: Издательство "Самарский университет" – 2006. – 135 с.

5. Капшай, В. Н. Об одном классе точных решений квазипотенциальных уравнений / В. Н. Капшай, С. П. Кулешов, Н.Б. Скачков // ТМФ – 1983. – 55:3. – С. 349–360.

6. Дьяконов, В. П. Mathematica 5/6/7. Полное руководство / В. П. Дьяконов // М.: "ДМК Пресс" – 2009. – 624 с.

7. Сальвадори, М. Дж. Численные методы в технике / М. Дж. Сальвадори // М.: ИЛ – 1955. – 247 с.

**Е.С. Чеботарева, (ГОУ ВПО Брянский государственный университет им. акад. И.Г. Петровского, филиал в г. Новозыбкове)
Науч. рук. В.В. Андреев, к.ф.-м.н., доцент**

МЕТОДИКА ПОЛУЧЕНИЯ КРИТИЧЕСКИХ ЗНАЧЕНИЙ БЕССПИНОВОГО УРАВНЕНИЯ СОЛПИТЕРА С КУЛОНОВСКИМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Введение. Одной из основных задач релятивистской квантовой механики является решение уравнения Солпитера

$$H\Phi_n = \left[\sqrt{k^2 + m_1^2} + \sqrt{k^2 + m_2^2} + V(|\mathbf{r}|) \right] \Phi_n = E_n \Phi_n, \quad (1)$$

которое описывает систему двух частиц с полной энергией E_n , взаимодействие которых определяется центрально симметричным потенциалом $V(|\mathbf{r}|)$.

Наиболее распространенным методом решения уравнения (1) является вариационный метод. В этом подходе решение уравнения (1) сводится к задаче на собственные значения

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \langle \Psi_k | \hat{H} | \Psi_{k'} \rangle \equiv \langle H \rangle_{k,k'} = E a_{k'} \quad (2)$$

с использованием разложения исходной волновой функции (ВФ) Φ по некоторому полному набору состояний “пробных” ВФ Ψ

$$\Phi = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \Psi_k. \quad (3)$$