Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 3 (102), 2017

УДК 512.542

Неразрешимые группы с абелевыми добавлениями к не дисперсивным по Оре подгруппам

Т.В. Бородич

Поскольку в каждой конечной группе любая подгруппа обладает добавлением, то задача исследования группы с ограничениями на добавления охватывает класс всех конечных групп. В данной работе исследуется строение конечной неразрешимой группы с абелевыми добавлениями к не дисперсивным по Оре подгруппам.
Ключевые слова: конечная группа, разрешимая группа, дисперсивная по Оре подгруппа, абелева группа.

Since in every finite group any subgroup has a supplement, the problem of studying a group with restrictions on the supplement covers the class of all finite groups. The structure of a finite not solvable group with abelian additions to the non-dispersive by Ore subgroups is investigated.
Keywords: finite group, solvable group, dispersive by Ore subgroups, abelian subgroup.

Введение. Рассматриваются только конечные группы. Все встречающиеся обозначения и определения стандартны, их можно найти в [1], [2].

В работе [3] Л.А. Шеметков ввел понятие добавления (см. также [1, с. 132]). Добавлением к подгруппе *A* конечной группы *G* называется такая подгруппа *B* из *G*, что $AB = G$, но $AB_1 \neq G$ для любой собственной подгруппы B_1 из *B*. Если, кроме того, $A \cap B = 1$, то *B* называется дополнением к подгруппе *A*.

Строение групп, у которых подгруппы обладают дополнениями, исследовались в работах Ф. Холла [4], С.Н. Черникова [5, с. 291] и других авторов.

В.А. Шериев в своей работе [6] изучил строение конечной группы с дополняемыми ненормальными подгруппами. Позже в работе [7] Л.А. Шеметков исследовал группы с ограничениями на дополнения и добавления к нормальным подгруппам.

Поскольку в каждой конечной группе любая подгруппа обладает добавлением, то аналогичная задача относительно добавлений охватывает класс всех конечных групп. Однако при дополнительных ограничениях на добавления или на добавляемые подгруппы можно выделять разнообразные классы групп.

Отметим, что конечные группы с нильпотентными подгруппами непримарного индекса изучены С.С. Левищенко [8]. Среди них нет неразрешимых групп.

В работе [9] В.С. Монахов исследовал свойства неразрешимой группы с нильпотентными добавлениями к несверхразрешимым подгруппам.

В настоящей заметке изучается строение неразрешимых групп с абелевыми добавлениями к не дисперсивным по Оре подгруппам.

Доказывается следующий результат:

Теорема. Конечная неразрешимая группа с абелевыми добавлениями к не дисперсивным по Оре подгруппам изоморфна $SL(2,2^n)\times K$ и $SL(2,5)\times K$, где *K* – абелева подгруппа, а (2^n-1) и *n* – простые числа.

1. Используемые обозначения и определения. Группа *G* называется дисперсивной, если она имеет нормальный ряд, факторы которого изоморфны силовским подгруппам. Группа *G* порядка $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_n^{\alpha_n}$ называется φ-дисперсивной, если $p_1\,\varphi\, p_2\,\varphi ... \varphi\, p_n$ и для любого *i* группа *G* имеет нормальную подгруппу порядка $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_i^{\alpha_i}$. Если при этом упорядочение φ таково, что $p\varphi q$ влечет $p > q$, то φ-дисперсивная группа называется дисперсивной по Оре.

Группа с нормальной силовской *p*-подгруппой называется *p*-замкнутой, а группа с нормальной *p*′-холловой подгруппой называется *p*-нильпотентной.

Группой Шмидта называют ненильпотентную группу, все собственные подгруппы которой нильпотентны.

Запись $[A]B$ означает полупрямое произведение нормальной подгруппы A и подгруппы B.

Конкретные группы обозначаются следующим образом: Z_n – циклическая группа порядка n; D_{2n} – диэдральная группа порядка $2n$; E_{p^n} – элементарная абелева p-группа порядка p^n; A_n и S_n – знакопеременная и симметрическая группы степени n соответственно; $SL(n,P)$ – специальная линейная группа степени n над полем P; $PGL(n,P)$ и $PSL(n,P)$ – проективная полная и специальная линейные группы степени n над полем P.

2. Вспомогательные утверждения.

Лемма 1. В простой группе $SL(2,2^n)$, где n и 2^n-1 – простые числа. Каждая не дисперсивная по Оре подгруппа изоморфна $[E_{2^n}]Z_{2^n-1}$.

Доказательство. По теореме 2.54 [10, ст. 99] группа $PSL(2,p^n)$ содержит только следующие подгруппы:

1) элементарные абелевы p-группы порядков p, p^2, ... , p^n;

2) циклические группы порядков z в случае, когда z делит $(p^n \pm 1)/d$, где $d=(2,p^n-1)$;

3) диэдральные группы порядков $2z$, где число z такое как в пункте 2;

4) A_4 в случае, когда $p>2$ или $p=2$ и n – четное;

5) S_4 в случае, когда $p^{2n} \equiv 1(\mathrm{mod}\,16)$;

6) A_5 в случае, когда $p=5$ или $p^{2n} \equiv 1(\mathrm{mod}\,5)$;

7) полупрямое произведение элементарной абелевой группы порядка p^k с циклической группой порядка t в случае, когда t делит $(p^k-1)/d$ и t делит (p^n-1);

8) $PSL(2,p^k)$ в случае, когда k делит n;

9) $PGL(2,p^k)$ в случае, когда p – нечетное и $2k$ делит n.

Для нашего случае, будем полагать $p=2$, имеем $PSL(2,p^k)=SL(2,p^k)$, где n и (2^n-1) – простые числа.

Группы из пунктов 1–3 дисперсивны по Оре.

В пункте 4, группа $SL(2,2^n)$ содержит подгруппу A_4. Имеем $A_4=[E_4]Z_3$, данная факторизация удовлетворяет условию леммы, когда *n=2*.

Случай из пункта 5 невозможен, так как 2^{2n} не сравнимо с 1 по модулю 16.

В пункте 6 группа $SL(2,2^n)$ содержит подгруппу A_5 в случае, когда $p^{2n} \equiv 1(\mathrm{mod}\,5)$. Данная подгруппа не является не дисперсивной по Оре подгруппой.

В пункте 7 группа $SL(2,2^n)$ содержит подгруппу являющуюся полупрямым произведением элементарной абелевой группы порядка p^k с циклической группой порядка t в случае, когда t делит $(p^k-1)/d$ и t делит (p^n-1). По условию леммы (2^n-1) – простое число, следовательно, $tl=2^n-1$ отсюда $l=1$ и $t=2^n-1$. Имеем $2^n-1=2^k-1$ и $k=n$. Таким образом, получаем подгруппу $[E_{2^n}]Z_{2^n-1}$, которая не дисперсивна по Оре. Данная подгруппа удовлетворяет условию леммы.

Группы из пунктов 8 и 9 не подходят, так как n – простое число и $p=2$. Лемма доказана полностью.

Лемма 2. Пусть $N \cdot \triangleleft G$. Тогда, если $K \triangleleft G$, то либо $N \le K$, либо $N \cap K = E$ и $NK = N \times K$.

Доказательство. Пусть $N \not\subset K$. Тогда $N \cap K \triangleleft G$ и $N \cap K$ – собственная подгруппа в N. Поэтому $N \cap K = E$ и $NK = N \times K$.

Лемма 3. (т. 2.8 [11]) Пусть $G=AB$ – неразрешимая группа, где A – группа Шмидта, B – нильпотентная группа. Тогда $G/R(G)$, где $R(G)$ – наибольшая разрешимая нормальная подгруппа, изоморфна одной из групп: $PSL(2,7)$, $PGL(2,7)$, $SL(2,2^n)$ и (2^n-1) – простое число, $AutSL(2,2^n)$, где n – некоторое простое число.

Лемма 4. (т. 2.1 [11]) Пусть A – p-группа, где p – простое число, B – группа Шмидта и $G=AB$. Если G – неразрешимая группа, то в A существует нормальная в G подгруппа P, такая, что G / P изоморфна одной из следующих групп: $PSL(2,5)$, $PSL(2,7)$, $SL(2,8)$, $PGL(2,7)$, $AutSL(2,8)$ или $SL(2,5)$.

3. Строение неразрешимых конечных групп с абелевыми добавлениями к не дисперсивным по Оре подгруппам.

Лемма 5. Пусть в конечной группе G каждая не дисперсивная по Оре подгруппа обладает абелевым добавлением. Тогда в любой подгруппе и в любой фактор-группе группы G каждая не дисперсивная по Оре подгруппа обладает абелевым добавлением.

Доказательство. Пусть H – произвольная подгруппа конечной группы G, и пусть A не дисперсивная по Оре подгруппа из H. Поскольку $A \le H \le G$, то в группе G существует абелево добавление B к не дисперсивной по Оре подгруппе A. Поэтому $G = AB$, а подгруппа $H = A(H \cap B)$, где $(H \cap B)$ – абелева в H. Следовательно, подгруппа A обладает абелевым добавлением в H.

Пусть L – нормальная в группе G подгруппа, и A/L – не дисперсивная по Оре подгруппа в G/L. Тогда A не дисперсивная по Оре подгруппа в группе G, и в G существует абелева подгруппа B такая, что $G = AB$. Поскольку BL/L абелева в G/L, то $G/L = A/L \cdot B/L$, т. е. к подгруппе A/L можно найти в G/L абелево добавление.

Теорема. Конечная неразрешимая группа с абелевыми добавлениями к не дисперсивным по Оре подгруппам изоморфна $SL(2,2^n)\times K$ и $SL(2,5)\times K$, где K – абелева подгруппа, а (2^n-1) и n – простые числа.

Доказательство. Пусть G – конечная неразрешимая группа с абелевыми добавлениями к не дисперсивным по Оре подгруппам. Так как группа G неразрешима, то она не 2-нильпотентна. Следовательно, по теореме IV.5.4 [2, с. 434] в G существует 2-замкнутая подгруппа Шмидта $A = [S]P$, где S – нормальная в A силовская 2-подгруппа, подгруппа P – циклическая. Поскольку A не дисперсивная по Оре подгруппа, то по условию теоремы существует абелева подгруппа B такая, что $G = AB$. Из леммы 3 заключаем, что факторгруппа G/K изоморфна $PSL(2,7)$, $PGL(2,7)$, $SL(2,2^n)$ и (2^n-1) – простое число, $AutSL(2,2^n)$, где n – некоторое простое число, а K – наибольшая разрешимая нормальная в G подгруппа.

I) Пусть $K = 1$.

а) Группа $G \cong PSL(2,7)$. По теореме 0.8. [11] данная группа факторизуется следующим образом:

$$PSL(2,7) = ([Z_7]Z_3)D_8 = ([Z_7]Z_3)S_4 = ([Z_7]Z_3)S_4^* = G_7S_4 = G_7S_4^*,$$

где S_4 и S_4^* – несопряженные в $PSL(2,7)$ симметрические группы степени 4. Так как факторизации не содержат не дисперсивных 2-замкнутых групп Шмидта, то данная группа исключается из рассмотрения.

б) Группа $G \cong PGL(2,7)$. Известно, что $|PGL(2,7):PSL(2,7)| = 2$ и факторизуется $PGL(2,7) = [PSL(2,7)] < \alpha >$, где $|< \alpha >| = 2$. Обозначим через $N = PSL(2,7)$ нормальную подгруппу в группе $PGL(2,7)$, в данной подгруппе есть не дисперсивная по Оре 2-замкнутая подгруппа $S = A_4$. По условию теоремы она должна иметь абелево добавление в группе G. Пусть B – абелево добавление в группе G к подгруппе S и $G = SB$. Следовательно, по лемме 5 $PSL(2,7) = N = N \cap G = N \cap SB = S(N \cap B)$ получаем противоречие, так как в $PSL(2,7)$ нет абелева добавления к A_4.

в) Группа $G \cong SL(2,2^n)$ и (2^n-1) – простое число. По лемме 1 в простой группе $SL(2,2^n)$ каждая не дисперсивная по Оре подгруппа изоморфна группе $[E_{2^n}]Z_{2^n-1}$. По теореме 0.8 [11] последняя подгруппа имеет в $SL(2,2^n)$ циклическое дополнение Z_{2^n+1}. Поскольку циклическая подгруппа является абелевой, тогда группа $SL(2,2^n)$ удовлетворяет условию теоремы, когда n *и* (2^n-1) – простые числа.

г) Группа $G \cong AutSL(2,2^n)$. Покажем, что она не удовлетворяет условию теоремы. Пусть $X = AutSL(2,2^n)$ и $Y = SL(2,2^n)$. Известно, что Y нормальная в X подгруппа, а X/Y – циклическая группа порядка n. Используя теорему 0.8 [11] о том, что группа $SL(2,2^n)$ имеет следующие две факторизации:

$$SL(2,2^n)=([E_{2^n}]Z_{2^n-1})\cdot Z_{2^n+1}=([E_{2^n}]Z_{2^n-1})\cdot D_{2(2^n+1)}.$$

Так как первая факторизация присутствует всегда, то можем ограничиться только ее рассмотрением. Для силовской 2-подгруппы Y_2 из Y по лемме Фраттини [10, ст. 55] имеем

$$X=YN_X(Y_2)=(([Y_2]Z_{2^n-1})\cdot Z_{2^n+1})N_X(Y_2)=Z_{2^n+1}\cdot N_X(Y_2).$$

Если $H=Z_{2^n+1}\cap N_X(Y_2)\neq 1$, то H нормальна в подгруппе Z_{2^n+1} и $H^X=H^{Z_{2^n+1}N(Y_2)}\subseteq N_X(Y_2)$. Поэтому H^X – разрешимая нормальная подгруппа группы G, что противоречит рассматриваемому пункту, где $K=1$.

Следовательно, будем считать, что $Z_{2^n+1}\cap N_X(Y_2)=1$. Имеем

$$|X|=|Z_{2^n+1}N_X(Y_2)|=\frac{|Z_{2^n+1}|\cdot|N_X(Y_2)|}{|Z_{2^n+1}\cap N_X(Y_2)|}=|Z_{2^n+1}|\cdot|N_X(Y_2)|,$$

получаем $n2^n(2^n-1)(2^n+1)=(2^n+1)|N_X(Y_2)|$. Имеем $|N_X(Y_2)|=n2^n(2^n-1)$.

Покажем, что $N_X(Y_2)$ – разрешима. Так как $N_X(Y_2)\cap Y\lhd N_X(Y_2)$ и $X/Y\cong N_X(Y_2)/N_X(Y_2)\cap Y$ – циклическая, то $N_X(Y_2)$ – разрешима. Следовательно, по теореме 4.35 [10, ст. 142] существует в $N_X(Y_2)$ подгруппа F порядка $n2^n$.

Для $n>2$ подгруппа F – 2-замкнута, так как силовская 2-подгруппа нормальна в $N_X(Y_2)$. Предположим, что подгруппа F дисперсивна по Оре, тогда F – 2-нильпотентна и $F=F_2\times F_{2'}$, но этого быть не может так как внешний автоморфизм $SL(2,2^n)$ не централизует силовскую 2-подгруппу. Поэтому F не дисперсивна по Оре. Так как

$$|X|=|AutSL(2,2^n)|=n\,|SL(2,2^n)|=n2^n(2^n-1)(2^n+1),$$

то в X нет абелевой подгруппы порядка $(2^n-1)(2^n+1)$. Если бы такая подгруппа была, то она должна содержаться в $SL(2,2^n)$. По выше приведенной факторизации группы $SL(2,2^n)$ видно, что в данной группе абелевой подгруппы порядка $(2^n-1)(2^n+1)$ нет. Следовательно, $AutSL(2,2^n)$ не удовлетворяет условию теоремы при $n>2$.

Если $n=2$, то для $AutSL(2,4)$ справедливо следующее включение $AutSL(2,4)>SL(2,4)>A_4=[E_4]Z_3$, где не дисперсивная по Оре подгруппа изоморфна знакопеременной группе A_4 порядка 12. Так как $|AutSL(2,4)|=2^3\cdot 3\cdot 5$, то группа $AutSL(2,4)$ по условию теоремы должна обладать, абелева подгруппа B порядка, делящегося на 10. Но такой абелевой подгруппы в $AutSL(2,4)$ нет.

Таким образом, при $K=1$ группа G изоморфна $SL(2,2^n)$, если n и 2^n-1 – простые числа.

II) Пусть теперь $K\neq 1$.

а) Предположим, что K не является минимальной нормальной в G подгруппой, и пусть L – минимальная нормальная в G подгруппа, содержащаяся в K. По индукции, $\overline{G}=G/L=\overline{F}\times\overline{K}$, где $\overline{K}$ – абелева, а $\overline{F}$ изоморфна $SL(2,2^n)$ или $SL(2,5)$, n и 2^n-1 – простые числа. Так как $K\neq 1$, то $\overline{F}$ – собственная в $\overline{G}$ подгруппа, и для ее прообраза F в группе G по индукции получаем, что $F=F_1\times L$, где подгруппа F_1 изоморфна $SL(2,2^n)$ или $SL(2,5)$.

Если α – автоморфизм группы F, то $\alpha(F_1)\cong F_1$ и их пересечение $\alpha(F_1)\cap F_1$ – нормальная в F_1 подгруппа. Если $\alpha(F_1)\neq F_1$, то $\alpha(F_1)F/F_1\cong\alpha(F_1)/\alpha(F_1)\cap F$ является подгруппой абелевой группы $F/F_1\cong L$. Но $\alpha(F_1)\cong SL(2,2^n)$ или $SL(2,5)$, а эти группы совпадают со своими коммутантами. Поэтому $\alpha(F_1)=F_1$ и подгруппа F_1 характеристическая в F.

Поскольку подгруппа F_1 характеристическая в F, а F нормальна в G, тогда F_1 нормальна в G. Из условия $L\le K$ и индукции $F=F_1\times L$ следует, что $L=F\cap K=(F_1\times L)\cap K=(F_1\cap K)\times L$. Получаем, что условие $L=(F_1\cap K)\times L$ выполняется, когда $F_1\cap K=1$ и имеем $G=F_1\times K$. Поскольку для не дисперсивной по Оре подгруппы A из

F_1 существует абелево добавление B такое, что $G = AB$. Следовательно, $K \cong G/F_1 = AB/F_1 = F_1B/F_1 \cong B/B \cap F_1$ будет абелевой подгруппой, как факторгруппа абелевой подгруппы. Условие теоремы в данном случае справедливо.

б) Теперь рассмотрим случай, когда K минимальная нормальная в G подгруппа.

Предположим, что коммутант G' собственная в G подгруппа. Так как по свойствам коммутантов лемма 4.6 [10, с. 119] $(G/K)' = G'K/K$. Так как G/K – простая группа, то $(G/K)' = G/K$ и $G = G'K$. По лемме 2 получаем, что из минимальности K получаем, что либо $K \leq G'$, либо $G' \cap K = 1$. Если $K \leq G'$, то $G = G'$ – противоречие с тем, что G' собственная в G подгруппа. Следовательно, $G' \cap K = 1$ и $G = G' \times K$. Так как $G' \cong G/K \cong SL(2,2^n)$, где n и $2^n - 1$ – простые числа. В этом случае теорема доказана.

Итак, пусть $G = G'$. Если K – собственная подгруппа в своем централизаторе, то из простоты G/K и $1 \neq C_G(K)/K \lhd G/K$ следует, что $C_G(K) = G$, то есть K содержится в центре G. Теперь по теореме V.25.7 [2, с. 646], получаем, что группа G изоморфна $SL(2,2^n)$ или $SL(2,5)$.

Пусть $K = C_G(K)$, то есть самоцентрализуема. Поскольку K разрешима, то K – r-группа, для некоторого простого числа r. Допустим, что существует простое $t > r$ делящее порядок группы G, и пусть T – силовская t-подгруппа из G. Если подгруппа $[K]T$ дисперсивна по Оре, то подгруппа у которой порядок есть степень наибольшего числа нормальна в группе, т. е. $T \lhd G$ и получаем $[K]T = K \times T$ нильпотентна и K не самоценрализуема. Если $[K]T$ не дисперсивна по Оре, то по условию теоремы в группе существует абелева подгруппа D такая, что $G = ([K]T)D$. Но теперь $G/K = KT/K \cdot DK/K$. Так, как $KT/K \cong T/T \cap K = T$ будет примарной подгруппой и $DK/K \cong D/D \cap K$ – абелева подгруппа, то $G/K = KT/K \cdot DK/K$ является разрешимой группой как произведение двух нильпотентных подгрупп, противоречие с условием. Итак, r – наибольшее простое число, делящее порядок группы G.

Допустим, что K не содержится в абелевом добавлении B. Тогда B – собственная в BK подгруппа. Так, как $G = AB$, то $A \cap BK \neq 1$, где A – подгруппа Шмидта. Порядок подгруппы $|\overline{B}| = |BK/K| = 2^n + 1$ и K – r-группа, то BK группа нечетного порядка. Подгруппа $A = [S]P$ имеет порядок $2^n(2^n - 1)$ и $2^n - 1$ – простое число. Поэтому $A \cap BK = P$ так, как r – наибольшее простое число, делящее порядок G и теперь $G = S(BK)$. Поскольку $SK/K \cong S/S \cap K = S$ будет 2-подгруппой, а $BK/K \cong B/B \cap K$ – абелева подгруппа, то фактор-группа $G/K = SK/K \cdot BK/K$ будет разрешимой, как произведение двух нильпотентных подгрупп. Противоречие с условием.

Следовательно, K содержится в абелевом добавлении B и из самоцентрализуемости K и абелевости B получаем, что B – r-группа для наибольшего простого r, делящего порядок G. Из лемме 4 получаем, что G/K изоморфна одной из следующих групп: $PSL(2,5)$, $PSL(2,7)$, $SL(2,8)$, $PGL(2,7)$, $AutSL(2,8)$ или $SL(2,5)$.

1) Группа $G/K \cong PSL(2,5) = A_4Z_5$. Имеем из условия теоремы $G/K = A/K \cdot B/K$, где $A/K \cong A_4$ – не дисперсивная по Оре 2-замкнутая подгруппа, а $B/K \cong Z_5$ – абелево добавление к не дисперсивной по Оре подгруппе, где K – r-группа наибольшего порядка, $r = 5$. По теореме Шура-Цассенхауза [10, ст. 136] получаем $A = L[K]$ и $L \cong A_4$. По условию теоремы в группе найдется абелево добавление N к не дисперсивной по Оре подгруппе L такое, что $G = LN$. Но теперь $K \subseteq N^X$, $G = LN^X$ и $K < N^X \subseteq C_G(K)$ – противоречие. Так как K – самоцентрализуемая подгруппа.

2) Группа $G/K \cong PSL(2,7)$. По теореме 0.8.[7] данная группа факторизуется следующим образом:

$$PSL(2,7) = ([Z_7]Z_3)D_8 = ([Z_7]Z_3)S_4 = ([Z_7]Z_3)S_4^* = G_7S_4 = G_7S_4^*,$$

где S_4 и S_4^* – несопряженные в $PSL(2,7)$ симметрические группы степени 4. В данной факторизации нет не дисперсивных по Оре подгрупп, поэтому данная группа исключается из рассмотрения.

3) Группа $G/K \cong SL(2,8)$. Имеем из условия теоремы $G/K = A/K \cdot B/K$, где по лемме 1 фактор-группа $A/K \cong [E_8]Z_7$ – не дисперсивная по Оре 2-замкнутая подгруппа, а $B/K \cong Z_9$ – абелево добавление к не дисперсивной по Оре подгруппе, где K – r-группа, $r = 3$. По теореме Шура-Цассенхауза [10, ст. 136] получаем $A = L[K]$ и $L \cong [E_8]Z_7$. По условию теоремы в группе найдется абелево добавление N к не дисперсивной по Оре подгруппе L такое, что $G = LN$. Но теперь $K \subseteq N^X$, $G = LN^X$ и $K < N^X \subseteq C_G(K)$ – противоречие. Так как K – самоцентрализуемая подгруппа.

4) Группа $G/K \cong PGL(2,7)$. Известно, что $|PGL(2,7) : PSL(2,7)| = 2$. Отсюда получаем следующую факторизацию $PGL(2,7) = [PSL(2,7)] < \alpha >$, где $|< \alpha >| = 2$, где

$$PSL(2,7) = ([Z_7]Z_3)D_8 = ([Z_7]Z_3)S_4 = ([Z_7]Z_3)S_4^* = G_7S_4 = G_7S_4^*,$$

причем S_4 и S_4^* – несопряженные в $PSL(2,7)$ симметрические группы степени 4. Имеем из условия теоремы $G/K = A/K \cdot B/K$, где $A/K \cong A_4$ – не дисперсивная по Оре 2-замкнутая подгруппа. По теореме Шура-Цассенхауза [10, ст. 136] получаем $A = L[K]$ и $L \cong A_4$. По условию теоремы в группе найдется абелево добавление N к не дисперсивной по Оре подгруппе L такое, что $G = LN$. Но теперь $K \subseteq N^X$, $G = LN^X$ и $K < N^X \subseteq C_G(K)$ – противоречие. Так как K – самоцентрализуемая подгруппа.

5) Группа $G/K \cong AutSL(2,8) = AutSL(2,2^3)$. В пункте I г) показано, что в группе $AutSL(2,2^n)$ нет не дисперсивных по Оре подгрупп, при $n > 2$.

6) Группа $G/K \cong SL(2,5)$. В $SL(2,5)$ существует не дисперсивная по Оре 2-замкнутая подгруппа Шмидта $[Q_8]Z_3$. Имеем из условия теоремы $G/K = A/K \cdot B/K$, где $A/K \cong [Q_8]Z_3$ – не дисперсивная по Оре 2-замкнутая подгруппа, а B/K – абелево добавление к не дисперсивной по Оре подгруппе. По теореме Шура-Цассенхауза [10, ст. 136] получаем $A = L[K]$ и $L \cong [Q_8]Z_3$3. По условию теоремы в группе найдется абелево добавление N к не дисперсивной по Оре подгруппе L такое, что $G = LN$. Подгруппа N – r-группа наибольшего порядка, $r = 5$. Следовательно, $N = G_r$ и получаем цепь включений $K < N \subseteq C_G(K)$ – противоречие. Так как K – самоцентрализуемая подгруппа. Теорема доказана полностью.

Литература

1. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 272 с.

2. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin-Heidelberg-New York : Springer-Verlag, 1967. – 793 p.

3. Шеметков, Л.А. Факторизация конечных групп / Л.А. Шеметков // Докл. АН СССР. – 1968. – Т. 178 (3). – С. 559–662.

4. Hall, Ph. Complemented groups / Ph. Hall // J. London Math. Soc. – 1937. – Т. 12. – С. 201–204.

5. Черников, С.Н. Группы с заданными свойствами системы подгрупп / С.Н. Черников. – М. : Наука, 1980. – 382 с.

6. Шериев, В.А. Группы с дополняемыми неинвариантными подгруппами / В.А. Шериев // Сиб. мат. журн. – 1967. – Т. 8(4). – С. 893–912.

7. Шеметков, Л.А. Дополнения и добавления к нормальным подгруппам конечных групп / Л.А. Шеметков // Укр. мат. журн. – 1971. – Т. 23(5). – С. 678–689.

8. Левищенко, С.С. Конечные группы с нильпотентными подгруппами непримарного индекса / С.С. Левищенко // Некоторые вопросы теории групп. – 1975. – С. 173–196.

9. Монахов, В.С. Неразрешимые конечные группы с нильпотентными добавлениями к несверхразрешимым подгруппам / В.С. Монахов // Вести академии наук Беларуси. – 1993. – Т. 3. – С. 27–29.

10. Монахов, В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов. – Минск : Высшая школа, 2006. – 320 с.

11. Монахов, В.С. Произведение конечных групп, близких к нильпотентным / В.С. Монахов // Конечные группы. – Мн. : Наука и техника, 1975. – С. 70–100.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступила в редакцию 02.04.2017