

В предлагаемой методике сразу система уравнение (9) сразу дает уравнение для оценки α_{crit} .

Литература

1. Herbst, I. Spectral Theory of the Operator $p^{*2} m^{*1/2} - Z e^{*2} r$ / I. Herbst // Commun.Math.Phys. – 1977. – Vol. 53. – P. 285–294.
2. Lucha, W. Relativistic Coulomb problem: Energy levels at the critical coupling constant analytically / W. Lucha, F. F. Schoberl // Phys.Lett. – 1996. – Vol. B387. – P. 573–576.
3. Градштейн, И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. – 4-е переработанное. – Москва: Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1963. – 1110.
4. Direct experimental test of scalar confinement / T. J. Allen [et al.] // Phys. Rev. – 2004. – Vol. D70. – P. 054012.
5. Fulcher, L. P. Energies of quark - anti-quark systems, the Cornell potential, and the spinless Salpeter equation / L. P. Fulcher, Z. Chen, K. C. Yeong // Phys. Rev. – 1993. – Vol. D47. – P. 4122–4132.
6. Martin, Andre and Roy, S.M. Semirelativistic stability and critical mass of a system of spinless bosons in gravitational interaction / A. Martin, S. M. Roy // Phys.Lett. – 1989. – Vol. B233. – P. 407–412.

А.А. Шамына (УО «ГГУ им. Ф. Скорины», Гомель)

Науч. рук. **В.Н. Капшай**, к.ф.-м.н., доцент

ЗАДАЧА О ПРОХОЖДЕНИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ ЧЕРЕЗ ПЕРИОДИЧЕСКУЮ СИСТЕМУ БИИЗОТРОПНЫХ СЛОЁВ В СЛУЧАЕ НОРМАЛЬНОГО ПАДЕНИЯ

В настоящее время повышенный интерес проявляется к электродинамике биизотропных сред. Биизотропная среда – это обобщённый случай киральной среды. Отличие состоит в проявлении свойства невзаимности в биизотропных средах. Свойства таких сред можно описать материальными уравнениями (1):

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} + (\chi + i\alpha) \vec{H}; \quad \vec{B} = (\chi - i\alpha) \vec{E} + \mu \vec{H}. \quad (1)$$

Здесь \vec{D}, \vec{B} – вектора электрической и магнитной индукции; \vec{E}, \vec{H} – вектора электрической и магнитной напряжённости; ε, μ – диэлектрическая и магнитная проницаемости среды; α, χ – параметры киральности и невзаимности соответственно.

В данной работе матричным методом решена задача о прохождении плоской электромагнитной волны через систему биизотропных пластинок, имеющую периодическую структуру, в биизотропной среде в случае нормального падения.

Направим ось Oz вверх, ось Oy вправо как показано на рисунке 1. Толщина p -го слоя имеет значение d_p . Пусть область $z \leq 0$ заполнена биизотропной средой 1 с параметрами $\varepsilon_1, \mu_1, \alpha_1, \chi_1$, область $\sum_{i=2}^{p-1} d_i < z \leq \sum_{i=2}^p d_i$, где $3 \leq p \leq N-1$ (N – количество сред), заполнена биизотропной средой p с параметрами $\varepsilon_p, \mu_p, \alpha_p, \chi_p$, область $\sum_{i=2}^{N-1} d_i < z$ заполнена биизотропной средой N с параметрами $\varepsilon_N, \mu_N, \alpha_N, \chi_N$.

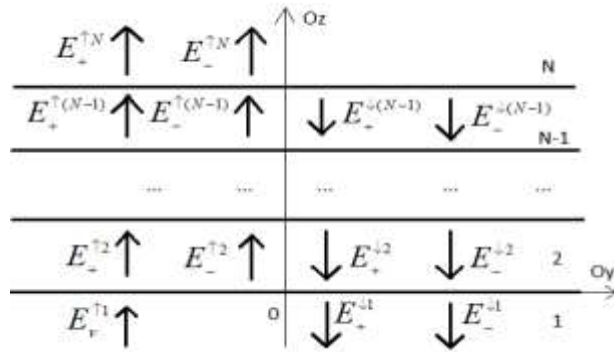


Рисунок 1 – Схема прохождения волны через слоистую среду

Падающую электромагнитную волну можно записать в следующем виде:

$$\vec{E}_v^{\uparrow 1} = (\vec{i} + i\nu\vec{j})E_v^{\uparrow 1} \exp(ik_v^1 z - i\omega t); \quad \vec{H}_v^{\uparrow 1} = -b_v^1 \vec{E}_v^{\uparrow 1}. \quad (2)$$

Волны, распространяющиеся в p -й среде, описываются следующими уравнениями:

$$\vec{E}_v^{\downarrow p} = (\vec{i} + i\nu\vec{j})E_v^{\downarrow p} \exp(ik_v^p z - i\omega t); \quad \vec{H}_v^{\downarrow p} = -b_v^p \vec{E}_v^{\downarrow p}; \quad (3)$$

$$\vec{E}_v^{\uparrow p} = (\vec{i} + i\nu\vec{j})E_v^{\uparrow p} \exp(ik_v^p z - i\omega t); \quad \vec{H}_v^{\uparrow p} = -b_v^p \vec{E}_v^{\uparrow p}. \quad (4)$$

Здесь

$$b_v^p = (\chi_p + i\nu\sqrt{\varepsilon_p\mu_p - \chi_p^2})/\mu_p; \quad k_v^p = \frac{2\pi}{\lambda}(\sqrt{\varepsilon_p\mu_p - \chi_p^2} + \nu\alpha_p), \quad (5)$$

соответственно коэффициенты пропорциональности между напряжённостью электрического и магнитного поля и волновые числа; ω – циклическая частота; ν – поляризация волны (+1 – правая, -1 – левая); \vec{i}, \vec{j} – единичные вектора, направленные вдоль осей Ox, Oy соответственно.

Решим задачу матричным методом. Составим систему уравнений при $z = 0$, основанную на граничных условиях. Запишем её в матричном виде:

$$M_2 E_2 = M_1 E_1. \quad (6)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$M_p = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -b_+^p & -b_-^p & -b_+^p & -b_-^p \\ b_+^p & -b_-^p & -b_+^p & b_-^p \end{pmatrix}; E_p = \begin{pmatrix} E_+^{\downarrow p} \\ E_-^{\downarrow p} \\ E_+^{\uparrow p} \\ E_-^{\uparrow p} \end{pmatrix}; E_1 = \begin{pmatrix} E_+^{\downarrow 1} \\ E_-^{\downarrow 1} \\ \frac{\nu+1}{2} E_+^{\uparrow 1} \\ \frac{\nu-1}{2} E_-^{\uparrow 1} \end{pmatrix}, \quad (7)$$

особый вид для E_1 необходим для того, чтобы падающая волна была одной поляризации. Граничные условия можно записать и при $z = d_2$. Однако, следует учесть, что при переходе через толщину слоя фаза волны меняется. Это можно учесть с помощью дополнительного множителя:

$$\Phi_p = \begin{pmatrix} \exp(-ik_+^p d_p) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \exp(-ik_-^p d_p) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \exp(ik_+^p d_p) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \exp(ik_-^p d_p) \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Тогда уравнения на границе раздела $z = d_2$ будут следующими:

$$M_3 E_3 = M_2 \Phi_2 E_2. \quad (9)$$

Аналогичные уравнения можно записать в общем виде для границы раздела p -й и $(p+1)$ -й сред:

$$M_{p+1} E_{p+1} = M_p \Phi_p E_p, \quad p = 1, 2, \dots, N-1. \quad (10)$$

Последовательно выражая E_p через E_{p+1} и производя необходимые подстановки, найдём выражение E_1 через E_N :

$$E_1 = (M_1^{-1} M_2) \cdot (\Phi_2^{-1} M_2^{-1} M_3) \cdot (\Phi_3^{-1} M_3^{-1} M_4) \cdot \dots \cdot (\Phi_{N-1}^{-1} M_{N-1}^{-1} M_N) E_N = \Lambda E_N. \quad (11)$$

Здесь Λ – некоторая матрица 4×4 , состоящая из элементов Λ_{ij} . Тогда уравнение (11) запишется как:

$$\begin{pmatrix} E_+^{\downarrow 1} \\ E_-^{\downarrow 1} \\ \frac{\nu+1}{2} E_+^{\uparrow 1} \\ \frac{\nu-1}{2} E_-^{\uparrow 1} \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} E_+^{\downarrow N} \\ E_-^{\downarrow N} \\ E_+^{\uparrow N} \\ E_-^{\uparrow N} \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Поскольку в последней среде составляющих, распространяющихся вдоль оси Oz нету, то: $E_+^{\downarrow N} = 0$; $E_-^{\downarrow N} = 0$. Перенеся $E_+^{\downarrow 1}$ и $E_-^{\downarrow 1}$ в правую сторону и приняв амплитуды падающей волны равными единице $E_+^{\uparrow 1} = 1$, $E_-^{\uparrow 1} = 1$, получим матричное уравнение для коэффициентов прохождения и отражения:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\nu+1}{2} \\ \frac{\nu-1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \Lambda_{13} & \Lambda_{14} \\ 0 & 1 & \Lambda_{23} & \Lambda_{24} \\ 0 & 0 & \Lambda_{33} & \Lambda_{34} \\ 0 & 0 & \Lambda_{43} & \Lambda_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_+ \\ R_- \\ T_+ \\ T_- \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Решая уравнение (13) методом Крамера, можно получить выражения для каждого из коэффициентов прохождения. Коэффициенты прохождения и отражения по энергии можно рассчитать, вычислив вектора Умова-Пойнтига. В статье [1] было доказано, что при прохождении через границу раздела вакуума и биизотропной среды коэффициенты прохождения и отражения не зависят от падающей поляризации. Также было доказано, что сквозь границу раздела проходит волна той же поляризации, что и падающая, а отражается волна противоположной поляризации. Несложно доказать, что аналогичные утверждения верны и для данной задачи. Приведём выражения для коэффициентов прохождения по энергии через амплитудные коэффициенты:

$$T = \left| \vec{S}^{\uparrow N} \right| / \left| \vec{S}^{\uparrow 1} \right| = |T_\nu|^2 \left| \text{Im}(b_\nu^N) \right| / \left| \text{Im}(b_\nu^1) \right|; \quad R = \left| \vec{S}^{\downarrow 1} \right| / \left| \vec{S}^{\uparrow 1} \right| = |R_{-\nu}|^2 \left| \text{Im}(b_{-\nu}^1) \right| / \left| \text{Im}(b_\nu^1) \right|. \quad (14)$$

Пусть пространство $0 \leq z < \sum_{i=2}^{N-1} d_i$ имеет периодическую структуру: слои биизотропной среды 2 расположены в биизотропной среде 1 на одном и том же расстоянии друг от друга d_1 и имеют одинаковую толщину d_2 . Так как коэффициент отражения является дополнением коэффициента прохождения до единицы, то достаточно исследовать только зависимость коэффициента прохождения от расстояния между слоями. На рисунке 2 представлены графики зависимостей для следующих параметров сред:

$$\varepsilon_1 = 1.3, \mu_1 = 1.2, \chi_1 = 0.2, \alpha_1 = 0.1; \quad \varepsilon_2 = 3.2, \mu_2 = 1.3, \chi_2 = 0.4, \alpha_2 = 0.4, d_2 = 1.2.$$

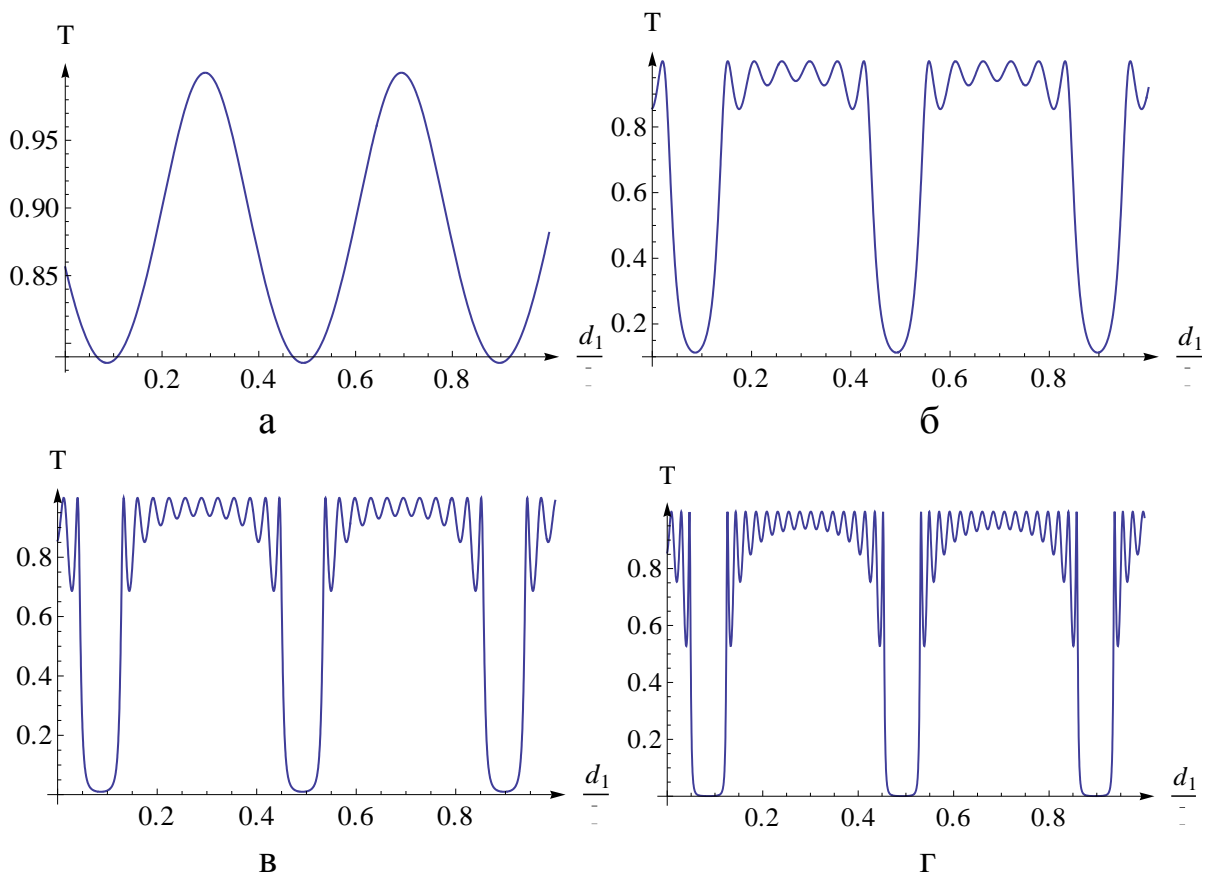


Рисунок 2 – Зависимость коэффициента прохождения от расстояния между пластинками. Количество пластинок: а – 2; б – 7; в – 12; г – 17

Как можно видеть график представляет собой последовательность разрешённых зон, в которых коэффициент прохождения близок к 1, а между зонами коэффициент прохождения близок к 0. Причём с увеличением количества пластинок «провалы» становятся более узкими и их дно всё ближе к 0. Структура верхней части разрешённых зон представляет собой симметричную последовательность максимумов и минимумов. Количество максимумов на 1 меньше количества пластинок, а значение коэффициента прохождения в максимумах равно единице, т.е. наблюдается полное прохождение. Такое поведение означает, что периодическая система, состоящая из большого количества пластинок, будет отражать только излучение определённых длин волн или незначительно от них отличающееся.

Литература

1. Капшай, В. Н., Кондратюк В. В. Отражение и преломление плоских электромагнитных волн на границе раздела с биизотропной средой / В. Н. Капшай, В. В. Кондратюк / Известия ГГУ им. Ф. Скорины, №4(55).– 2009. – Ч. 2.– С. 113–122.

2. Капшай, В. Н., Прохождение плоских электромагнитных волн через биизотропный слой в биизотропной среде / В. Н. Капшай, А. А. Шамына, А. Н. Годлевская // Известия ГГУ им. Ф. Скорины. – 2011. – № 6 (69). – С. 80–87.

Е.П. Шельманова (УО «ГГТУ им. П.О. Сухого», Гомель)

Науч. рук. **В.Б. Попов**, к.т.н., доцент

МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ РАСТИТЕЛЬНОГО МАТЕРИАЛА, ИЗМЕЛЬЧАЕМОГО НОЖАМИ КОРМОУБОРОЧНОГО КОМБАЙНА

Резание растительного материала (РМ) представляет собой процесс, при котором воздействие кромок и фасок лезвия ножа на РМ сопровождается его переходом за предел упругих деформаций. Поэтому следует учитывать такие свойства РМ, как упругость, вязкость и пластичность. Упругость – свойство РМ восстанавливать свою форму и размеры после прекращения действия внешней нагрузки, под влиянием которой они были изменены. Поэтому, обрабатываемые лезвием ножа РМ не могут рассматриваться как только упругие. Присутствие таких явлений, как релаксация – падение напряжения при неизменной деформации и ползучесть – рост деформаций при постоянных нагрузках, позволяет отнести РМ к упруговязким или вязкопластическим. Для таких РМ характерна зависимость деформации не только от ее размеров, но также и от скорости, с которой она развивается.

Модель упруговязкого тела может быть представлена как твердый скелет и полужидкое или жидкое вещество, которое заполняет промежутки между твердыми элементами. Большинство из РМ представляет собой ткани, образованные волокнистой системой, в полостях которой содержатся жидкость и газы. При деформации волокна РМ давят на жидкую или газообразную среду, окружающую их, заставляя ее перемещаться в менее напряженные зоны. По законам гидродинамики сопротивление среды при таком перемещении зависит от скорости ее перемещения. Данная модель объясняет причины, по которым в упруговязких телах деформация является функцией нагрузки и времени ее действия. В реологических схемах, характеризующих свойства материала, принято упругость изображать в виде пружины, деформирование которой подчиняется закону Гука, а вязкость – в виде цилиндра с жидкостью, в котором перемещение поршня подчинено закону Ньютона. Последовательное и параллельное соединения этих базовых элементов позволяют моделировать