В. Н. Княгина, В. С. Монахов, Конечные группы со слабо субнормальными подгруппами Шмидта, *Тр. Ин-та матем.*, 2023, том 31, номер 1, 50–57

Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики. 2023. Том 31. № 1. С. 50–57

УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ СО СЛАБО СУБНОРМАЛЬНЫМИ ПОДГРУППАМИ ШМИДТА

В. Н. Княгина, В. С. Монахов

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины
e-mail: victor.monakhov@gmail.com, knyagina@inbox.ru
Поступила 05.04.2023

Конечная ненильпотентная группа, у которой все собственные подгруппы нильпотентны, называется группой Шмидта. Подгруппа H группы G называется *слабо субнормальной* в G, если H порождается двумя подгруппами, одна из которых субнормальна в G, а другая полунормальна в G. Устанавливается 3-разрешимость конечной группы со слабо субнормальными $\{2, 3\}$-подгруппами Шмидта. Отсюда выводится разрешимость конечной группы со слабо субнормальными $\{2,3\}$-подгруппами Шмидта и 5-замкнутыми $\{2,5\}$-подгруппами Шмидта. Доказывается нильпотентность коммутанта конечной группы, в которой все подгруппы Шмидта слабо субнормальны.

Введение. Рассматриваются только конечные группы. Группой Шмидта называют конечную ненильпотентную группу, все собственные подгруппы которой нильпотентны. Группам Шмидта посвящены отдельные параграфы монографий Хупперта [1] и Л. А. Шеметкова [2]. Подробный обзор результатов о свойствах групп Шмидта, существовании подгрупп Шмидта в конечных группах и их приложениях в теории классов конечных групп содержится в [3].

Группы с субнормальными $\{p,q\}$-подгруппами Шмидта, p и q – различные фиксированные простые числа, исследовались в [4]. В частности, для группы G, в которой субнормальны все pd-подгруппы Шмидта, установлена p-разложимость фактор-группы $G/F(G)$, а в случае, когда субнормальны все подгруппы Шмидта – $G/F(G)$ абелева [4]. В. А. Ведерников [5] для группы G, в которой все подгруппы Шмидта субнормальны, доказал, что $G/H(G)$ является прямым произведением групп Фробениуса конкретных типов, откуда вытекает цикличность $G/F(G)$. Здесь $F(G)$ и $H(G)$ – подгруппа Фиттинга и гиперцентр группы G соответственно. Эти результаты для σ-субнормальных и $\mathrm{K}\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп Шмидта развивались в работах [6–9].

Подгруппа A называется *полунормальной* в группе G, если существует подгруппа B такая, что $G = AB$ и AX – подгруппа для каждой подгруппы X из B. Это понятие впервые введено в [10]. Группы с некоторыми (силовскими, холловыми, подгруппами простых порядков и др.) полунормальными подгруппами исследовались в работах [11–15].

Группы с полунормальными подгруппами Шмидта изучены в [16]. Группы, в которых каждая подгруппа Шмидта полунормальна или субнормальна, исследовались в [17, 18]. В частности, в [18] установлено, что такая группа имеет нильпотентный коммутант.

А. Н. Скиба [19] предложил понятие слабо субнормальной подгруппы: подгруппа H называется *слабо субнормальной* в группе G, если $H = \langle A, B\rangle$ для некоторой субнормальной подгруппы A и полунормальной подгруппы B из G. Ясно, что все субнормальные и все полунормальные подгруппы слабо субнормальны. Обратное не всегда выполняется. Кроме того, каждая слабо субнормальная подгруппа в простой группе полунормальна, а в нильпотентной группе – субнормальна.

Пример 1. В группе $G = A_4 \times D_{10}$, $A_4 = \langle a, b, c \rangle$, $|a| = 2$, $D_{10} = \langle k, h \rangle$, $|k| = 2$, подгруппа $H = \langle a \rangle \times \langle k \rangle$ является слабо субнормальной в G, но H не полунормальна и не субнормальна. Здесь A_4 – знакопеременная группа степени 4, а D_{10} – группа диэдра порядка 10.

Признаки разрешимости и сверхразрешимости факторизуемой группы со слабо субнормальными сомножителями получены в работах [19, 20].

Согласно [19] подгруппа H *частично субнормальна* в группе G, если $H = \langle A, B \rangle$ для некоторой субнормальной в G подгруппы A и $\mathfrak{U}$-нормальной в G подгруппы B. Напомним, что $\mathfrak{U}$*-нормальная подгруппа* – это подгруппа B из группы G такая, что каждый G-главный фактор между B_G и B^G циклический. В частности, модулярная подгруппа $\mathfrak{U}$-нормальна. В [19] приведены примеры групп, в которых некоторая частично субнормальная подгруппа не является слабо субнормальной подгруппой, а также примеры групп, в которых некоторая слабо субнормальная подгруппа не является частично субнормальной подгруппой.

Кроме факторизационных результатов в работе [19, теорема 1.9] доказывается нильпотентность коммутанта группы, в которой каждая подгруппа Шмидта частично субнормальна.

В настоящей статье исследуется строение группы G со слабо субнормальной подгруппой Шмидта H. Для случая, когда H^G простая, доказывается, что $H \cong A_4$ и $H^G \cong SL(2,4)$, теорема 1. Устанавливается 3-разрешимость группы со слабо субнормальными $\{2, 3\}$-подгруппами Шмидта, теорема 2. Доказывается нильпотентность коммутанта группы G, в которой все подгруппы Шмидта слабо субнормальны, теорема 3, и приведен пример, показывающий, что фактор-группа $G / F(G)$ может быть нециклической.

1. Вспомогательные утверждения. Запись $H \le G$ ($H < G$, $H \lhd G$, $H \lessdot G$) означает, что H – подгруппа группы G (соответственно, H – собственная подгруппа группы G, H – нормальная подгруппа в группе G, H – максимальная подгруппа в группе G). Запись $H = \langle A, B \rangle$ означает, что подгруппа H порождается подгруппами A и B, а $A \rtimes B$ – полупрямое произведение нормальной подгруппы A и подгруппы B. Если $H \le G$ и $X \subseteq G$, то $H^X = \langle H^x \mid x \in X \rangle$, в частности, $H^G = \langle H^g \mid g \in G \rangle$ – подгруппа, порожденная всеми сопряженными с H подгруппами из G, а $H_G = \cap_{g \in G} H^g$ – ядро подгруппы H в группе G.

Группу с нормальной силовской p-подгруппой называют p-замкнутой, а p-нильпотентной – группу порядка $p^a m$, p не делит m, с нормальной подгруппой порядка m. Если p и q – простые числа, то группа порядка $p^a q^b$, где a и b – неотрицательные целые числа, называется $\{p, q\}$-группой. Группа, порядок которой делится на простое число p называется pd-группой.

Через G', $Z(G)$, $F(G)$ и $\Phi(G)$ обозначаются коммутант, центр, подгруппы Фиттинга и Фраттини группы G соответственно; $\pi(G)$ – множество всех простых делителей порядка группы G. Если π – некоторое множество простых чисел, то $O_\pi(G)$ – наибольшая нормальная в G подгруппа, для которой $\pi(O_\pi(G)) \subseteq \pi$, а $O_{\pi'}(G)$ – наибольшая нормальная в G подгруппа, для которой $\pi(O_{\pi'}(G)) \cap \pi = \varnothing$.

Лемма 1. *Пусть H, K и N – подгруппы группы G, где H слабо субнормальна в G и N нормальна в G.*

(1) *HN / N слабо субнормальна в G / N.*

(2) *Если $H \le K$, то H слабо субнормальна в K.*

(3) *Если $N \le L \le G$ и L / N слабо субнормальна в G / N, то L слабо субнормальна в G.*

(4) *HN слабо субнормальна в G.*

(5) *Подгруппа $HO_{\pi(H)}(G)$ полунормальна в G.*

(6) *Если* X – *непустое подмножество в* G, *то* H^X *слабо субнормальна в* G.

Доказательство. Утверждения (1)–(3) доказаны в [19, лемма 2.1]. Утверждение (4) следует из (1) и (3).

(5) По определению слабо субнормальной подгруппы $H = \langle A, B \rangle$ для некоторой субнормальной в G подгруппы A и полунормальной подгруппы B из G. Так как $A \le O_{\pi(H)}(G)$, то $HO_{\pi(H)}(G) = \langle A, B \rangle O_{\pi(H)}(G) = BO_{\pi(H)}(G)$ полунормальна в G согласно [16, лемма 2 (2)].

(6) Подгруппа A^X субнормальна в G [20, 2.43], а подгруппа B^X полунормальна в G [16, лемма 5], поэтому $H^X = \langle A^X, B^X \rangle$ слабо субнормальна в G.

Лемма 2. *Пусть* H – *слабо субнормальная подгруппа группы* G.

(1) *Если* H 2*-нильпотентна, то* H^G *разрешима.*

(2) *Если* H *разрешима и* 3 *не делит порядок* H, *то* H^G *разрешима.*

(3) *Пусть* p – *наименьший простой делитель порядка группы* G. *Если* p *не делит порядок* H, *то* p *не делит порядок* H^G.

Доказательство. Утверждения (1) и (3) доказаны в [21, лемма 3.4 (1), (2)].

(2) Так как H слабо субнормальна в G, то по определению $H = \langle A, B \rangle$ для некоторой субнормальной в G подгруппы A и полунормальной подгруппы B из G. Поскольку

$$H = \langle A, B \rangle \le \langle A^G, B^G \rangle = A^G B^G \lhd G,$$

то $H^G \le A^G B^G$. Так как $A^G \le H^G$ и $B^G \le H^G$, то $H^G = A^G B^G$. По условию 3 не делит порядок A, A разрешима и субнормальна, поэтому 3 не делит порядок A^G и A^G разрешима [20, теорема 5.31]. Согласно [16, лемма 10 (2)] подгруппа B^G разрешима. Значит, $H^G = A^G B^G$ разрешима. Лемма доказана.

Замечание 1. Из лемм 1 и 2 следует, что некоторые результаты о группах с полунормальными подгруппами справедливы для группы со слабо субнормальными подгруппами. В частности, справедливы следующие утверждения, которые для полунормальных подгрупп получены в [14].

Предложение 1. *Пусть в группе* G *существует слабо субнормальная* π*-холлова подгруппа* H. *Тогда* G π*-разрешима в каждом из следующих случаев:*

(1) H *2-нильпотентна,*

(2) H *разрешима и* $3 \not\in \pi$.

Предложение 2. *Пусть* G – π*-разрешимая группа со слабо субнормальной* π*-холловой подгруппой* H. *Тогда:*

(1) $H' \le O_\pi(G)$,

(2) $l_\pi(G) \le 2$, $l_{\pi'}(G) \le 2$,

(3) $l_\pi^n(G) \le 1 + n(H)$, $l_\pi^a(G) \le 1 + d(H)$,

(4) *если* $G_{\pi'}$ q*-сверхразрешима для некоторого* $q \in \pi'$, *то группа* G q*-сверхразрешима.*

Предложение 3. (1) *Если в группе* G *каждая силовская подгруппа слабо субнормальна, то* G *сверхразрешима.*

(2) *Если в группе* G *каждая нециклическая силовская подгруппа слабо субнормальна, то третий коммутант группы* G *нильпотентен.*

Доказательство. Из леммы 1 (5) следует, что слабо субнормальная холлова подгруппа является полунормальной подгруппой. Поэтому применимы результаты работы [14], из которой получаем все три предложения.

Пример 2. В группе $G \cong GL_2(3)$ порядка 48 силовская 2-подгруппа полунормальна, а силовская 3-подгруппа имеет порядок 3. Поэтому эта группа удовлетворяет условию предложения 1. Так как

$$G^{'} \cong SL_2(3),\ (G^{'})^{'} \cong A_4,\ ((G^{'})^{'})^{'} \cong E_4,\ [22, \text{SmallGroup}(48, 29)],$$

то второй коммутант в предложении 3 (2) может быть ненильпотентным.

Лемма 3 ([1–3]). *Пусть S – группа Шмидта. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) $S = P \rtimes Q$, *где P – нормальная силовская p-подгруппа, $Q = \langle y \rangle$ – циклическая ненормальная силовская q-подгруппа, $y^q \in Z(S)$, p и q – различные простые числа;*

(2) *если P абелева, то P – элементарная абелева порядка p^m, где m – показатель числа p по модулю q*;

(3) *если P неабелева, то $Z(P) = P^{'} = \Phi(P)$ и $|P / Z(P)| = p^m$*;

(4) *S имеет точно два класса сопряженных максимальных подгрупп: $\{\Phi(P) \times \langle x^{-1}yx \rangle \mid x \in P \setminus \Phi(P)\}$ и $P \times \langle y^q \rangle \lhd G$.*

В дальнейшем $S_{<p,q>}$-группой будем называть группу Шмидта с нормальной силовской p-подгруппой и ненормальной циклической силовской q-подгруппой. Для $S_{<p,q>}$-группы S будем использовать запись $S = P \rtimes Q$, где P – нормальная силовская p-подгруппа, а Q – циклическая ненормальная силовская q-подгруппа.

Лемма 4. *Пусть в группе G все $S_{<p,q>}$-подгруппы слабо субнормальны.*

(1) *Если $H \le G$, то в H все $S_{<p,q>}$-подгруппы слабо субнормальны.*

(2) *Если $N \lhd G$, то в G / N все $S_{<p,q>}$-подгруппы слабо субнормальны.*

Доказательство. Утверждение (1) следует из леммы 1 (2).

(2) Пусть S / N – $S_{<p,q>}$-подгруппа группы G / N, а L – минимальная подгруппа из S такая, что $S = LN$. Согласно [4, лемма 2 (3)] подгруппа L содержит $S_{<p,q>}$-подгруппу A такую, что $L = A^L$. По условию подгруппа A слабо субнормальна в G, а по лемме 1 (6) подгруппа L слабо субнормальна в G. Теперь по лемме 1 (1) подгруппа $LN / N = S / N$ слабо субнормальна в G / N.

2. Группы со слабо субнормальной подгруппой Шмидта.

Теорема 1. *Пусть H – слабо субнормальная подгруппа Шмидта группы G.*

(1) *Если подгруппа H^G неразрешима, то $H / Z(H) \cong A_4$.*

(2) *Если подгруппа H^G простая, то $H \cong A_4$ и $H^G \cong SL(2, 4)$.*

Доказательство. (1) Если порядок H нечетен, то H^G имеет нечетный порядок по лемме 2 (3). По теореме Томпсона–Фейта H^G разрешима. Если H 2-нильпотентна, то H^G разрешима по лемме 2 (1). Если 3 не делит порядок H, то H^G разрешима по лемме 2 (2). Итак, H^G может быть неразрешимой только в случае, когда H – 2-замкнутая $\{2, 3\}$-подгруппа. Из леммы 3 (2)–(3) получаем, что $H / Z(H) \cong A_4$.

(2) Пусть H^G – простая группа. По условию $H = \langle A, B \rangle$ для некоторой субнормальной в G подгруппы A и полунормальной в G подгруппы B. По лемме 1 (2) подгруппа H слабо субнормальна в H^G, поэтому $A = 1$ и $H = B$ – полунормальная подгруппа в H^G. Значит, существует подгруппа $K \le H^G$ такая, что $H^G = HK$ и HX – собственная подгруппа в H^G для каждой собственной подгруппы X из K. Пусть K_1 – максимальная подгруппа в K. Предположим, что подгруппа $K_1 \ne 1$. Тогда $1 \ne K_1^G = H^G$ и K_1^g не содержится в H для некоторого $g \in H^G$. Поэтому HK_1^g – собственная подгруппа группы H^G. Согласно [16, лемма 2 (3)] подгруппа H перестановочна с K_1^x для каждого $x \in H^G$ и $H^{(H^G)} \ne H^G$ по [1, VI.4.10].

Получили противоречие с простотой группы H^G. Значит $|H^G : H| = |K|$ – простое число. Теперь $Z(H)=1$ по [1, V.7.2] и $H \cong A_4$. Применяя [23, теорема 2], получаем, что $H^G \cong SL(2,4)$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Если в группе G все $\{2,3\}$-подгруппы Шмидта слабо субнормальны, то группа G 3-разрешима.*

Доказательство. Воспользуемся индукцией по порядку группы. Пусть N – нормальная подгруппа группы G. По лемме 4 в подгруппе N и в фактор-группе G/N все $\{2, 3\}$-подгруппы Шмидта слабо субнормальны. Если $G \neq N \neq 1$, то по индукции подгруппа N и фактор-группа G/N 3-разрешимы. Отсюда следует, что группа G 3-разрешима. Поэтому необходимо считать, что группа G простая.

Предположим, что в группе G имеется $\{2,3\}$-подгруппа Шмидта A. По теореме 1 (2) фактор-подгруппа $A/Z(A) \cong A_4$ и группа $G = A^G \cong SL(2,4)$. Но в $SL(2,4)$ имеется подгруппа Шмидта $B \cong S_3$, которая по условию слабо субнормальна в G. По теореме 1 (1) подгруппа B^G разрешима, противоречие.

Таким образом, в группе G нет $\{2,3\}$-подгрупп Шмидта. Проверим, что в этом случае группа G является S_4-свободной, где S_4 – симметрическая группа степени 4. Допустим противное, т. е. предположим, что существуют подгруппы H и K такие, что K нормальна в H и $H/K \cong S_4$. Так как S_4 содержит подгруппу S_3, которая является $S_{<3,2>}$-подгруппой, то в H существует подгруппа T такая, что $K \leq T$ и $T/K \cong S_3$. Согласно [4, лемма 2 (3)] в подгруппе T имеется $S_{<3,2>}$-подгруппа, противоречие.

Следовательно, G будет S_4-свободной. Согласно [24, 4.174] либо силовская 2-подгруппа в G абелева, либо $G \in \{Sz(2^n),\ U(3,2^n)\}$, n – нечетное. Простые группы с абелевыми силовскими подгруппами известны [24, 4.126], в каждой из этих групп имеется неабелева подгруппа порядка 6, которая будет $S_{<3,2>}$-подгруппой. В группе $U(3,2^n)$, n – нечетное, также содержится $S_{<3,2>}$-подгруппа. Поэтому эти группы исключаются. Группа Сузуки $Sz(2^n)$ имеет порядок, не делящийся на 3, следовательно, группа G 3-разрешима.

Следствие 2.1. *Если в группе G слабо субнормальны все $\{2,3\}$-подгруппы Шмидта и все 5-замкнутые $\{2,5\}$-подгруппы Шмидта, то группа G разрешима.*

Доказательство. Воспользуемся индукцией по порядку группы. Пусть N – нормальная подгруппа. По лемме 4 в подгруппе N и в фактор-группе G/N все $\{2,3\}$-подгруппы Шмидта и все $S_{<5,2>}$-подгруппы слабо субнормальны. Если $N \neq 1$, то N и G/N разрешимы по индукции, значит, разрешима и группа G. Поэтому следует считать, что G – простая группа. Но по теореме 2 группа G 3-разрешима, следовательно, число 3 не делит порядок группы G и $G \cong Sz(2^n)$, n – нечетное по теореме Томпсона. Согласно [25, XI.3.6, XI.3.10] в группе G имеется $S_{<5,2>}$-подгруппа A. По теореме 1 (1) подгруппа A^G разрешима, противоречие. Следствие доказано.

Пример 3. (1) В $PSL(2,3^3)$ нет $S_{<5,2>}$-подгрупп и $S_{<3,2>}$-подгрупп [26], поэтому условие слабой субнормальности $S_{<2,3>}$-подгрупп в следствии 2.1 не является лишним.

(2) В $SL(2,8)$ нет $S_{<5,2>}$-подгрупп и $S_{<2,3>}$-подгрупп [26], поэтому группы со слабо субнормальными $S_{<5,2>}$-подгруппами и $S_{<2,3>}$-подгруппами могут быть неразрешимыми, а условие слабой субнормальности $S_{<3,2>}$-подгрупп в следствии 2.1 не является лишним.

(3) В $Sz(8)$ нет $\{2,3\}$-подгрупп Шмидта, поэтому группы со слабыми субнормальными $\{2,3\}$-подгруппами Шмидта могут быть неразрешимыми и условие слабой субнормальности 5-замкнутых $S_{<5,2>}$-подгрупп в следствии 2.1 не является лишним.

Теорема 3. *Если в группе G каждая подгруппа Шмидта слабо субнормальна, то G' нильпотентна.*

Доказательство. Группа G разрешима по следствию 2.1. Нильпотентность коммутанта G' равносильна тому, что $G \in NA.$ Воспользуемся индукцией по порядку группы и докажем, что $G \in NA.$ Согласно лемме 4 (1) в каждой подгруппе группы G все подгруппы Шмидта слабо субнормальны. По индукции все собственные подгруппы группы G имеют нильпотентный коммутант. Поэтому G – разрешимая минимальная не NA-группа и фактор-группа $G/F(G)$ будет минимальной неабелевой группой [27, лемма 3].

По лемме 3 (2) в каждой фактор-группе группы G все подгруппы Шмидта слабо субнормальны. По индукции, $G/N \in NA$ для всех неединичных нормальных подгрупп N группы G. Поскольку класс NA – насыщенная наследственная формация [2, с. 36], то группа G примитивна:

$$G = N \rtimes M,\ M \lessdot G,\ N = F(G) = O_p(G) = C_G(N),\ p \in \pi(G)$$

и $G/F(G) \cong M$ – неабелева группа, в которой все собственные подгруппы абелевы.

Если M – непримарная группа, то M является группой Шмидта, и по условию теоремы M слабо субнормальна в G. Так как $M_G = 1$ и каждая субнормальная в G подгруппа из M сдержится в M_G, то M полунормальна в G и $|G:M| = |N| = p$ – простое число по [10, лемма 7]. Теперь G сверхразрешима, а значит, $G \in NA.$

Пусть M – примарная q-группа. Тогда N – силовская p-подгруппа группы G и G – p-замкнутая $\{p,q\}$-группа. Поскольку M – неабелева q-группа, в которой все собственные подгруппы абелевы, то $|M'| = q$ [1, s. 286]. Ясно, что $NM' \le G'$ и $G/(NM')$ абелева, поэтому $N \rtimes M' = G'$. Если в группе G все подгруппы Шмидта субнормальны, то фактор-группа $G/F(G)$ абелева по [4, теорема (5)], а значит, $G \in NA$, противоречие. Поэтому в G существует несубнормальная подгруппа Шмидта $S = P \rtimes Q,\ Q = \langle y \rangle$. Если $P = N$, то S субнормальна в G, противоречие. Значит, P – собственная подгруппа в N. Поскольку M неабелева, а Q циклическая, то можно считать, что $Q < M$. Кроме того, поскольку P абелева, то Q максимальна в S в силу леммы 3 (4).

Предположим, что S полунормальна в G. Тогда существует подгруппа T такая, что $G = ST$ и $ST_1 < G$ для каждой подгруппы $T_1 < T$. Теперь $M = QT_q$ для некоторой силовской q-подгруппы T_q из T [1, IV.4.6]. Из полунормальности подгруппы S следует, что $ST_q = T_qS$. Так как группа G p-замкнута, то P нормальна в ST_q. Поскольку N абелева и $P < N$, то P нормальна в N. Теперь P нормальна в G, противоречие с тем, что $1 \ne P \ne N$, и N – минимальная нормальная в G подгруппа.

Следовательно, предположение неверно и подгруппа S не полунормальна в G. Но по условию S слабо субнормальна в G. Поэтому существуют подгруппы A и B такие, что $S = \langle A, B \rangle$, подгруппа A субнормальна в G, подгруппа B полунормальна в G, причем $1 \ne A < S$ и $1 \ne B < S$, в частности, A и B нильпотентны. Так как $A \le F(G) = N$, то A – p-подгруппа и $A \le P$. Если $|B|$ не делится на $|Q|$, то $B \le P \times \langle y^q \rangle$ по лемме 3 (4) и $S = \langle A, B \rangle \le P \times \langle y^q \rangle \ne S$, противоречие. Поэтому $|Q|$ делит $|B|$. Так как Q максимальна в S, то без ущерба для доказательства можно считать, что $Q = B$. Поскольку Q полунормальна в S, то $|S:Q| = |P| = p$ и q делит $p-1$.

Так как $C_G(N) = N$, то $G' = N \rtimes M'$ ненильпотентна и существует в G' подгруппа Шмидта $S_1 = P_1 \rtimes Q_1,\ \ P_1 \le N,\ \ Q_1 = M'$. Поскольку q делит $p-1$, то $|P_1| = p$. По теореме Машке

$N = P_1 \times \ldots \times P_n$, $n \geq 2$, и $P_i \rtimes Q_1$ – подгруппы Шмидта для каждого i ввиду того, что $N_G(Q_1) = N_G(M') = M$. Если $P_i \rtimes Q_1$ субнормальна в G для некоторого i, то для любого $j \neq i$ имеем:

$$P_i \rtimes Q_1 \cap P_j \rtimes Q_1 = Q_1 \lhd P_j \rtimes Q_1, P_j \rtimes Q_1 = P_j \times Q_1,$$

противоречие. Предположим, что $P_i \rtimes Q_1$ полунормальна в G для некоторого i. Тогда существует подгруппа V такая, что $G = (P_i \rtimes Q_1)V$, $(P_i \rtimes Q_1)V_1 < G$ для всех $V_1 < V$. Согласно [1, IV.4.6] $M = Q_1 V_q$ для некоторой силовской q-подгруппы V_q из V. Так как $Q_1 \leq \Phi(M)$, то $M = V_q$ и $V = G$. Но теперь $P_i \rtimes Q_1$ перестановочна с $(P_i \rtimes Q_1)^g$ для любого $g \in G$, поэтому $P_i \rtimes Q_1$ субнормальна в G, противоречие.

Следовательно, подгруппа $P_1 \rtimes Q_1$ не субнормальна и не полунормальна в G. Но по условию $P_1 \rtimes Q_1$ слабо субнормальна в G. Поэтому существуют подгруппы A_1 и B_1 такие, что $P_1 \rtimes Q_1 = \langle A_1, B_1 \rangle$, подгруппа A_1 субнормальна в G, подгруппа B_1 полунормальна в G, причем $1 \neq A_1 < S_1$ и $1 \neq B_1 < S_1$. Но в этом случае, $A_1 = P_1$ и $B_1 = Q_1$. Теперь существует подгруппа W такая, что $G = Q_1 W$ и $Q_1 W_1 < G$ для любой подгруппы $W_1 < W$. Согласно [1, IV.4.6] $M = Q_1 W_q$ для некоторой силовской q-подгруппы W_q из W. Так как $Q_1 \leq \Phi(M)$, то $M = W_q$ и $W = G$. Но теперь Q_1 перестановочна с $(Q_1)^g$ для любого $g \in G$, поэтому Q_1 субнормальна в G, противоречие. Теорема доказана.

Пример 4. Пусть D_n – диэдральная группа порядка n и

$$G = D_6 \times D_{10} = ([\langle x \rangle]\langle a \rangle) \times ([\langle y \rangle]\langle b \rangle), \quad |x| = 3, \quad |y| = 5, \quad |a| = |b| = 2.$$

Ясно, что $F(G) = \langle x \rangle \times \langle y \rangle$ и $G / F(G) \cong \langle a \rangle \times \langle b \rangle$ – нециклическая группа. В G каждая подгруппа Шмидта изоморфна D_6 или D_{10}. Согласно [21, SmallGroup(60, 8)] в группе G каждая подгруппа Шмидта полунормальна, а значит и слабо субнормальна. Поэтому в теореме 3 фактор-группа $G / F(G)$ может быть нециклической.

Работа выполнена в рамках ГПНИ «Конвергенция-2025», задание 1.1.02.

Литература

1. *Huppert B.* Endliche Gruppen I. Berlin, Heidelberg, New York, 1967.

2. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. Москва: Наука, 1978.

3. *Монахов В. С.* Подгруппы Шмидта, их существование и некоторые приложения // Тр. Укр. матем. конгресса 2001. Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. Секция 1. С. 81–90.

4. *Княгина В. Н., Монахов В. С.* О конечных группах с некоторыми субнормальными подгруппами Шмидта // Сиб. матем. журн. 2004. Т. 45, № 6. С. 1316–1322.

5. *Ведерников В. А.* Конечные группы с субнормальными подгруппами Шмидта // Алгебра и логика. 2007. Т. 44, № 6. С. 669–687.

6. *Al-Sharo Kh. A., Skiba A. N.* On finite groups with σ-subnormal Schmidt subgroups // Comm. Algebra. 2017. Vol. 4 (10). P. 4158–4165.

7. *Yi X., Kamornikov S. F.* Finite groups with σ-subnormal Schmidt subgroups // J. Algebra. 2020. Vol. 560. P. 181–191.

8. *Guo W., Safonova I. N., Skiba A. N.* On σ-subnormal subgroups of finite groups // Southeast Asian Bull. Math. 2021. Vol. 45. P. 813–824.

9. *Hu B., Huang J., Song D., Safonova I. N.* Finite groups with K-$\mathfrak{F}$-subnormal Schmidt subgroups // Comm. Algebra. 2021. Vol. 49 (10). P. 4513–4518.

10. *Su Xiongying.* On semi-normal subgroups of finite group // J. Math. (Wuhan). 1988. Vol. 8 (1). P. 7–9.

11. *Wang P.* Some sufficient conditions of a nilpotent Group // J. Algebra. 1992. Vol. 148. P. 289–295.

12. *Carocca A., Matos H.* Some solvability criteria for finite groups // Hokkaido Math. J. 1997. Vol. 26. P. 157–161.

13. *Подгорная В. В.* Полунормальные подгруппы и сверхразрешимость конечных групп // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2000. № 4. С. 22–25.

14. *Монахов В. С.* Конечные группы с полунормальной холловой подгруппой // Матем. заметки. 2006. Т. 80, № 4. С. 573–581.

15. *Guo Wen Bin.* Finite Groups with Seminormal Sylow Subgroups // Acta Math. Sinica. English Series. 2008. Vol. 24, N 10. P. 1751–1758.

16. *Княгина В. Н., Монахов В. С.* Конечные группы с полунормальными подгруппами Шмидта // Алгебра и логика. 2007. Т. 46, № 4. С. 448–458.

17. *Knyagina V. N., Monakhov V. S.* Finite groups with semi-subnormal Schmidt subgroups // Algebra Discrete Math. 2020. Vol. 29, N 1. P. 66–73.

18. *Княгина В. Н.* Нильпотентность коммутанта конечной группы с полусубнормальными подгруппами Шмидта // ПФМТ. 2022. № 3(52). С. 86–89.

19. *Хуан Ц., Ху Б., Скиба А. Н.* Конечные группы со слабо субнормальными и частично субнормальными подгруппами // Сиб. матем. журн. 2021. Т. 62, № 1. С. 210–220.

20. *Монахов В. С.* Введение в теорию конечных групп и их классов. Минск: Вышэйшая школа, 2006.

21. *Трофимук А. А.* О конечных группах, факторизуемых слабо субнормальными подгруппами // Сиб. матем. журн. 2021. Т. 62, № 6. С. 1401–1408.

22. A system for computational discrete algebra GAP 4.11.1 [Electronic resource]. Mode of access: http://www.gap-system.org. Date of access: 14.04.2022.

23. *Монахов В. С.* Произведение бипримарной и 2-разложимой групп // Матем. заметки. 1978. Т. 23, № 5. С. 641–649.

24. *Gorenstein D.* Finite simple groups: An introduction to their classification. New York: Plenum Publ. Corp., 1982.

25. *Huppert B., Blackburn N.* Finite Groups II. Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1982.

26. *Conway J. H., Curtis R. T., Norton S. P., Parker R. A., Wilson R. A.* Atlas of finite groups. London: Clarendon, 1985.

27. *Монахов В. С.* О группах с формационно субнормальными 2-максимальными подгруппами // Матем. заметки. 2019. Т. 105, № 2. С. 269–277.

V. N. Kniahina, V. S. Monakhov

Finite groups with weakly subnormal Schmidt subgroups

Summary

A non-nilpotent finite group whose all proper subgroups are nilpotent is called a Schmidt group. A subgroup H of a group G is called *weakly subnormal* in G if H is generated by two subgroups, one of which is subnormal in G and the other is seminormal in G. We establish 3-solvability of a finite group with weakly subnormal $\{2,3\}$-Schmidt subgroups. This implies solvability of a finite group with weakly subnormal $\{2,3\}$-Schmidt subgroups and 5-closed $\{2, 5\}$-Schmidt subgroups. We prove nilpotency of the derived subgroup of a finite group in which all Schmidt subgroups are weakly subnormal.