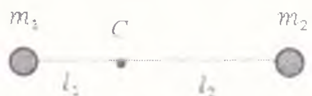
П.В. Бычков
г. Гомель, УО «ГГУ им. Ф. Скорины»
С.Н. Дедкова
г. Гомель, СОШ № 52

ЦЕНТРАЛИЗОВАННОЕ ТЕСТИРОВАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ: НЕСТАНДАРТНЫЙ СПОСОБ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ ПЕРЕМЕННУЮ ПОД ЗНАКОМ МОДУЛЯ

В настоящее время из программы по математике общеобразовательной школы векторы исключены. Возникает проблема нахождения частей пересекающихся отрезков безвекторным методом, более простым. Можно решить эту проблему применяя метод площадей, теорему Фалеса, но более простым будет метод масс.

Метод масс для нахождения отношения отрезков. Предлагаемый метод основан на интересном соотношении из физики:

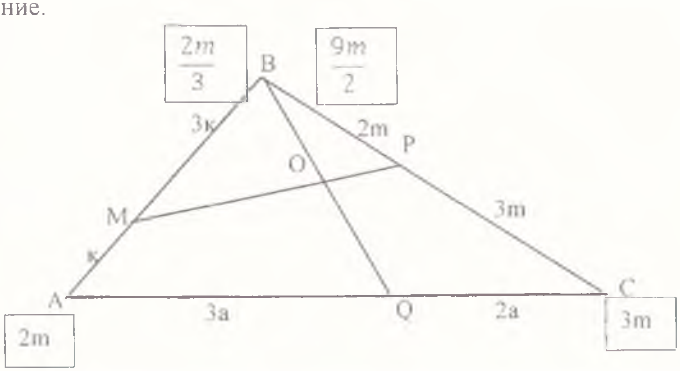
$m_1 l_1 = m_2 l_2$, (1) где l_1, l_2 – расстояния от центра масс до соответствующих материальных точек.



Из формулы (1) следует $\frac{m_1}{m_2} = \frac{l_2}{l_1}$. (2)

Пример 1. Точки M, P, Q расположены соответственно на сторонах AB, BC, AC треугольника ABC так, что AM : MB = 1 : 3, BP : PC = 2 : 3, AQ : QC = 3 : 2. Отрезки MP и B Q пересекаются в точке O. Найдите отношение $\frac{BO}{OQ}$ и $\frac{MO}{OP}$.

Решение.



Используя формулу (2) мы нашли массу точки A – $2m$, точки C – $3m$, точки B – $\frac{2m}{3}$ и $\frac{9m}{2}$, тогда масса всей точки B будет равна $\frac{2m}{3} + \frac{9m}{2} = \frac{31m}{6}$.

Найдём массу точки M – $2m + \frac{2m}{3} = \frac{8m}{3}$, массу точки P – $3m + \frac{9m}{2} = \frac{15m}{2}$, тогда $\frac{MO}{OP} = \frac{\frac{15m}{2}}{\frac{8m}{3}} = \frac{15 \cdot 3}{2 \cdot 8} = \frac{45}{16}$

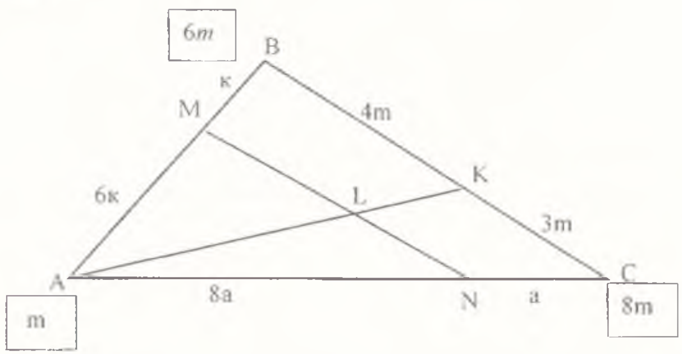
Найдём массу точки Q – $2m + 3m = 5m$, тогда $\frac{BO}{OQ} = \frac{5m}{\frac{31m}{6}} = \frac{5 \cdot 6}{31} = \frac{30}{31}$.

Ответ: $\frac{30}{31}$, $\frac{45}{16}$

Пример 2. (РТ 1этап 2010/2011, вариант 2 B12)

Точки M, N, K расположены соответственно на сторонах AB, AC, BC треугольника ABC так, что AM : MB = 6 : 1, AN : NC = 8 : 1, CK : KB = 3 : 4. Отрезки AK и MN пересекаются в точке L. Найдите отношение $\frac{AL}{LK}$.

Решение.



Используя формулу (2) мы нашли массу точки A – m, точки C – $8m$, точки B – $6m$.

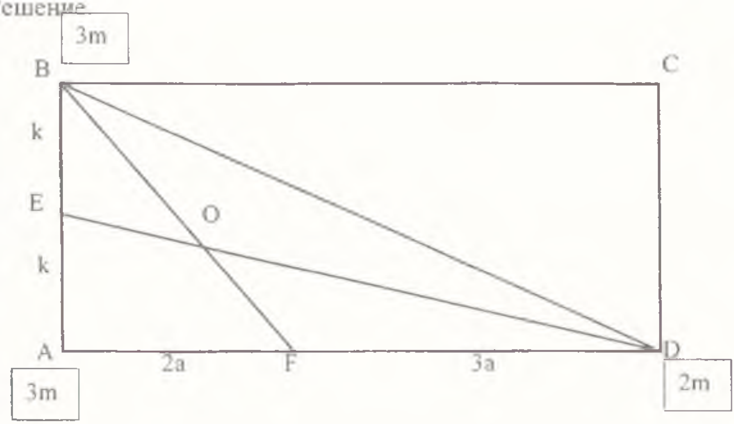
Найдём массу точки K – $6m + 8m = 14m$, тогда $\frac{AL}{LK} = \frac{14m}{m} = 14$.

Ответ: 14.

Пример 3. (РТ 3этап 2010/2011, вариант 2 B11)

На сторонах AB и AD прямоугольника ABCD взяты точки E и F соответственно так, что AE = BE, AF : FD = 2 : 3. Отрезки DE и BF пересекаются в точке O. Найдите площадь треугольника DOF, если площадь треугольника BOE равна 15.

Решение



В данной задаче вместо прямоугольника ABCD рассмотрим треугольник ABD и применим к нему метод масс. Найдём массу точки E – $3m + 3m = 6m$, масса точки F – $2m + 3m = 5m$, тогда найдём отношение $\frac{DO}{OE} = \frac{6m}{2m} = \frac{3}{1}$

и $\frac{BO}{OF} = \frac{5m}{3m} = \frac{5}{3}$

Треугольник BOE и треугольник DOFимеют равные углы ($\angle BOE = \angle DOF$ как вертикальные), тогда площади этих треугольников будут относиться как произведение сторон составляющих равные углы

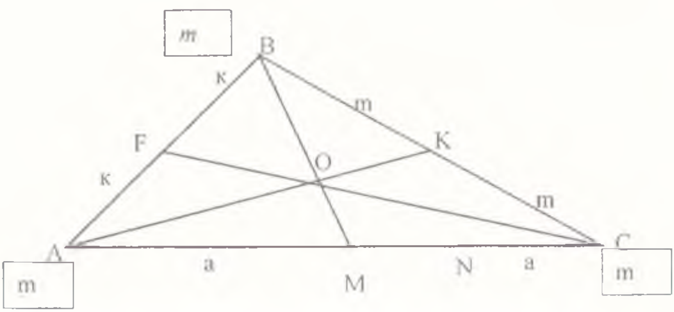
$\frac{S_{BOE}}{S_{DOF}} = \frac{BO \cdot OE}{DO \cdot OF}$, $\frac{15}{S_{DOF}} = \frac{5 \cdot 1}{3 \cdot 3}$,

$S_{DOF} = \frac{15 \cdot 9}{5} = 27$

Ответ: 27.

Пример 4. Доказать, что медианы треугольника в точке пересечения делятся в отношении 2 : 1, считая от вершины.

Решение.



Докажем отношение для медианы BM применяя метод масс. Найдём массу точки M – $m + m = 2m$, тогда отношение $\frac{BO}{OM} = \frac{2m}{m} = \frac{2}{1}$.

Аналогично доказывается для медианы CF и AK.

Нестандартный способ решения уравнений, содержащих переменную под знаком модуля. Решение уравнений с переменной под знаком модуля основывается на следующих теоретических фактах:

1) определение понятия «модуль числа»;

2) свойства модуля;

3) геометрический смысл выражения $|x - y|$ – длина отрезка координатной оси, соединяющего точки с абсциссами x и y.

В учебно-методической литературе методика решения уравнений с модулем чаще всего представлена методом числовых промежутков.

Но решение многих типов уравнений может быть получено и более рациональным путём. Приведём классификацию способов решения некоторых типов уравнений, содержащих переменную под знаком модуля:

1) $|a| = a \Leftrightarrow a \geq 0$, $|a| = -a \Leftrightarrow a < 0$.

2) $|a| = |b| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b, \\ a=-b \end{array}\right.$ или $|a|=|b| \Leftrightarrow a^2 = b^2$.

3) $|a| = b| \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} a = b, \\ a = -b. \end{array}\right. \end{cases}$

4) $|a|+|b| = a + b \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0, \\ b \geq 0; \end{cases}$

5) $|a|+|b| = a - b \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0, \\ b \leq 0; \end{cases}$

6) $|a|+|b| = b - a \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq 0, \\ b \geq 0; \end{cases}$

7) $|a|+|b| = |a + b| \Leftrightarrow ab \geq 0$

8) $|a|+|b| = |a - b| \Leftrightarrow ab < 0$

9) $|a| - |b| = a + b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \geq 0, \\ b \leq 0 \end{cases} \\ a + b = 0 \end{array}\right.$

10) $|a| - |b| = a - b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \geq 0, \\ b \geq 0; \end{cases} \\ a - b = 0 \end{array}\right.$

Заметим, что в случаях 9) и 10) a и b могут принимать противоположные или равные значения при каком-то значении аргумента. Поэтому разность их модулей будет равна нулю и, следовательно, правая часть уравнения 9) (при противоположных значениях a и b) и правая часть уравнения 10) (при равных значениях a и b) также обращаются в ноль.

Примеры.

1. *Меньший целый корень уравнения* $|x + 3| + |3x - 2| = 4x + 1$ равен

Заметим, что уравнение имеет вид равенства $|a| + |b| = a + b$ (т. е. свойство 4), которое равносильно системе $\begin{cases} a \geq 0, \\ b \geq 0; \end{cases}$

$\begin{cases} x + 3 \geq 0, \\ 3x - 2 \geq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq -3, \\ x \geq \frac{2}{3}; \end{cases}$ $x \geq \frac{2}{3}$.

Меньший целый корень $x = 1$

Ответ. 3) 1

2. *Больший корень уравнения* $|2x + 4| + |x - 3| = x + 7$ равен?

Заметим, что уравнение имеет вид равенства $|a| + |b| = a - b$ (т. е. свойство 5), которое равносильно системе $\begin{cases} a \geq 0, \\ b \leq 0; \end{cases}$

$\begin{cases} 2x + 4 \geq 0, \\ x - 3 \leq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq -2, \\ x \leq 3; \end{cases}$ $x \in [-2; 3]$

Больший корень 3

Ответ. 2) 3

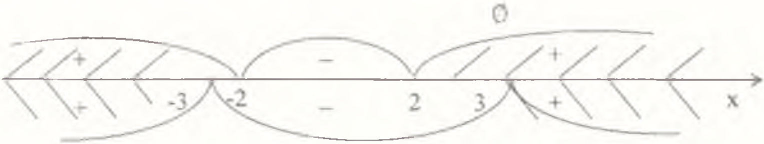
3. *Наименьший положительный корень уравнения* $|x^2 - 4| - |x^2 - 9| = 5$ равен?

Заметим, что уравнение имеет вид равенства $|a| - |b| = a - b$ (т. е. свойство 10), которое равносильно системе $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \geq 0, \\ b \geq 0; \end{cases} \\ a - b = 0 \end{array}\right.$

$\begin{cases} x^2 - 4 \geq 0, \\ x^2 - 9 \geq 0. \end{cases}$ или $a - b = 0$

$\begin{cases} (x - 2)(x + 2) \geq 0, \\ (x - 3)(x + 3) \geq 0. \end{cases}$ $x^2 - 4 = x^2 - 9$

$0 = -5;$



$x \in (-\infty;\ -3] \cup [3;\ +\infty)$

Наименьший положительный корень 3

Ответ. 5) 3

4. *Найдите количество натуральных корней уравнения*

$|4x - x^2 - 12| + |x - 6| = x^2 - 5x + 18$

Заметим, что уравнение имеет вид равенства $|a| + |b| = |a + b|$ (т. е. свойство 7), которое равносильно неравенству $a \cdot b \geq 0$.

$(4x - x^2 - 12)(x - 6) \geq 0$; $(x^2 - 4x + 12)(x - 6) \leq 0$

Данное неравенство равносильно неравенству

$x - 6 \leq 0$; $x \leq 6$. Натуральные корни 1,2, 3, 4, 5, 6

Ответ. 2) 6.

В заключение отметим, что предложенные нестандартные методы будут полезны учащимся старших классов и абитуриентам при подготовке к ЦТ. Используя эти нестандартные методы и многие другие, выпускники школы № 52 показывают следующие результаты на ЦТ:

Учебный год	*Средний балл*	*Высший балл*	*Результат по области*
2009–2010	30,16	86	22,50
2010–2011	26,35	61	20,46
2011–2012	28,28	83	20,26
2012 –2013	36,50	79	21,42

С применением методов: нестандартный способ решения уравнений, содержащих переменную под знаком модуля, геометрический подход в преобразовании выражений, содержащих обратные тригонометрические функции были проведены открытые факультативы. На заседании МО подробно был разобран метод масс для нахождения отношения отрезков. Предложенные нестандартные методы будут полезны учителям, преподающим математику в 9–11 классах.