

П.В. Бычков

г. Гомель, УО «ГГУ им. Ф. Скорины»

С.Н. Дедкова

г. Гомель, СОШ № 52

НЕСТАНДАРТНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ: МЕТОД ПЕРЕБРОСКИ КОЭФФИЦИЕНТОВ И СПОСОБ ФЕРРАРИ

В настоящее время на занятиях по математике всё большее внимание уделяется изучению нестандартных методов решения уравнений и неравенств из различных разделов математики (алгебра, тригонометрия и геометрия). В известной степени это вызвано тем, что в последние годы имеет место устойчивая тенденция к усложнению заданий, предлагаемых на вступительных экзаменах по математике в ведущих высших учебных учреждениях Беларуси.

Цель работы – показать применение нестандартных методов: метод переброски коэффициентов, способ Феррари. Эти методы более рациональны, чем традиционные, и позволяют экономить время выполнения заданий, что очень важно, например, при централизованном тестировании. В работе показано применение данных методов для решения самых сложных заданий.

Метод переброски коэффициентов. В последнее время всё большую актуальность приобретают методы быстрых, не требующих значительных временных затрат, вычислений. Ученику старших классов, абитуриенту и студенту ежедневно приходится решать стандартные квадратные уравнения, вычисляя дискриминант и используя формулу корней квадратного уравнения. Метод переброски предназначен для тех, кто любит и умеет находить корни квадратного уравнения с помощью теоремы Виета и стремится избавиться от «нулевых» вычислений при решении задач.

Познакомимся с этим методом подробнее. Рассмотрим квадратное уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$ и приведённое квадратное уравнение вида $y^2 + by + ac = 0$, старший коэффициент которого равен единице, средний коэффициент равен b , а свободный член получен как произведение коэффициентов a и c исходного уравнения (a «перебросилось» к c).

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad y^2 + by + ac = 0$$

$a-c$
 $ax^2 + bx + c = 0$

Решим оба квадратных уравнения:

$$ax^2 + bx + c = 0; \quad 1 \quad y^2 + by + ac = 0.$$

Найдём дискриминант каждого уравнения:

$$D = b^2 - 4ac; \quad 1 \quad D = b^2 - 4ac.$$

Оказывается, дискриминант первого квадратного уравнения равен дискриминанту второго уравнения!

Найдём корни квадратных уравнений:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}; \quad 1 \quad y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2};$$

Очевидно, что корни первого квадратного уравнения отличаются от корней второго уравнения только делением на первый коэффициент a .

Таким образом, с помощью теоремы Виета можно найти корни приведённого квадратного уравнения $y^2 + by + ac = 0$ и, разделив их на старший коэффициент a , получить корни неприведённого квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Воспользуемся этим фактом и рассмотрим применение метода переброски коэффициентов при решении уравнений.

Пример 1. Решите уравнение $3x^2 - 13x + 4 = 0$.

Рассмотрим «вспомогательное» квадратное уравнение $y^2 - 13y + 4 \cdot 3 = 0$ или $y^2 - 13y + 12 = 0$. С помощью теоремы Виета находим его корни: $y_1 = 1$; $y_2 = 12$, делим их на 3 (старший коэффициент уравнения $3x^2 - 13x + 4 = 0$) и получаем корни исходного уравнения: $x_1 = \frac{1}{3}$; $x_2 = \frac{12}{3} = 4$.

Пример 2. (ЦТ 2011 г., задание А18). Найдите наименьший положительный корень уравнения $4 \sin^2 x + 12 \cos x - 9 = 0$.

Применим основное тригонометрическое тождество

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad \text{тогда} \quad 4 - 4\cos^2 x + 12 \cos x - 9 = 0, \\ 4\cos^2 x - 12 \cos x + 5 = 0$$

Находим числа, сумма которых равна 12, а произведение 20.

$$y_1 + y_2 = 12, \quad y_1 \cdot y_2 = 20, \quad y_1 = 10, \quad y_2 = 2.$$

И получаем корни исходного уравнения $\cos x = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$; $\cos x = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

$$x = \pm \arccos \frac{1}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$x = \frac{\pi}{3}$ наименьший положительный корень уравнения.

Пример 3. (ЦТ 2004 г., задание В10).

Решите уравнение $(x - 1) \cdot 4^x - 2(x + 1) \cdot 2^x + 8 = 0$. В ответ запишите корень или сумму корней.

Рассмотрим «вспомогательное» квадратное уравнение

$y^2 - 2(x+1) \cdot y + 8 \cdot (x-1) = 0$. Найдём корни этого уравнения, сумма которых $2(x+1)$, а произведение $8(x+1)$,
 $y_1 + y_2 = 2(x+1)$, $y_1 \cdot y_2 = 8(x+1)$

$y_1 = 4$, $y_2 = 2(x-1)$. И получаем корни исходного уравнения
 $2^x = \frac{4}{x-1}$, $x = 2$ и $2^x = \frac{2(x-1)}{x-1}$, $2^x = 2$, $x = 1$. Находим сумму корней
 $2+1 = 3$.

Пример 4. (ЦТ 2004 г., задание В10).

Решите уравнение $x \cdot \log_2 x - 2(1+x) \cdot \log_2 x + 4 = 0$. В ответ запишите корень или сумму корней.

Рассмотрим «вспомогательное» квадратное уравнение

$y^2 - 2(1+x) \cdot y + 4 \cdot x = 0$. Найдём корни этого уравнения, сумма которых равна $2(1+x)$, а произведение равно $4x$.

$y_1 + y_2 = 2(1+x)$, $y_1 \cdot y_2 = 4x$; $y_1 = 2$, $y_2 = 2x$. И получаем корни исходного уравнения $\log_2 x = \frac{2}{x}$, $x = 2$ и $\log_2 x = \frac{2x}{x}$, $\log_2 x = 2$, $x = 4$. Находим сумму корней $2 + 4 = 6$.

Способ Феррари. Способ Феррари позволяет сводить решение уравнений четвёртой степени к решению квадратных уравнений. Предлагаем алгоритм решения подобных уравнений способом Феррари.

Пусть дано уравнение $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$.

1) Выделим полный квадрат:

$$x^4 + 2\frac{a}{2}x^3 + \frac{a^2}{4}x^2 - \frac{a^2}{4}x^2 + bx^2 + cx + d = 0,$$

$$\left(x^2 + \frac{ax}{2}\right)^2 = \left(\frac{a^2}{4} - b\right)x^2 - cx - d.$$

2) Постараемся превратить и правую часть полученного уравнения в полный квадрат. Для этого прибавим к левой и правой частям уравнения $2\alpha\left(x^2 + \frac{ax}{2}\right) + \alpha^2$, где α – параметр.

$$\left(x^2 + \frac{ax}{2} + \alpha\right)^2 = \left(2\alpha + \frac{a^2}{4} - b\right)x^2 + (\alpha a - c)x + \alpha^2 - d.$$

3) Для того чтобы трёхчлен в правой части уравнения был полным квадратом, необходимо, чтобы дискриминант был равен нулю.

$$(\alpha a - c)^2 - 4\left(2\alpha + \frac{a^2}{4} - b\right)(\alpha^2 - d) = 0.$$

После раскрытия скобок и приведения подобных членов получим резольвенту $8\alpha^3 - 4ba^2 + (2ac - 8d)\alpha - c^2 - a^2d + 4bd = 0$. Как всякое кубическое уравнение, резольвента Феррари имеет, по меньшей мере, один действительный корень. Находим корень и подставляем в уравнение второго пункта.

4) Полученное уравнение, в котором левая и правая части являются полными квадратами, решаем с использованием стандартных приёмов.

Пример 1. Решить уравнение $x^4 + x^3 - 10x^2 - 2x + 4 = 0$

Решение.

1) Выделим полный квадрат: $(x^2 + 0,5x)^2 = 10,25x^2 + 2x - 4$.

2) $(x^2 + 0,5x + \alpha)^2 = (2\alpha + 10,25)x^2 + (2 + \alpha)x + \alpha^2 - 4$.

3) Получаем резольвенту Феррари, т.е. приравниваем к нулю дискриминант правой части: $\alpha^2 + 4\alpha + 4 - (4\alpha^2 - 16)(2\alpha + 10,25) = 0$, $2\alpha^3 + 10\alpha^2 - 9\alpha - 42 = 0$.

Подбором находим $\alpha = -2$, тогда $(x^2 + 0,5x - 2)^2 = 6,25x^2$.

$$4) \begin{cases} x^2 - 2x - 2 = 0, & x = 1 \pm \sqrt{3}, \\ x^2 + 3x - 2 = 0, & x = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}. \end{cases}$$

Ответ: $\left\{ 1 \pm \sqrt{3}; \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2} \right\}$

Пример 2. Для отработки навыков решения уравнений четвёртой степени учителю необязательно искать примеры в различных учебниках. Каждый в состоянии составить нужное их количество сам. Допустим, мы хотим, чтобы уравнение четвёртой степени имело корни $x_1 = 2 + \sqrt{3}$ и $x_2 = 2 - \sqrt{3}$. Корни мы специально берём с иррациональностями, для того чтобы их было трудно подобрать и тем самым не дать возможности ученикам упростить решение тренировочных примеров. Для данных двух корней составляем квадратное уравнение $x^2 - 4x + 1 = 0$. Второе уравнение возьмём с комплексными корнями: $x^2 + 2 = 0$. Перемножим два квадратные уравнения, получим уравнение четвёртой степени: $x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 8x + 2 = 0$. Решим его способом Феррари.

1) Выделим полный квадрат: $(x^2 - 2x)^2 = x^2 + 8x - 2$;

2) $(x^2 - 2x + \alpha)^2 = (2\alpha + 1)x^2 + (8 - 4\alpha)x + \alpha^2 - 2$.

3) $2\alpha^3 - 3\alpha^2 + 12\alpha - 18 = 0$. Подбором находим $\alpha = 1,5$.

4) $(x^2 + 2)(x^2 - 4x + 1) = 0$

$$\begin{cases} x^2 + 2 = 0, & x \in \emptyset, \\ x^2 - 4x + 1 = 0, & x_1 = 2 + \sqrt{3} \text{ и } x_2 = 2 - \sqrt{3}. \end{cases}$$

Ответ: $\{2 + \sqrt{3}; 2 - \sqrt{3}\}$

Пример 3. (ЦТ 2007 г., вариант 2, задание В10). Найдите значение выражения $n \cdot S$, где n – количество, а S – сумма корней уравнения $x^2 + 3x - 9 - 2\sqrt{x^2 + 3x} + 4\sqrt[4]{x^2 + 3x} = 6(2\sqrt[4]{x^2 + 3x} - 1)$.

Решение. Пусть $\sqrt[4]{x^2 + 3x} = t, t \geq 0$, тогда $t^4 - 9 - 2t^2 + 4t = 6(2t - 1)$. Приводим подобные слагаемые: $t^4 - 2t^2 - 8t - 3 = 0$. Выделяем полный квадрат $(t^2 - 1)^2 = 8t + 4$. Добавим к обеим частям выражение $2\alpha(t^2 - 1) + \alpha^2$, после этого получим $(t^2 - 1 + \alpha)^2 = 2\alpha t^2 + 8t + \alpha^2 - 2\alpha + 4$.

Мы должны подобрать такое α , чтобы и справа был полный квадрат, а для этого необходимо, чтобы дискриминант был равен нулю: $16 - 2\alpha(\alpha^2 - 2\alpha + 4) = 0$. Получили резольвенту Феррари $\alpha^3 - 2\alpha^2 + 4\alpha - 8$. Подбором находим один корень $\alpha = 2$. Подставим найденное значение:

$$(t^2 + 1)^2 = (2t + 2)^2,$$

$$\begin{cases} t^2 + 2t + 3 = 0, & D < 0, \\ t^2 - 2t - 1 = 0, & t = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2}, \end{cases}$$

так как $t \geq 0$, то $t = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$.

Делаем обратную замену $\sqrt[4]{x^2 + 3x} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$, $x^2 + 3x - \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right)^4 = 0$.

$D > 0$, корней два, $x_1 + x_2 = -3$, $n = 2$, $S = -3$, $n \cdot S = -6$.

Ответ: -6

Пример 4. (ЦТ 2007 г., вариант 10, задание В10). Найдите значение выражения $n \cdot S$, где n – количество, а S – сумма корней уравнения $x^2 + 2x - 9 - 2\sqrt{x^2 + 2x} + 4\sqrt[4]{x^2 + 2x} = 6(2\sqrt[4]{x^2 + 2x} - 1)$.

Решение. Пусть $\sqrt[4]{x^2 + 2x} = t, t \geq 0$, тогда $t^4 - 9 - 2t^2 + 4t = 6(2t - 1)$. Приводим подобные слагаемые: $t^4 - 2t^2 - 8t - 3 = 0$. Выделяем полный квадрат $(t^2 - 1)^2 = 8t + 4$. Добавим к обеим частям выражение $2\alpha(t^2 - 1) + \alpha^2$, после этого получим $(t^2 - 1 + \alpha)^2 = 2\alpha t^2 + 8t + \alpha^2 - 2\alpha + 4$. Мы должны подобрать такое α , чтобы и справа был полный квадрат, а для этого необходимо, чтобы дискриминант был равен нулю: $16 - 2\alpha(\alpha^2 - 2\alpha + 4) = 0$. Получили резольвенту Феррари $\alpha^3 - 2\alpha^2 + 4\alpha - 8$. Подбором находим один корень $\alpha = 2$. Подставим найденное значение:

$$(t^2 + 1)^2 = (2t + 2)^2,$$

$$\begin{cases} t^2 + 2t + 3 = 0, & D < 0, \\ t^2 - 2t - 1 = 0, & t = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}, \end{cases}$$

так как $t \geq 0$, то $t = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Делаем обратную замену $\sqrt[4]{x^2 + 2x} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $x^2 + 2x - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^4 = 0$.

$D > 0$, корней два, $x_1 + x_2 = -2$, $n = 2$, $S = -2$, $n \cdot S = -4$

Ответ: 4;

Пример 5. (Мехмат БГУ. Тренировочный тест-экзамен, 2010 г. В5).

Решите уравнение $\frac{x^2 + 12x + 4}{x+2} = 6\sqrt{x}$.

Решение. Обратим внимание, что $x \geq 0$. Пусть $\sqrt{x} = t$, $t \geq 0$, тогда $t^4 + 12t^2 + 4 = 6t(t^2 + 2)$. Выделим полный квадрат $(t^2 - 3t)^2 = -3t^2 + 12t - 4$. Чтобы превратить в полный квадрат и правую часть, к обеим частям уравнения прибавим одно и то же выражение

$$(t^2 - 3t)^2 + 2(t^2 - 3t)\alpha + \alpha^2 = 2(t^2 - 3t)\alpha + \alpha^2 - 3t^2 + 12t - 4,$$

$$(t^2 - 3t + \alpha)^2 = (2\alpha - 3)t^2 + 2(6 - 3\alpha)t + \alpha^2 - 4.$$

Чтобы правую часть превратить в полный квадрат, потребуем обращения в ноль дискриминанта правой части последнего уравнения $36 - 36\alpha + 9\alpha^2 - (2\alpha - 3)(\alpha^2 - 4) = 0$. Получим резольвенту Феррари: $\alpha^3 - 6\alpha^2 + 14\alpha - 12 = 0$. Подбором находим один из корней кубического уравнения $\alpha = 2$. Подставим найденное значение α в уравнение с t . $(t^2 - 3t + 2)^2 = t^2$.

Уравнение четвёртой степени распадается на произведение квадратных трёхчленов $(t^2 - 4t + 2)(t^2 - 2t + 2) = 0$.

$$\begin{cases} t^2 - 2t + 2 = 0, & D < 0, \\ t^2 - 4t + 2 = 0, & t = 2 \pm \sqrt{2}. \end{cases}$$

Вернёмся к исходной неизвестной $\sqrt{x} = 2 \pm \sqrt{2}$, $x = 6 \pm 4\sqrt{2}$.

Ответ: $6 \pm 4\sqrt{2}$.

Применение нестандартных методов решения задач по математике требует от старшеклассников и абитуриентов нетрадиционного мышления, необычных рассуждений. Незнание и непонимание таких методов существенно уменьшает область успешно решаемых задач по математике. Тем более что имеющая место тенденция к усложнению конкурсных заданий по математике стимулирует появление новых оригинальных (нестандартных) подходов к решению математических задач. Следует отметить, что знание нестандартных методов и приёмов решения задач по математике способствует развитию нового, нешаблонного мышления, которое можно применять также и в других сферах человеческой деятельности.