Учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»

Л. Н. Марченко, В. Н. Семенчук

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА:

булевы функции и некоторые их реализации

Практическое пособие

для студентов специальностей
1-31 03 06 «Экономическая кибернетика»,
1-31 03 03 «Прикладная математика»

Гомель
ГГУ им. Ф. Скорины
2019

УДК 512.817(076)
ББК 22.18я73
М30

Рецензенты:

кандидат физико-математических наук В. А. Ковалева,
кандидат физико-математических наук А. П. Авдашкова

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Марченко, Л. Н.
М30 Дискретная математика: булевы функции и некоторые их реализации : практическое пособие / Л. Н. Марченко, В. Н. Семенчук ; Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2019. – 47 с.
ISBN 978-985-577-541-7

В практическом пособии излагаются краткие теоретические сведения, решения типовых примеров, задания для лабораторных работ по дисциплине «Дискретная математика и математическая логика». Рассматриваются вопросы, связанные с булевыми функциями и их приложениями. Излагаемый материал представляет собой основы компьютерной математики.

Издание предназначено для студентов специальностей 1-31 03 06 «Экономическая кибернетика», 1-31 03 03 «Прикладная математика».

УДК 512.817(076)
ББК 22.18я73

ISBN 978-985-577-541-7

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

Теория булевых функций является основополагающей в прикладном развитии компьютерной математики. Булевы функции используются при разработке экспертных систем, проектировании микросхем, логическом анализе структуры программ и их тестировании, доказательстве корректности программ с помощью теории логического вывода.

В практическом пособии изложены основные идеи, понятия и методы булевых функций, которые широко используются в различных областях. Здесь рассматриваются способы задания булевых функций (табличный способ, представление полиномами и нормальными формами, геометрическое представление с использованием трехмерного куба); вопросы полноты и замкнутости систем функций, одно из приложений теории булевых функций – релейно-контактные схемы и релейно-логические схемы, а также метод резолюций.

Структура издания основана на учебной программе по дисциплине «Дискретная математика и математическая логика». Разделы практикума имеют идентичную структуру: краткие теоретические сведения, решения типовых примеров, задания для самостоятельного решения. Практическое пособие «Дискретная математика: булевы функции и некоторые их реализации» предназначено для студентов дневной формы обучения специальностей 1-31 03 06 «Экономическая кибернетика», 1-31 03 03 «Прикладная математика». Оно может использоваться для проведения лабораторных занятий и организации учебной самостоятельной работы студентов. Для более глубокого изучения материала следует обратиться к специальной литературе.

1 Элементарные булевы функции

1.1 Высказывания и логические операции

Понятие «высказывание» является первичным, оно не определяется, а поясняется. Под *высказыванием* понимается предложение, о котором можно сказать одно из двух: истинно оно или ложно.

Например, высказывание «2 + 3 = 5» – истинное, высказывание «Земля – спутник Луны» – ложное. Предложения: «Когда ты был дома?», «Пойдем со мной!» не являются высказываниями.

В исчислении высказываний не исследуется внутренняя структура и содержание высказываний, а рассматривается их свойство представлять истинность или ложь. Высказывание представляет собой величину, которая может принимать только одно из двух значений: «истина» или «ложь». Истинность или ложность высказывания рассматриваются как его *значение*. Значение «истина» обозначается 1 или И, значение «ложь» – 0 или Л.

Высказывание называется *простым*, если суждение об его истинности можно получить из самого высказывания. В противном случае высказывание называется *сложным*. Простые высказывания обозначаются малыми латинскими буквами с индексами и без них. Из простых высказываний образовываются сложные высказывания с помощью логических связок: «и», «или», «не», «если…, то», «тогда и только тогда». Значение сложного высказывания, которое оно принимает в зависимости от значений составляющих ее простых высказываний, задается таблицей истинности.

Пусть x и y высказывания. Высказывание $x \cdot y$ называется *конъюнкцией* высказываний x и y и соответствует логической связке «и» (также обозначается $x \wedge y$, $x\&y$). Конъюнкция истинна тогда и только тогда, когда высказывания x и y истинны (таблица 1.1).

Таблица 1.1 – Конъюнкция

x	y	$x \cdot y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Определение конъюнкции двух высказываний естественным образом распространяется на любое конечное число высказываний. Конъюнкция высказываний $x_1, x_2, \ldots, x_n$ обозначается $\wedge_{i=1}^{n} x_i$ и является истинной тогда и только тогда, когда все высказывания истинны.

Высказывание $x \vee y$ называется дизъюнкцией x и y и соответствует логической связке «или». Дизъюнкция $x \vee y$ истинна тогда и только тогда, когда хотя бы одно из высказываний x и y истинно (таблица 1.2).

Таблица 1.2 – Дизъюнкция

x	y	$x \vee y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Определение дизъюнкции двух высказываний естественным образом распространяется на любое конечное число высказываний. Дизъюнкция высказываний x_1,

$x_2, \ldots, x_n$ обозначается $\vee_{i=1}^{n} x_i$ и является истинной тогда и только тогда, когда хотя бы одно из высказываний истинно.

Высказывание $\bar{x}$ (или $\neg x$) называется *отрицанием* x и соответствует логической связке «не» (таблица 1.3).

Таблица 1.3 – Отрицание

x	$\bar{x}$
0	1
1	0

Высказывание $x \to y$ ($x \Rightarrow y$) называется *импликацией* высказываний x и y и соответствует связке «если x, то y». При этом высказывание x называется *посылкой* импликации, y – ее *заключением*. Импликация $x \to y$ ложна тогда, когда посылка x истинная, а заключение y – ложь (таблица 1.4).

Таблица 1.4 – Импликация

x	y	$x \to y$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Высказывание $x \leftrightarrow y$ ($x \Leftrightarrow y$, $x \sim y$) называется *эквивалентностью* высказываний x и y и соответствует связке «тогда и только тогда, когда…». Эквивалентность $x \leftrightarrow y$ истинна тогда и только тогда, когда оба высказывания x и y или истинны или ложны (таблица 1.5).

Таблица 1.5 – Эквивалентность

x	y	$x \leftrightarrow y$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Операции, соответствующие логическим связкам, называются *логическими операциями*.

1.2 Булевы функции

Будем рассматривать простые высказывания как переменные, которые принимают значения из множества $E = \{ 0, 1 \}$. Такие переменные называются *булевыми переменными*. Сложные высказывания можно рассматривать как функции, определенные на множестве E^n всевозможных n-мерных упорядоченных наборов $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ булевых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, и принимающих значения из множества, то есть $x_i \in E$.

Булевой функцией называется функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ от n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, принимающая значения 0 и 1, переменные которой также принимают значения 0 и 1: $f\colon E^n \to E$.

Набор $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ можно рассматривать как запись некоторого целого неотрицательного числа в двоичной системе счисления. Например, набору 101_2 соответствует число $5 = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$.

Все наборы $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ размерности n нумеруются целыми числами от 0 до $2^n - 1$. Число всех наборов равно 2^n.

Булева функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ может быть задана с помощью таблицы истинности (таблица 1.6), которая состоит из 2^n строк, причем в ней все наборы $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ расположены в порядке возрастания их номеров.

Таблица 1.6 – Таблица истинности

№	x_1	x_2	…	x_{n-1}	x_n	$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
0	0	0	…	0	0	$f(0, 0, \ldots, 0, 0)$
1	0	0	…	0	1	$f(0, 0, \ldots, 0, 1)$
2	0	0	…	1	0	$f(0, 0, \ldots, 1, 0)$
…	…	…	…	…	…	…
$2^n - 1$	1	1	…	1	1	$f(1, 1, \ldots, 1, 1)$

Множество всех булевых функций обозначается P_2.

Теорема 1.1. *Имеется точно* 2^{2^n} *булевых функций от n переменных*: $|P_2| = 2^{2^n}$.

Булевы функции нуля, одной и двух переменных называются *элементарными* (таблица 1.7).

Таблица 1.7 – Элементарные булевы функции

Количество переменных	Вид	Название функции
Нуль переменных	$f(x) = 0$	константа 0
	$f(x) = 1$	константа 1
Одна переменная	$f(x) = x$	тождественная функция
	$f(x) = \overline{x}$	отрицание x
Две переменные	$f(x, y) = x \cdot y$	конъюнкция x и y
	$f(x, y) = x \vee y$	дизъюнкция x и y
	$f(x, y) = x \to y$	импликация x и y
	$f(x, y) = x \leftrightarrow y$	эквивалентность x и y
	$f(x, y) = x + y$	сложение x и y по mod2
	$f(x, y) = x \mid y$	функция Шеффера
	$f(x, y) = x \downarrow y$	стрелка Пирса

Функции сложения по модулю два («исключающее или»), штрих Шеффера («не и»), стрелка Пирса («не или») задаются таблицами истинности (таблица 1.8).

Таблица 1.8

x	y	$x + y$	$x \mid y$	$x \downarrow y$
0	0	0	1	1
0	1	1	1	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0

Набор значений переменных, на котором булева функция f принимает значение, равное 1, называется *единичным* набором.

Две булевы функции f_1 и f_2 называются *равными*, если их таблицы истинности одинаковы.

Введенное понятие булевой функции несовершенно тем, что оно не позволяет рассматривать функцию от меньшего числа переменных как функцию от большего числа переменных. Для устранения этого недостатка вводится понятие фиктивной переменной.

Переменная x_i в функции $f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ называется *фиктивной*, если $f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ при любых значениях остальных переменных.

Здесь функция f, по существу, зависит от $(n-1)$ переменной, то есть представляет собой функцию $g(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$. Говорят, что функция g получается из функции f удалением фиктивной переменной, а функция f получается из g введением фиктивной переменной, причем функции f и g являются равными. Введение фиктивных переменных позволяет рассматривать булеву функцию от n переменных как функцию от любого большего числа переменных. Поэтому любую конечную совокупность булевых функций можно считать зависящей от одного и того же числа переменных.

1.3 Формулы алгебры логики

Из элементарных булевых функций с помощью логических операций можно строить формулы.

Определение формулы алгебры логики:

1) каждая «элементарная» булева функция – формула;

2) если некоторое выражение F есть формула, то $\overline{F}$ *тоже формула;*

3) если некоторые выражения F и G есть формулы, то выражения $F \cdot G$, $F \vee G$, $F \to G$, $F \leftrightarrow G$ *тоже формулы;*

4) других формул, кроме построенных по 1), 2), 3), *нет.*

Формулы обозначаются F, G, …. Например, формулой является выражение вида $F = (x \vee y) \to (x \downarrow y)$.

Замечания: 1 При упрощении формул, считается, что операция отрицания имеет наивысший приоритет, затем в порядке уменьшения приоритета следуют: конъюнкция, дизъюнкция, импликация, эквивалентность. Связки одного старшинства применяются в порядке их следования слева направо.

2 Символ конъюнкции «·» в формулах можно опускать, то есть вместо $x \cdot y$ можно писать xy, если его присутствие очевидно из контекста.

Формула F определяет некоторую булеву функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, значение которой совпадает со значениями формулы для всех наборов значений переменных $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Если задать значения всех входящих в формулу переменных $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2$, …, $x_n = \alpha_n$, где $\alpha_i \in \{ 0, 1 \}$, то используя таблицу истинности для логических связок, можно вычислить значение формулы на этом наборе: $F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \beta$, где $\beta \in \{ 0, 1 \}$. В этом случае говорят, что задана *интерпретация* формулы F на наборе $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$.

Две формулы F и G называют *равносильными*, если они определяют одну и ту же булеву функцию, и пишут $F = G$.

Отношение равносильности формул есть отношение эквивалентности:

1) рефлексивное, то есть $F = F$ для любой формулы F;

2) симметричное, то есть если $F = G$, то $G = F$ для любых формул F и G;

3) транзитивное, то есть если $F = G$ и $G = Q$, то $F = Q$ для любых формул F, G, Q.

Если какую-нибудь формулу F_1, являющуюся частью формулы F заменить формулой F_2, равносильной F_1, то полученная формула окажется равносильной F. Это свойство лежит в основе преобразования формул при упрощении или приведении к определенной форме.

1.4 Законы алгебры логики

Множество булевых функций P_2 вместе с операциями отрицания ($\bar{}$) , конъюнкции ($\cdot$) и дизъюнкции ($\vee$), называют *алгеброй логики* (*булевой алгеброй*).

Формулы можно преобразовывать, используя законы алгебры логики:

1) $x = x$ – закон тождества;

2) $x \cdot \bar{x} = 0$ – закон противоречия;

3) $x \vee \bar{x} = 1$ – закон исключительного третьего;

4) $\bar{\bar{x}} = x$ – закон двойного отрицания;

5) $x \cdot x = x$, $x \vee x = x$ – законы идемпотентности;

6) $x \cdot y = y \cdot x$, $x \vee y = y \vee x$ – законы коммутативности;

7) $x \vee (y \cdot z) = (x \vee y) \cdot (x \vee z)$, $x \cdot (y \vee z) = x \cdot y \vee x \cdot z$ – законы дистрибутивности;

8) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$, $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ – законы ассоциативности;

9) $\overline{x \cdot y} = \bar{x} \vee \bar{y}$, $\overline{x \vee y} = \bar{x} \cdot \bar{y}$ – законы де Моргана;

10) $x \cdot 1 = x$, $x \vee 0 = x$;

11) $x \cdot 0 = 0$, $x \vee 1 = 1$;

12) $x \vee x \cdot y = x$, $x \cdot (x \vee y) = x$ – законы поглощения;

13) $(x \vee y) \cdot (\bar{x} \vee y) = y$, $x \cdot y \vee \bar{x} \cdot y = y$ – законы склеивания.

Законы доказываются с помощью таблицы истинности.

Формула алгебры логики называется *тавтологией* (*тождественно истинной, общезначимой*), если она при всех значениях переменных принимает значение 1:

$$F\big|_{(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \equiv 1 \text{ для всех } (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Формула алгебры логики называется *противоречием* (*тождественно ложной*), если она при всех значениях переменных принимает значение 0:

$$F\big|_{(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \equiv 0 \text{ для всех } (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Формула алгебры логики называется *выполнимой*, если она при некоторых значениях переменных принимает значение 1.

1.5 Решение типовых примеров

Пример 1.1. Докажите: 1) $\overline{x \cdot y} = \bar{x} \vee \bar{y}$, 2) $x \to y = \bar{x} \vee y$; 3) $x \leftrightarrow y = xy \vee \bar{x}\,\bar{y}$.

Таблица 1.9 – $\overline{x \cdot y} = \bar{x} \vee \bar{y}$

x	y	xy	$\overline{x \cdot y}$	$\bar{x}$		$\bar{y}$	$\bar{x} \vee \bar{y}$
0	0	0	1	1		1	1
0	1	0	1	1		0	1
1	0	0	1	0		1	1
1	1	1	0	0		0	0

Решение. Составим таблицы истинности для формул $\overline{x \cdot y}$ и $\bar{x} \vee \bar{y}$ (таблица 1.9). Формулы $\overline{x \cdot y}$ и $\bar{x} \vee \bar{y}$ определяют одну и ту же булеву функцию и, следовательно, являются равносильными.

Аналогично доказываются формулы $x \to y = \bar{x} \vee y$ и $x \leftrightarrow y = xy \vee \bar{x}\,\bar{y}$ (таблицы 1.10 и 1.11).

Таблица 1. 10 $x \to y = \bar{x} \vee y$

x	y	$x \to y$	$\bar{x}$	$\bar{x} \vee y$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	1	0	1

Таблица 1. 11 $x \leftrightarrow y = xy \vee \bar{x}\,\bar{y}$

x	y	$x \leftrightarrow y$	$\bar{x}$	$\bar{y}$	xy	$\bar{x}\,\bar{y}$	$xy \vee \bar{x}\,\bar{y}$
0	0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0	0
1	1	1	0	0	1	0	1

Пример 1.2. Является ли тавтологией формула

$$F = (x \to (y \leftrightarrow z)) \leftrightarrow ((x \to y) \leftrightarrow (x \to z))?$$

Решение. Проверим с помощью таблицы истинности (таблица 1.12).

Таблица 1. 12 – Таблица истинности $(x \to (y \leftrightarrow z)) \leftrightarrow ((x \to y) \leftrightarrow (x \to z))$

x	y	z	$y \leftrightarrow z$	$x \to (y \leftrightarrow z)$	$x \to y$	$x \to z$	$(x \to y) \leftrightarrow (x \to z)$	F
0	0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0	1	0	1
1	1	0	0	0	1	0	0	1

Так как F принимает значения 1 на всех наборах, то F – тавтология. Докажем, что F есть тавтологией, используя законы алгебры логики.

$$(x \to (y \leftrightarrow z)) \leftrightarrow ((x \to y) \leftrightarrow (x \to z)) = [x \to y = \bar{x} \vee y] =$$

$$= (\bar{x} \vee (y \leftrightarrow z)) \leftrightarrow ((\bar{x} \vee y) \leftrightarrow (\bar{x} \vee z)) = [x \leftrightarrow y = xy \vee \bar{x}\,\bar{y}] =$$

$$= (\bar{x} \vee yz \vee \bar{y}\,\bar{z}) \leftrightarrow ((\bar{x} \vee y)(\bar{x} \vee z) \vee (\overline{\bar{x} \vee y}) \cdot (\overline{\bar{x} \vee z})) =$$

$$= (\bar{x} \vee yz \vee \bar{y}\,\bar{z}) \leftrightarrow (\bar{x} \vee \bar{x}z \vee \bar{x}y \vee yz \vee x\bar{y} \vee x\bar{z}) =$$

$$= (\bar{x} \vee yz \vee \bar{y}\,\bar{z}) \leftrightarrow (\bar{x}\,(1 \vee z \vee y) \vee yz \vee \bar{y}\,\bar{z}) =$$

$$= (\bar{x} \vee yz \vee \bar{y}\,\bar{z}) \leftrightarrow (\bar{x} \vee yz \vee \bar{y}\,\bar{z}) = 1.$$

Пример 1.3. Является ли тавтологией формула

$$F = (x \to y) \to ((y \to z) \to (x \to z))?$$

Решение. Решаем методом от противного.

Пусть $(x \to y) \to ((y \to z) \to (x \to z)) = 0$.

Тогда $\begin{cases} x \to y = 1, \\ (y \to z) \to (x \to z) = 0. \end{cases}$ Отсюда $\begin{cases} x \to y = 1, \\ y \to z = 1, \\ x \to z = 0. \end{cases}$

Откуда следует, что $x = 1$. Тогда $1 \to y = 1$, $y \to 0 = 1$, что невозможно.

Пример 1.4. Равносильны ли формулы

$$F = x \vee y \vee \bar{u} \text{ и } G = (x \to (y \vee z))(\bar{y} \to u)(xu \to \bar{z}) \to y?$$

Решение. Преобразуем формулу G, используя законы алгебры логики:

$$G = (x \to (y \vee z)(\bar{y} \to u)(xu \to \bar{z}) \to y = [a \to b = \bar{a} \vee b] =$$

$$= \overline{(\bar{x} \vee y \vee z)(\bar{\bar{y}} \vee u)(\overline{ux} \vee \bar{z})} \vee y = x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{y}\bar{u} \vee xzu \vee y =$$

$$= x\bar{y}\bar{z} \vee xzu \vee (y \vee \bar{y})(\bar{y} \vee \bar{u}) = x\bar{y}\bar{z} \vee xzu \vee \bar{y} \vee \bar{u} =$$

$$= (y \vee \bar{y})(x\bar{z} \vee y) \vee (u \vee \bar{u})(xz \vee \bar{u}) = x\bar{z} \vee y \vee xz \vee \bar{u} =$$

$$= x(\bar{z} \vee z) \vee y \vee \bar{u} = x \vee y \vee \bar{u} = F.$$

Следовательно, формулы равносильны.

Пример 1.5. Упростить формулу $F = (((x \to y) \leftrightarrow (z \to x)) \mid \bar{x}) \downarrow y$.

Решение. Преобразуем формулу F, используя законы алгебры логики:

$$F = (((x \to y) \leftrightarrow (z \to x)) \mid \bar{x}) \downarrow y = [x \mid y = \overline{xy},\ x \downarrow y = \overline{x \vee y}] =$$

$$= \overline{\overline{(\bar{x} \vee y) \leftrightarrow (\bar{z} \vee x) \cdot \bar{x}} \vee y} = \overline{((\bar{x} \vee y) + (\bar{z} \vee x)) \vee \bar{\bar{x}} \vee y} = ((\bar{x} \vee y) \leftrightarrow (\bar{z} \vee x)) \cdot \bar{x} \cdot \bar{y} =$$

$$= (\bar{x} \vee y)(\bar{z} \vee x)\ \bar{x}\bar{y} = \bar{x}\bar{y}\bar{z}.$$

Пример 1.6. Решить уравнение $xy \vee (y \to x) \vee (x \leftrightarrow z) = 0$.

Решение. Уравнение равносильно следующей системе $\begin{cases} xy = 0, \\ y \to x, \\ x \leftrightarrow z = 0. \end{cases}$

Из второго уравнения следует, что $y = 1$, $x = 0$. Ясно, что тогда $xy = 0$. Подставляя в третье уравнение, имеем $0 \leftrightarrow z = 0$. Отсюда $z = 1$. Итак, $x = 0$, $y = 1$, $z = 1$ – решение искомого уравнения.

Пример 1.7. На вопрос: «Кто из трех студентов изучал математику?» получен верный ответ: «Если изучал первый, то изучал и третий, но неверно, что если изучал второй, то изучал и третий». Кто изучал математику?

Решение. Обозначим высказывания: x – «Первый студент изучал математику»; y – «Второй студент изучал математику»; z – «Третий студент изучал математику». Составим формулы для высказываний:

«Если изучал первый, то изучал и третий»: $x \to z$,

«Если изучал второй, то изучал и третий»: $y \to z$,

«Если изучал первый, то изучали третий, но неверно, что если изучал второй, то изучал и третий»: $(x \to z) \cdot \overline{y \to z}$.

Построим таблицу истинности для логических формул (таблица 1.13).

Таблица 1.13 – Таблица истинности

x	y	z	$x \to z$	$y \to z$	$x \to z$	$(x \to z) \cdot y \to z$
0	0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	1	0	0
0	□	0	1	0	1	1
0	1	1	1	□	0	0
1	0	0	0	1	0	1
1	0	1	1	1	0	0
1	1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	1	0	0

Истинные значения высказывание $(x \to z) \cdot \overline{y \to z}$ принимает в том случае, когда первый студент изучал дискретную математику, а второй и третий – нет, или второй изучал, а первый и третий – нет.

1.6 Лабораторная работа 1 «Элементарные булевы функции»

Задание 1.1. Запишите составные высказывания, выделив простые и, введя для них обозначения:

1 Если число делится на 3 и не делится на 2, то оно не делится на 6.

2 Произведение двух чисел равно нулю тогда и только тогда, когда одно из них равно нулю.

3 Если $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) < 0$, то точка x_0 есть точка локального максимума функции.

4 Если прямая параллельна каждой из двух пересекающихся плоскостей, то она параллельна и линии их пересечения.

5 Если последовательность ограничена и монотонна, то она сходится.

6 Для того чтобы последовательность была фундаментальной, необходимо и достаточно, чтобы она была сходящейся.

7 Если ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ сходится , то $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$.

8 Если какие-либо два из трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ коллинеарные, то их смешанное произведение равно нулю.

9 Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ортогональны, то скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

10 В равнобедренном треугольнике высота является биссектрисой и медианой.

11 Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой функцией в точке x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x) = 0$.

12 Произведение бесконечно малой функции и ограниченной функции есть бесконечно малая функция.

13 Произведение двух бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция.

14 Если функция определена и непрерывна на отрезке, то она ограничена на этом отрезке.

15 Если треугольник ABC подобен треугольнику $A_1B_1C_1$, и треугольник $A_1B_1C_1$ подобен треугольнику $A_2B_2C_2$, то треугольник ABC подобен треугольнику $A_2B_2C_2$.

16 Если в параллелограмме все углы прямые и все стороны равны между собой, то этот параллелограмм есть квадрат.

Задание 1.2. Постройте таблицы истинности для следующих формул:

1	а) $(xy + \bar z) \leftrightarrow (\bar y \to z)$;	б) $((x \to \bar y) \vee (x + z))(y \mid z)$;
2	а) $(x + \bar z) \to (x \downarrow \bar y)$;	б) $((\bar x y) \downarrow (x \mid y)) \to (z \to \bar y)$;
3	а) $(x \vee y \vee \bar z)(x \downarrow y) \to z$;	б) $\overline{xy(\bar y \to z)} \to (y \to x)$;
4	а) $(y\bar z \vee \bar x \bar y) + (y \to \bar z)$;	б) $\overline{y \leftrightarrow z} \to ((x \to z) \leftrightarrow y)z$;
5	а) $(x \to y) \leftrightarrow (x + y\bar z)$;	б) $(x \vee \bar y) \to (x \downarrow \bar y) \mid z) \downarrow y$;
6	а) $(x \leftrightarrow \bar y)(x \to z) + \bar x$;	б) $\overline{(x \leftrightarrow y) \to (x \to \bar y z)} \to \bar x z$;
7	а) $(x \mid y) + (y \to \bar x \bar z)$;	б) $(((x \downarrow y) \mid z) \vee x) \downarrow y$;
8	а) $(xy + z) \to (x \mid \bar y)$;	б) $((\bar x \to y) \to (x + yz)) \vee (x \downarrow y)$;
9	а) $((x \mid y) \downarrow \bar z) + (x \vee \bar y)$;	б) $\overline{(x \vee \bar y) \to (\bar x \mid z)} \mid \bar y$;
10	а) $(x \mid y) \to (x + \bar z)$;	б) $\overline{(x + \bar y) \vee (y \mid \bar z)} \to ((x \to z) \vee \bar y)$;
11	а) $(((x + y) \mid z) \mid x) y$;	б) $((x \to y) \downarrow \bar z) \leftrightarrow (x \vee \bar y)$;
12	а) $\overline{\bar x \leftrightarrow y} \to ((x \vee z) \leftrightarrow y)$;	б) $(x + y) \downarrow (x \mid y\bar z)$;
13	а) $((\bar x \vee y) \to z) + (xy \to z)$;	б) $((y \leftrightarrow \bar z) \vee \bar x \bar y)(y \to \bar z)$;
14	а) $(yz \to \bar x y) \mid (x \to y\bar z)$;	б) $((\bar y \vee xz) \to (y + z)) \mid (x \downarrow y)$;
15	а) $(((x \vee y) \mid \bar y) \to z) + y$;	б) $(\bar x \bar y + z) \to (y \to xz)$;
16	а) $(((x \to y) \mid z) \downarrow x) \vee z$;	б) $((\bar y \to x) \downarrow z) + (x \mid y)$.

Задание 1.3. Решите уравнения:

1 $x \to (y \to z) = xz \to \bar y$;

2 $x \leftrightarrow z\bar y = z \downarrow y \to x$;

3 $(x \mid y) \vee \bar z = (\bar x \downarrow z)$;

4 $\bar x \to (x \to z) = (x \vee \bar y)z$;

5 $(z \to y) \vee \bar x = (y \to z)x$;

6 $(x \to y) \vee (y \to z) = (x \downarrow y)z$;

9 $xz \to y = x \downarrow yz$;

10 $xy \vee (y \to x) \vee (x \to z) = 0$;

11 $\bar x + (x \mid z) = (x \downarrow \bar y) \vee z$;

12 $y + xz = z \downarrow (x\bar y)$

13 $(x \mid z) \vee (\bar x \to y) = (x \vee y) \mid z$;

14 $(x \leftrightarrow z)(x \downarrow y) = xy + z$;

7 $xz \to y = y \to ((x \vee \bar{y})z)$;

8 $\overline{x \to y} \vee z = x\bar{y}z$;

15 $\overline{x+y} \vee \bar{y} = x \to \bar{y}z$;

16 $y \to xz = z \mid (x\bar{y})$.

Задание 1.4. С помощью равносильных преобразований докажите, что формулы являются тавтологией:

1 $((y \to x) \to y) \to y$;

2 $(\bar{x} \to \bar{y}) \to (y \to x)$;

3 $(x \to y) \to ((\bar{x} \to y) \to y)$;

4 $(x \to y) \to ((x \to \bar{y}) \to \bar{x})$;

5 $(\bar{x} \to \bar{y})\ ((\bar{y} \to x) \to x)$;

6 $(\bar{y} \to \bar{x}) \to (x \to y)$;

7 $((x \to y) \to x) \to x$;

8 $xy \to (z \to xy)$;

9 $(x \to y) \to ((y \to z) \to (x \to z))$;

10 $(x \to y) \to ((x \to (y \to z)) \to (x \to z))$;

11 $(y \to z) \to ((x \vee y) \to (x \vee z))$;

12 $(x \to y) \to ((x \to z) \to (xy \to z))$;

13 $(x \to z) \to ((y \to z) \to ((x \vee y) \to z))$;

14 $(x \to y) \to ((x \to \bar{y}) \to \bar{x})$;

15 $(\bar{x} \to z) \to ((\bar{y} \to \bar{z}) \vee z)$;

16 $x \to (y \to ((x \vee y) \to xy))$.

Задание 1.5. С помощью равносильных преобразований докажите, что формулы являются противоречием:

1 $\overline{x \to (y \to xy)}$;

2 $(x \leftrightarrow y)\overline{x \to (y \to xy)}$;

3 $(x \to y)x\bar{y}$;

4 $(x \to (y \to z))xy\bar{z}$;

5 $\overline{x \to (y \to (x \leftrightarrow y))}$;

6 $\overline{(\bar{x} \to \bar{y}) \to (y \to x)}$;

7 $\overline{y \to (x \to xy)}$;

8 $(\bar{x} \to y) \to (\bar{y} \to x)$;

9 $(\bar{y} \to x)(x + y)\bar{x}\,\bar{y}$;

10 $\overline{\bar{y}z \to (y \to xyz)}$;

11 $(y \to (x \to z))xy\bar{z}$;

12 $(x \to y)(x + y)\ \bar{y}$;

13 $(\bar{y} \to x)(x \leftrightarrow y)\bar{y}$;

14 $(x \to y)(x \to \bar{y})\,x$;

15 $\overline{(x \leftrightarrow y) \to (x \to y)}$;

16 $\overline{(x \leftrightarrow y)(x \downarrow y)(\bar{x} \to y)}$.

Задание 1.6. Упростите формулы задания 1.2 с помощью законов алгебры логики.

2 Нормальные формы

2.1 Дизъюнктивная нормальная форма

Пусть σ – параметр, равный 0 или 1. Введем обозначение

$$x^{\sigma} = \begin{cases} x, & \text{если } \sigma = 1, \\ \bar{x}, & \text{если } \sigma = 0. \end{cases}$$

Очевидно, что $x^{\sigma} = 1$, тогда и только тогда, когда $x = \sigma$.

Элементарной конъюнкцией называется конъюнкция $K = x_{i_1}^{\sigma_1} x_{i_2}^{\sigma_2} \ldots x_{i_t}^{\sigma_t}$, $t \le n$, у которой каждая переменная взята с отрицанием или без отрицания.

Дизъюнкция элементарных конъюнкций $D = K_1 \vee K_2 \vee \ldots \vee K_m$ называется *дизъюнктивной нормальной формой* (ДНФ).

Все логические операции можно свести к трем: конъюнкции, дизъюнкции и отрицания. Причем, ввиду закона де Моргана, знак отрицания можно предполагать отнесенным только к переменным. Используя дистрибутивный закон, раскрываем скобки и получаем ДНФ.

Теорема 2.1. *Для любой формулы алгебры логики существует равносильная ей дизъюнктивная нормальная форма.*

Существует 2^n различных наборов переменных $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n$. Значит, имеется 2^n различных конъюнкций $x_1^{\sigma_1}\, x_2^{\sigma_2} \ldots x_n^{\sigma_n}$. Конъюнкция $x_1^{\sigma_1}\, x_2^{\sigma_2} \ldots x_n^{\sigma_n} = 1$ тогда и только тогда, когда $x_i = \sigma_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Теорема 2.2. *Любая булева функция* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *кроме константы* 0 *может быть представлена в виде дизъюнкции конъюнкций единицы по всем наборам* $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n)$ *таким, что* $f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n) = 1$:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigvee_{\substack{(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) \\ f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = 1}} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \ldots x_n^{\sigma_n}. \qquad (2.1)$$

Представление булевой функции в виде (2.1) называется *совершенной дизъюнктивной нормальной формой* (СДНФ).

СДНФ есть дизъюнктивная нормальная форма, в которой: 1) все конъюнкции попарно различны; 2) каждая конъюнкция содержит ровно n переменных; 3) в каждой конъюнкции встречаются все n переменных.

Способы построения СДНФ

1-й способ (*с помощью таблицы истинности*):

1) составляется таблица истинности для функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$;

2) помечаются все наборы $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n)$, для которых $f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n) = 1$;

3) для каждого набора образуется конъюнкция $x_1^{\sigma_1}\, x_2^{\sigma_2} \ldots x_n^{\sigma_n}$;

4) все полученные конъюнкции соединяются знаком дизъюнкции.

2-й способ (*с помощью законов алгебры логики*):

1) находится ДНФ;

2) в дизъюнкты с недостающими переменными добавляются конъюнкции из этих переменных $a \vee \bar{a}$;

3) используется дистрибутивный закон $a(b \vee c) = ab \vee ac$.

2.2 Конъюнктивная нормальная форма

Дизъюнктом называется дизъюнкция $D_t = \overline{x_{i_1}^{\sigma_1}} \vee \overline{x_{i_2}^{\sigma_2}} \vee \ldots \vee \overline{x_{i_t}^{\sigma_t}}$. Конъюнкция дизъюнктов вида $K = D_1 D_2 \ldots D_m$ называется *конъюнктивной нормальной формой* (КНФ).

Теорема 2.3. *Для любой формулы алгебры логики существует равносильная ей конъюнктивная нормальная форма.*

Различных наборов переменных $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n$ равно 2^n, значит, имеется ровно 2^n различных дизъюнктов $\overline{x_1^{\sigma_1}} \vee \overline{x_2^{\sigma_2}} \vee \ldots \vee \overline{x_n^{\sigma_n}}$. Дизъюнкт $\overline{x_1^{\sigma_1}} \vee \overline{x_2^{\sigma_2}} \vee \ldots \vee \overline{x_n^{\sigma_n}} = 0$ тогда и только тогда, когда $x_i = \sigma_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Теорема 2.4. *Любая булева функция* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$*, кроме константы 1, может быть представлена в виде конъюнкции дизъюнктов по всем наборам* $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n)$ *таким, что* $f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n) = 0$:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigwedge_{\substack{(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) \\ f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = 0}} \overline{x_1^{\sigma_1}}\;\overline{x_2^{\sigma_2}} \ldots \overline{x_n^{\sigma n}}. \qquad (2.2)$$

Представление булевой функции в виде (2.2) называется *совершенной конъюнктивной нормальной формой* (СКНФ).

СКНФ есть конъюнктивная нормальная форма, в которой: 1) все дизъюнкты попарно различны; 2) каждый дизъюнкт содержит ровно n переменных; 3) в каждом дизъюнкте встречаются все n переменных.

Способы построения СКНФ

1-й способ (*с помощью таблицы истинности*):

1) составляется таблицу истинности для функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$;

2) помечаются все наборы $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n)$, для которых $f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n) = 0$;

3) для каждого набора образуется дизъюнкт $\overline{x_1^{\sigma_1}} \vee \overline{x_2^{\sigma_2}} \vee \ldots \vee$;

4) все полученные дизъюнкты соединяются знаком дизъюнкции.

2-й способ (*с помощью законов алгебры логики*):

1) находится КНФ;

2) в дизъюнкты с недостающими переменными добавляются конъюнкции из этих переменных $a \cdot \overline{a}$;

3) используется дистрибутивный закон $a \vee bc = (a \vee b)(a \vee c)$.

2.3 Проблема разрешимости формул алгебры логики

Проблемы разрешения: указать способ (алгоритм), позволяющий для каждой формулы алгебры логики выяснить, является она тождественно истинной или нет. Для того чтобы определить, является ли формула тождественно истинной или нет, достаточно составить ее таблицу истинности. Данный способ, хотя и дает принципиальное решение проблемы разрешимости, но довольно громоздкий. Второй способ основан на приведении формул к нормальной форме.

Теорема 2.5. *Формула F алгебры логики тогда и только тогда является тождественно истинной, когда каждая дизъюнкция в ее конъюнктивной нормальной форме содержит некоторую переменную вместе с ее отрицанием.*

Теорема 2.6. *Формула F алгебры логики тогда и только тогда является тождественно ложной, когда каждая конъюнкция в ее дизъюнктивной нормальной форме содержит некоторую переменную вместе с ее отрицанием.*

2.4 Полином Жегалкина

Множество булевых функций с операциями конъюнкции и сложения (по модулю два), называется *алгеброй Жегалкина.*

Законы алгебры Жегалкина:

1) закон коммутативности: $x + y = y + x$;
2) закон ассоциативности: $x + (y + z) = (x + y) + z$;
3) закон дистрибутивности: $x\,(y + z) = xy + xz$;
4) $x + x = 0$; $x + 0 = x$.

Полиномом Жегалкина называется полином вида $\Sigma x_{i1}x_{i2}...x_{in} + a$, причем в каждом наборе (i_1, i_2, …, i_k) все координаты различны, суммирование ведется по множеству таких несовпадающих наборов, a – константа 0 или 1.

Связь между операциями булевой алгебры и алгебры Жегалкина определяется по формулам: $\bar{x} = x + 1$, $x \vee y = xy + x + y$.

Теорема 2.7. *Каждая булева функция может быть единственным образом выражена при помощи полинома Жегалкина.*

2.4 Решение типовых примеров

Пример 2.1. Найдите ДНФ и КНФ для формулы $xy \leftrightarrow z$.

Решение. Используя закон $a \leftrightarrow b = ab \vee \bar{a}\,\bar{b}$, исключаем эквивалентность: $xy \leftrightarrow z = xyz \vee \overline{xy}\,\bar{z}$. Используя закон де Моргана, получаем

$$xy \leftrightarrow z = xyz \vee \overline{xy}\,\bar{z} = xyz \vee (\bar{x} \vee \bar{y})\,\bar{z}\,.$$

Раскрывая скобки, получаем ДНФ

$$xy \leftrightarrow z = xyz \vee \overline{xy}\,\bar{z} = xyz \vee (\bar{x} \vee \bar{y})\,\bar{z} = xyz \vee \bar{x}\,\bar{z} \vee \bar{y}\,\bar{z}\,.$$

Применяя дистрибутивный закон $a \vee bc = (a \vee b)(a \vee c)$, получим:

$$xy \leftrightarrow z = xyz \vee (\bar{x} \vee \bar{y})\,\bar{z} = (xyz \vee \bar{x} \vee \bar{y})(xyz \vee \bar{z}) =$$

$$= (x \vee \bar{x} \vee \bar{y})(y \vee \bar{x} \vee \bar{y})(z \vee \bar{x} \vee \bar{y})\,(x \vee \bar{z})(y \vee \bar{z})\,(z \vee \bar{z}) =$$

$$= [z \vee \bar{z} = 1,\ a \cdot 1 = a,\ a \vee 1 = 1] = (x \vee \bar{z})(y \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z).$$

Пример 2.2. Найдите ДНФ для формулы $(x \to y)\,\overline{yz}\,\overline{uv}$.

Решение. Исключая импликацию по закону $a \to b = \bar{a} \vee b$, применяя законы де Моргана, двойного отрицания и дистрибутивности, получаем

$$(x \to y)\ \overline{yz}\,\overline{uv} = (\bar{x} \vee y)(y \vee \bar{z})(\bar{u} \vee \bar{v}) = (\bar{x}\,\bar{z} \vee y)\,(\bar{u} \vee \bar{v}) =$$

$$= \bar{x}\,\bar{z}\,\bar{u} \vee \bar{x}\,\bar{z}\,\bar{v} \vee y\bar{u} \vee y\bar{v}.$$

Последнее выражение есть дизъюнктивная нормальная форма.

Таблица 2.1 –Таблица истинности формулы $(x \to \bar{y}) \to z$

x	y	z	$\bar{y}$	$x \to \bar{y}$	$(x \to \bar{y}) \to z$
0	0	0	1	1	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1
1	1	1	0	0	1

Пример 2.3. Найдите СДНФ для функции $(x \to \bar{y}) \to z$.

Решение. Составим таблицы истинности формулы (таблица 2.1). Единичные наборы: 001, 011, 101, 110, 111, для которых элементарные конъюнкции соответственно равны

$$x^0y^0z^1,\ x^0y^1z^1,\ x^1y^0z^1,\ x^1y^1z^0,\ x^1y^1z^1.$$

Тогда СДНФ имеет вид

$$x^0y^0z^1 \vee x^0y^1z^1 \vee x^1y^0z^1 \vee x^1y^1z^0 \vee x^1y^1z^1 = \bar{x}\,\bar{y}z \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z} \vee xyz.$$

Найдем СДНФ, используя законы алгебры логики

$$(x \to \bar{y}) \to z = \overline{\bar{x} \vee \bar{y}} \vee z = xy \vee z = xy(z \vee \bar{z}) \vee (x \vee \bar{x})(y \vee \bar{y})z =$$

$$= xyz \vee xy\bar{z} \vee xyz \vee x\bar{y}z \vee \bar{x}yz \vee \bar{x}\,\bar{y}z = \bar{x}\,\bar{y}z \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z} \vee xyz.$$

Пример 2.4. Найдите СКНФ для функции $(x \to \bar{y}) \to z$.

Решение. Нулевые наборы (таблица 2.1) есть 000, 010, 100. Соответствующие дизъюнкты – $\overline{x^0} \vee \overline{y^0} \vee \overline{z^0}$, $\overline{x^0} \vee \overline{y^1} \vee \overline{z^0}$, $\overline{x^1} \vee \overline{y^0} \vee \overline{z^0}$. Тогда СКНФ есть

$$(x \to \bar{y}) \to z = (\overline{x^0} \vee \overline{y^0} \vee \overline{z^0})(\overline{x^0} \vee \overline{y^1} \vee \overline{z^0})(\overline{x^1} \vee \overline{y^0} \vee \overline{z^0}) =$$

$$= (x \vee y \vee z)(x \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee y \vee z).$$

Найдем СДНФ, используя законы алгебры логики

$$(x \to \bar{y}) \to z = \overline{\bar{x} \vee \bar{y}} \vee z = xy \vee z = (x \vee z)(y \vee z) = (x \vee y\bar{y} \vee z)(x\bar{x} \vee y \vee z) =$$

$$= (x \vee y \vee z)\,(x \vee \bar{y} \vee z)\,(\bar{x} \vee y \vee z).$$

Пример 2.5. Является ли формула $x \to (y \to xy)$ тавтологией?

Решение. Используя, что $a \to b = \bar{a} \vee b$, получаем

$$\bar{x} \vee \bar{y} \vee xy = (\bar{x} \vee \bar{y} \vee x)\,(\bar{x} \vee \bar{y} \vee y).$$

Так как каждая элементарная дизъюнкция содержит некоторую переменную вместе с ее отрицанием, то формула тождественно истинна.

Пример 2.6. Найдите полином Жегалкина импликации $x \to y$.

Решение. Коэффициенты полинома Жегалкина найдем тремя способами.

1-й способ – метод неопределенных коэффициентов.

Полином Жегалкина в общем виде имеет вид $x \to y = axy + bx + cy + d$.

При $x = y = 0$ имеем $d = 1$. При $x = 0$, $y = 1$ имеем $a = 0$. При $x = 1$, $y = 0$ имеем $b = 1$. При $x = 1$, $y = 0$ имеем $1 = a + b + c + d = a + 1 + 0 + 1 = a$, то есть $a = 1$. Отсюда $x \to y = xy + x + 1$.

2-й способ – с помощью законов алгебры логики и алгебры Жегалкина:

$$x \to y = \bar{x} \vee y = \overline{x\bar{y}} = \overline{x(y+1)} = x(y + 1) + 1 = xy + x + 1.$$

3-й способ – с помощью треугольника Паскаля. В таблице 2.2 в столбце «Треугольник Паскаля» записаны значения функции $f(x, y) = x \to y$ в строке, соответствующей первому набору 00. Каждая следующая строка есть сложение по модулю два элементов предыдущей строки. Крайние левые элементы каждой строки (выделены жирным шрифтом) соответствуют коэффициентам слагаемых полинома Жегалкина.

Таблица 2.2 – Импликация

x	y	$x \to y$	Треугольник Паскаля	Слагаемые
0	0	1	**1** 1 0 1	1
0	**1**	1	**0** 1 1	$0 \cdot y$
1	0	0	**1** 0	$1 \cdot x$
1	**1**	1	**1**	$1 \cdot xy$

Пример 2.7. Постройте полином Жегалкина функции $f = 10011110$.

Таблица 2.3 – Построение полинома Жегалкина функции $f(x, y, z) = 10011110$

x	y	z	Треугольник Паскаля	Слагаемые
0	0	0	**1** 0 0 1 1 1 1 0	1
0	0	1	**1** 0 1 0 0 0 1	$1 \cdot z$
0	1	0	**1** 1 1 0 0 1	$1 \cdot y$
0	1	1	**0** 0 1 0 1	$0 \cdot yz$
1	0	0	**0** 1 1 1	$0 \cdot x$
1	0	1	**1** 0 0	$1 \cdot xz$
1	1	0	**1** 0	$1 \cdot xy$
1	1	1	**1**	$1 \cdot xyz$

Решение. Решение представим в таблице истинности (таблица 2.3). Полином Жегалкина имеет вид

$$f(x, y, z) = 1 + z + y + xz + xy + xyz.$$

2.5 Лабораторная работа 2 «Нормальные формы, полином Жегалкина»

Задание 2.1. Найдите СКНФ, СДНФ и полином Жегалкина для функции задания 1.2 двумя способами: 1) с помощью таблицы истинности; 2) с помощью законов алгебры логики.

Задание 2.2. Найти СКНФ, СДНФ и полином Жегалкина для функций:

1 $f(x, y, z) = 01101011$;
2 $f(x, y, z) = 10101001$;
3 $f(x, y, z) = 01001111$;
4 $f(x, y, z) = 11001011$;
9 $f(x, y, z) = 01111011$;
10 $f(x, y, z) = 11100011$;
11 $f(x, y, z) = 11101001$;
12 $f(x, y, z) = 01110011$;

5 $f(x, y, z) = 01101111$;
6 $f(x, y, z) = 01101010$;
7 $f(x, y, z) = 01001111$;
8 $f(x, y, z) = 10100111$;
13 $f(x, y, z) = 01001011$;
14 $f(x, y, z) = 11100100$;
15 $f(x, y, z) = 01101000$;
16 $f(x, y, z) = 11110100$.

3 Минимизация булевых функций

3.1 Проблема минимизации в классе ДНФ

Пусть для функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ одна из ДНФ имеет вид

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = K_1 \vee K_2 \vee \dots \vee K_m ,$$

где $K_t = x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \dots x_t^{\sigma_t}$ – элементарная конъюнкция, в которую переменные входят в установленном порядке, но не обязательно все, $t = 1, \dots, m$.

Число переменных в конъюнкции K_t называется ее *рангом* r_t. *Рангом* ДНФ (сложностью) называется число $R = r_1 + r_2 + \dots + r_m$.

ДНФ функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется *минимальной*, если ей соответствует наименьший суммарный ранг R по сравнению с другими ДНФ функции.

Теорема 3.1. *Число различных ДНФ, составленных из переменных* $x_1, x_2, \dots, x_n$, *равно* 2^{3^n}.

Сопоставим каждой булевой функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ множество точек

$$N_f = \{ \alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n) \mid f(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1 \},$$

которое называется *областью истинности* функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

<u>Свойства области истинности</u>:

1) булевой функции $\bar{f}$ соответствует подмножество $E^n \setminus N_f$;

2) булевой функции $f_1 \cdot f_2$ соответствует подмножество $N_{f_1} \cap N_{f_2}$;

3) булевой функции $f_1 \vee f_2$ соответствует подмножество $N_{f_1} \cup N_{f_2}$.

Пусть $f = K_1 \vee K_2 \vee \dots \vee K_m$ – ДНФ, где K_t – элементарные конъюнкции.

Подмножество N_K называется *интервалом* r-го ранга, если оно соответствует элементарной конъюнкции K, ранг которой равен r.

Покрытие $N_f = N_{K_1} \cup \dots \cup N_{K_m}$ соответствует ДНФ $K_1 \vee \dots \vee K_m$ булевой функции f с интервалами $N_{K_1}, \dots, N_{K_m}$ такими, что $N_{K_e} \subseteq N_f$. Интервал $N_K \subseteq N_f$ называется *максимальным*, если не существует интервала $N_{K'}$ такого, что $N_K \subset N_{K'} \subseteq N_f$. Если $N_{K_1}, \dots, N_{K_s}$ – список всех максимальных интервалов подмножества N_f, то $N_f = N_{K_1} \cup \dots \cup N_{K_s}$.

ДНФ $K_1 \vee K_2 \vee \ldots \vee K_s$ булевой функции f, соответствующая покрытию области истинности N_f всеми максимальными интервалами, называется *сокращенной* ДНФ функции f.

Теорема 3.2. *Минимальная ДНФ булевой функции получается из сокращенной ДНФ путем удаления некоторых элементарных конъюнкций.*

Пусть $K = x_1x_2\ldots x_r$ – любая элементарная конъюнкция из сокращенной ДНФ. Конъюнкция K является единственной конъюнкцией, которая обращается в единицу в вершине с координатами $x_1 = \ldots = x_r = 1$, $x_{r+1} = \ldots = x_n = 0$. Сокращенная ДНФ в большинстве случаев допускает дальнейшие упрощения за счет того, что некоторые элементарные конъюнкции могут поглощаться дизъюнкциями других элементарных конъюнкций.

Покрытие области истинности булевой функции f максимальными интервалами называется *неприводимым*, если после удаления из него любого интервала оно перестает быть покрытием. ДНФ булевой функции f, соответствующая неприводимому покрытию, называется *тупиковой*.

Теорема 3.3. *Всякая минимальная ДНФ является тупиковой.*

Проблема минимизации: среди всех ДНФ булевой функции $f(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ найти минимальную ДНФ.

Общая схема минимизации булевой функции: 1) строится сокращенная ДНФ по всем максимальным интервалам; 2) строятся все тупиковые ДНФ; 3) среди тупиковых ДНФ находятся минимальные ДНФ.

3.2 Построение сокращенной ДНФ

3.2.1 Геометрический метод

Пусть E^n множество всех точек $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, где $a_i \in \{ 0, 1 \}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Данные точки образуют множество всех вершин n-мерного единичного куба, которые не ограничивая общности будем записывать в виде $a_1a_2\ldots a_n$ (рисунок 3.1).

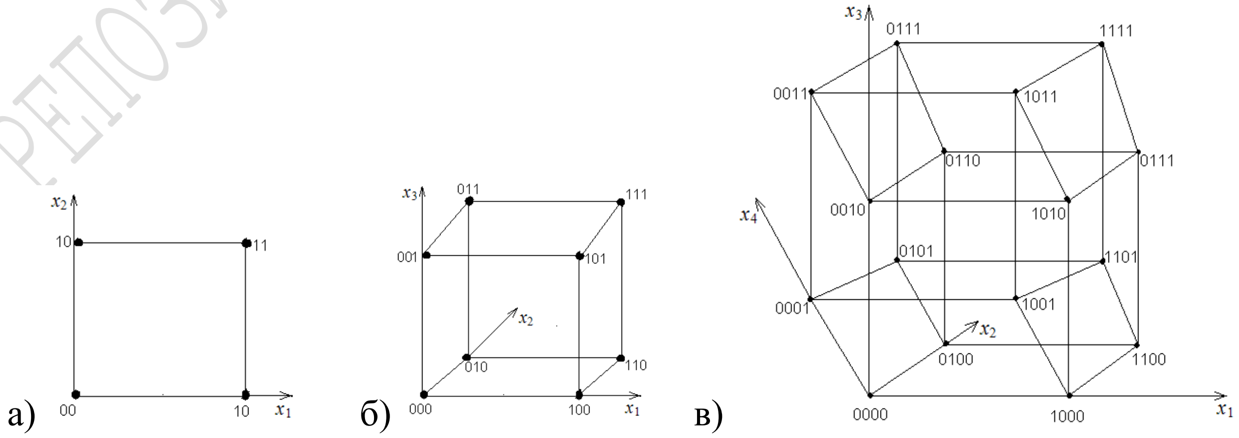


Рисунок 3.1 – n-мерный единичный куб: а) $n = 2$; б) $n = 3$; в) $n = 4$

Пусть $N_f = \{\ \alpha = a_1a_2\ldots a_n \mid f(a_1, a_2,\ldots, a_n) = 1\ \}$ область истинности функции $f(x_1, x_2,\ldots, x_n)$. Пометим вершины куба, соответствующие единичным наборам $\alpha = a_1a_2\ldots a_n$. Каждая элементарная конъюнкция m переменных, образует $(n - m)$-мерный интервал куба E^n. Интервалом являются вершина, ребро, грань и так далее. Для построения сокращенной ДНФ надо найти такой набор максимальных интервалов, чтобы они в совокупности образовывали покрытие N_f. Причем сумма их рангов должна быть минимальной. Каждому максимальному интервалу соответствует элементарная конъюнкция, в которую входят переменные, не меняющие своих значений в пределах интервала. Причем, если неизменное значение 1, то входит сама переменная, если 0, то – ее отрицание. Объединяя элементарные конъюнкции дизъюнкцией, получается сокращенная ДНФ. Практическое использование при $n > 4$ нецелесообразно.

3.2.2 Метод Блейка

Метод Блейка позволяет построить сокращенную ДНФ булевой функции, если она задана произвольной ДНФ.

Теорема 3.4. (Блейк) *Если в произвольной ДНФ булевой функции f произвести все возможные обобщения склеивания и устранить затем все элементарные поглощения, то получится сокращенная ДНФ функции f.*

Согласно методу Блейка, сначала находится ДНФ. Затем производятся обобщенные склеивания по формуле $xA \vee \bar{x}B = xA \vee \bar{x}B \vee AB$ до тех пор, пока это возможно. Далее применяется правило поглощения $A \vee AB = A$.

3.2.3 Метод Нельсона

Метод Нельсона позволяет построить сокращенную ДНФ булевой функции, если она задана произвольной КНФ.

Теорема 3.5. *Если в произвольной КНФ булевой функции f раскрыть все скобки в соответствии с дистрибутивным законом и устранить все элементарные поглощения, то получится сокращенная ДНФ функции f.*

Согласно методу Нельсона, сначала находится КНФ. Затем раскрываются скобки в соответствии с дистрибутивным законом $a(b \vee c) = ab \vee ac$, и применяется правило поглощения $A \vee AB = A$.

3.2.4 Метод минимизирующих карт Карно

$x_1\ x_2$ \ x_3	0	1
00		
01		
11		
10		

а) $n = 3$

$x_1\ x_2$ \ x_3 x_4	0 0	0 1	1 1	1 0
0 0				
0 1				
1 1				
1 0				

б) $n = 4$

Рисунок 3.2 – Карты Карно

Карты Карно – это графическое представление операций попарного неполного склеивания и элементарного поглощения. Карта Карно рассматривается как перестроенная соответствующим образом таблица истинности булевой функции, которая представляет собой плоскую развертку n-мерного единичного куба E^n. Карта Карно может быть составлена для любого количества переменных, однако удобно работать при $n \le 4$. Каждая клетка карты Карно соответствует вершине куба (рисунок 3.2). Соседние клетки различаются только одной переменной.

В клетках карты Карно записываются единичные значения булевой функции. Сокращенная ДНФ получается путем объединения (склеивания) клеток карты Карно в максимальные интервалы.

<u>Правило объединения клеток карты Карно для сокращенной ДНФ:</u>

– клетки карты Карно объединяются только по единицам;

– объединять можно только прямоугольные области или квадраты с числом единиц 2^i, где $i = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$;

– крайние клетки каждой горизонтали и каждой вертикали также граничат между собой и могут объединяться в интервалы. Для $n = 4$ все четыре угловые клетки считаются граничными и объединяются в квадрат;

– все единицы должны попасть в какой-либо интервал;

– число интервалов должно быть как можно меньше, а число клеток в интервале должно быть как можно больше;

– интервалы могут пересекаться;

– возможно несколько вариантов покрытия, а соответственно и несколько эквивалентных друг другу сокращенных ДНФ, которые соответствуют разным способам покрытия максимальными интервалами.

Каждому максимальному интервалу соответствует элементарная конъюнкция, в которую входят переменные, не меняющие своих значений в пределах интервала. Причем если неизменное значение 1, то входит сама переменная, если 0, то – ее отрицание. При объединении элементарных конъюнкций дизъюнкцией получается сокращенная ДНФ.

3.3 Построение минимальной ДНФ

Область истинности функции $f(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ есть $N_f = \{ \alpha_j, j = 1, 2, \ldots, m \}$.

3.3.1 Метод Квайна

Методом Квайна находятся все тупиковые ДНФ функции $f(x_1, x_2,\ldots, x_n)$.

Строится сокращенная ДНФ: $f = K_1 \vee K_2 \vee \ldots \vee K_t$. Для каждого набора $\alpha_j \in N_f$, выделяются все элементарные конъюнкции $K_{1j}, K_{2j}, \ldots, K_{tj}$ такие, что $K_{ij} = K_i(\alpha_j) = 1, j = 1, 2, \ldots, m, i = 1, 2, \ldots, t$. Далее составляется выражение вида

$$(K_{11} \vee K_{21} \vee\ldots \vee K_{t1})(K_{12} \vee K_{22} \vee\ldots \vee K_{t2})(K_{1m} \vee K_{2m} \vee\ldots \vee K_{tm}) \quad (3.1)$$

К выражению (3.1) применяются законы дистрибутивности и поглощения. В результате получается дизъюнкция вида $\underset{i}{\vee} K_{i1}K_{i2}\ldots K_{ip}$. Каждая ДНФ $K_{i1} \vee K_{i2} \vee \ldots \vee K_{ip}$ является тупиковой ДНФ булевой функции $f(x_1, x_2,\ldots, x_n)$. Среди тупиковых ДНФ выделяются дизъюнкции с наименьшим рангом, которые и являются минимальными.

3.3.2 Метод импликантных матриц

Для булевой функции $f(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ находится сокращенная ДНФ $f = K_1 \vee K_2 \vee \ldots \vee K_s$. Для каждой K_i определяется набор α_j такой, что $K_i(\alpha_j) = 1$. По сокращенной ДНФ строится импликантная матрица, представляющая собой таблицу, строки которой соответствуют элементарным конъюнкциям $K_1, K_2, \ldots, K_s$, столбцы – наборам $\alpha_j \in N_f$, $j = 1, 2, \ldots, m$.

Таблица 3.1

	α_1	α_2	…	α_j	…	α_m
K_1	+		…		…	+
…	…	…	…	…	…	…
K_i	+	+	…	+	…	
…		+	…		…	+
K_s	+		…		…	

Клетка импликантной матрицы, образованная пересечением i-й строки и j-го столбца помечается «+» (таблица 3.1). Чтобы получить минимальную ДНФ функции $f(x_1, x_2,\ldots, x_n)$, достаточно найти минимальное число строк, которые совместно накрывают «+» все столбцы импликантной матрицы.

3.4 Решение типовых примеров

Пример 3.1. Найдите сокращенную ДНФ функции

$$f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_3 \vee x_1x_2,$$

используя различные методы.

Таблица 3.2 – Таблица истинности функции $f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_3 \vee x_1x_2$

x_1	x_2	x_3	$\bar{x}_2 x_3$	$\bar{x}_1 x_3$		x_1x_2	f
0	0	0	0	0		0	0
0	0	1	1	1		0	1
0	1	0	0	0		0	0
0	1	1	0	1		0	1
1	0	0	0	0		0	0
1	0	1	1	0		0	1
1	1	0	0	0		1	1
1	1	1	0	0		1	1

Решение. Из таблицы истинности функции (таблица 3.2) получаем область истинности

$$N_f = \{ 001, 011, 101, 110, 111 \}.$$

1 Геометрический метод. На единичном кубе E^3 пометим вершины из N_f (рисунок 3.3). Максимальными интервалами, покрывающими все вершины, являются:

$$N_{K_1} = \{ 001, 011, 111, 101 \}, N_{K_2} = \{ 110, 111 \}.$$

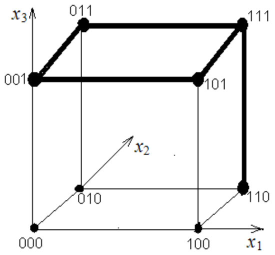


Рисунок 3.3 – Максимальные интервалы

На интервале N_{K_1} не изменяет свои значения только одна переменная x_3, поэтому $K_1 = x_3$. На интервале N_{K_2} переменные x_1 и x_2

не изменяют свои значения, поэтому $K_2 = x_1x_2$. Тогда сокращенная ДНФ имеет вид $f(x_1, x_2, x_3) = x_3 \vee x_1x_2$.

2 Метод Блейка. Применяя правило $xA \vee \bar{x}B = xA \vee \bar{x}B \vee AB$, имеем

$$f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_3 \vee x_1x_2 = \bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_3 \vee x_1x_2 \vee x_2x_3 \vee x_3 \vee x_1x_3 =$$
$$= x_3\,(1 \vee x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1) \vee x_1x_2 = x_3 \vee x_1x_2.$$

3 Метод минимизирующих карт Карно. Карта Карно функции представлена на рисунке 3.4. Объединяя клетки карты Карно в максимальные интервалы, получаем

x_1x_2 \ x_3	0	1
00		1
01		1
11	1	1
10		1

Рисунок 3.4 – Карта Карно

$N_{K_1} = \{ 001, 011, 111, 101 \}$, $N_{K_2} = \{ 110, 111 \}$,

для которых соответственно $K_1 = x_3$ и $K_2 = x_1x_2$.
Тогда сокращенная ДНФ равна $f(x_1, x_2, x_3) = x_3 \vee x_1x_2$.

Пример 3.2. Найдите сокращенные ДНФ функций:

а) $f(x, y, z) = (x \vee y)(\bar{x} \vee y \vee z)$; б) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 1010010111111011$.

Решение. а) После раскрытия скобок получаем

$$f(x, y, z) = (x \vee y)(\bar{x} \vee y \vee z) = x\bar{x} \vee xy \vee xz \vee \bar{x}y \vee yy \vee yz = [x\bar{x} = 0, yy = y] =$$
$$= y(1 \vee \bar{x} \vee x \vee z) \vee xz = y \vee xz.$$

б) Карта Карно функции представлена на рисунке 3.5. На карте клетки объединены в максимальные интервалы, которым соответствуют элементарные конъюнкции:

$x_1\ x_2$ \ $x_3\ x_4$	0 0	0 1	1 1	1 0
0 0	1	0	0	1
0 1	0	1	1	0
1 1	1	1	1	1
1 0	1	0	1	1

Рисунок 3.5 – Карта Карно

$N_{K_1} = \{ 000, 0010, 1000, 1010 \}$, $K_1 = \bar{x}_2\,\bar{x}_4$;
$N_{K_2} = \{ 0101, 0111, 1101, 1111 \}$, $K_2 = x_2x_4$;
$N_{K_3} = \{ 1100, 1101, 1111, 1110 \}$, $K_3 = x_1x_2$;
$N_{K_4} = \{ 1111, 1011 \}$, $K_3 = x_1x_3x_4$.

Сокращенная ДНФ функции имеет вид

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 1010010111111011 =$$
$$= \bar{x}_2\,\bar{x}_4 \vee x_2\,x_4 \vee x_1\,x_2 \vee x_1\,x_3x_4.$$

Заметим, что объединение в максимальные интервалы может быть другим, и соответственно – другая сокращенная ДНФ.

Пример 3.3. Найдите минимальные ДНФ функции $f(x, y, z) = 01111110$.

Таблица 3.3

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Решение. Область истинности (таблица 3.3) есть:

$$N_f = \{\ 001, 010, 011, 100, 101, 110\ \}.$$

Найдем сокращенную ДНФ функции методом Нельсона. Преобразуем СКНФ к КНФ:

$$f(x, y, z) = (x \lor y \lor z)(\bar{x} \lor \bar{y} \lor \bar{z}) =$$

$$= x\bar{x} \lor x\bar{y} \lor x\bar{z} \lor \bar{x}y \lor y\bar{y} \lor y\bar{z} \lor \bar{x}z \lor \bar{y}z \lor z\bar{z} =$$

$$= x\bar{y} \lor x\bar{z} \lor \bar{x}y \lor y\bar{z} \lor \bar{x}z \lor \bar{y}z.$$

Обозначим $K_1 = x\bar{y}$, $K_2 = x\bar{z}$, $K_3 = \bar{x}y$, $K_4 = y\bar{z}$, $K_5 = \bar{x}z$, $K_6 = \bar{y}z$.

На наборе $\alpha_1 = 001$ имеем $K_5(\alpha_1) = \bar{0} \cdot 1 = 1$, $K_6(\alpha_1) = \bar{0} \cdot 1 = 1$. Остальные конъюнкции равны 0: $K_1(\alpha_1) = K_2(\alpha_1) = K_3(\alpha_1) = K_4(\alpha_1) = 0$. Аналогично:

для $\alpha_3 = 010$ получаем $K_3(\alpha_2) = K_4(\alpha_2) = 1$,
для $\alpha_3 = 011$ получаем $K_3(\alpha_3) = K_5(\alpha_3) = 1$,
для $\alpha_4 = 100$ получаем $K_1(\alpha_4) = K_2(\alpha_4) = 1$,
для $\alpha_5 = 101$ получаем $K_1(\alpha_5) = K_6(\alpha_5) = 1$,
для $\alpha_6 = 101$ получаем $K_2(\alpha_6) = K_4(\alpha_6) = 1$

1 Метод Квайна. Составляем выражение, аналогичное (3.1), и преобразуем его к ДНФ:

$$(K_5 \lor K_6)\ (K_3 \lor K_4)\ (K_3 \lor K_5)\ (K_1 \lor K_2)\ (K_1 \lor K_6)\ (K_2 \lor K_4) =$$

$$= (K_5 \lor K_3K_6)\ (K_4 \lor K_2K_3)\ (K_1 \lor K_2K_6) =$$

$$= K_1K_4K_5 \lor K_1K_2K_3K_5 \lor K_1K_3K_4K_6 \lor K_1K_2K_3K_5 \lor K_2K_4K_5K_6 \lor$$

$$\lor K_2K_3K_5K_6 \lor K_2K_3K_4K_6 \lor K_2K_3K_6 =$$

$$= K_1K_4K_5 \lor K_1K_2K_3K_5 \lor K_1K_3K_4K_6 \lor K_1K_2K_3K_6 \lor K_2K_4K_5K_6 \lor K_2K_3K_6.$$

Тогда функция $f(x, y, z) = 01111110$ имеет шесть тупиковых ДНФ:

$$D_1 = K_1 \lor K_4 \lor K_5 = x\bar{y} \lor y\bar{z} \lor \bar{x}z;$$

$$D_2 = K_1 \lor K_2 \lor K_3 \lor K_5 = x\bar{y} \lor x\bar{z} \lor \bar{x}y \lor \bar{x}z;$$

$$D_3 = K_1 \lor K_3 \lor K_4 \lor K_6 = x\bar{y} \lor \bar{x}y \lor y\bar{z} \lor \bar{y}z;$$

$$D_4 = K_1 \lor K_2 \lor K_3 \lor K_6 = x\bar{y} \lor x\bar{z} \lor \bar{x}y \lor \bar{y}z;$$

$$D_5 = K_2 \lor K_4 \lor K_5 \lor K_6 = x\bar{z} \lor y\bar{z} \lor \bar{x}z \lor \bar{y}z;$$

$$D_6 = K_2 \lor K_3 \lor K_6 = x\bar{z} \lor \bar{x}y \lor \bar{y}z.$$

Две из них D_1 и D_6 являются минимальными.

Таблица 3.4 − Импликантная матрица функции $f(x, y, z)$ = 01111110

K_i \ a_j	001		010	011	100	101	110
$K_1 = x\bar{y}$					+	+	
$K_2 = x\bar{z}$					+		+
$K_3 = \bar{x}y$			+	+			
$K_4 = y\bar{z}$			+				+
$K_5 = \bar{x}z$	+			+			
$K_6 = \bar{y}z$	+					+	

2 Метод импликантных матриц. Строим импликантную матрицу (таблица 3.4). Все столбцы покрывают строки, соответствующие конъюнкциям K_1, K_4, K_5 и K_2, K_3, K_6. Поэтому функция имеет две минимальные ДНФ:

$$x\bar{y} \vee y\bar{z} \vee \bar{x}z; \quad x\bar{z} \vee \bar{x}y \vee \bar{y}z.$$

3.5 Лабораторная работа 3 «Минимизация булевых функций»

Задание 3.1. Найдите сокращенную ДНФ функции $f(x, y, z)$ задания 1.2. методами: 1) графическим, 2) Нельсона, 3) минимизирующих карт Карно.

Задание 3.2. Найдите сокращенную ДНФ методом Блейка функции:

1 $\bar{x}\,\bar{y} \vee x\bar{y}u \vee y\bar{z}u$;

2 $\bar{x}\,\bar{y}z \vee x\bar{y}u \vee zu$;

3 $x\bar{y} \vee \bar{x}\,\bar{y}u \vee y\bar{z}u$;

4 $x\bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{u} \vee \bar{y}\,\bar{z}u$;

5 $xy \vee \bar{x}z \vee x\bar{y}zu \vee \bar{x}yzu$;

6 $x \vee \bar{x}y \vee \bar{x}\,\bar{y}z \vee \bar{x}yzu$;

7 $xy\bar{z} \vee \bar{x}z \vee \bar{y}\,\bar{z}u \vee xyz \vee \bar{u}$;

8 $x\bar{y}u \vee \bar{x}\,\bar{y}z \vee \bar{u} \vee \bar{z}\,\bar{u}$;

9 $xyz \vee \bar{x}\,\bar{y} \vee \bar{y}z \vee \bar{x}z$;

10 $x\bar{y}u \vee \bar{x}\,\bar{y}z \vee \bar{z}\,\bar{u}$;

11 $\bar{x}\,\bar{y} \vee x\bar{y}u \vee \bar{x}\,\bar{z} \vee yzu \vee \bar{u}$;

12 $\bar{x}yzu \vee x\bar{y}u \vee \bar{x}\,\bar{z} \vee x\bar{y}z$;

13 $xy \vee \bar{u} \vee z\bar{u} \vee \bar{y}u \vee x\bar{u}$;

14 $\bar{z}u \vee xy \vee z\bar{u} \vee \bar{x}z$;

15 $xy\bar{z} \vee \bar{x}yu \vee yz\bar{u} \vee y\bar{z}\,\bar{u} \vee yzu$;

16 $xy \vee \bar{x}z \vee x\bar{y}zu \vee \bar{x}yzu$.

Задание 3.3. Найдите сокращенную ДНФ методом минимизирующих карт Карно функции:

1 $f(x, y, z, u)$ = 0101101011100110;
2 $f(x, y, z, u)$ = 1101101011100110;
3 $f(x, y, z, u)$ = 0101101011100100;
4 $f(x, y, z, u)$ = 0111101001100110;
5 $f(x, y, z, u)$ = 1111101010010110;
6 $f(x, y, z, u)$ = 0101000011101110;
7 $f(x, y, z, u)$ = 0111101111100101;
8 $f(x, y, z, u)$ = 1101001010100110;
9 $f(x, y, z, u)$ = 0001101101101110;
10 $f(x, y, z, u)$ = 0111001010100111;
11 $f(x, y, z, u)$ = 1111101011100110;
12 $f(x, y, z, u)$ = 0101001011101110;
13 $f(x, y, z, u)$ = 1101101100101111;
14 $f(x, y, z, u)$ = 1111001010110110;
15 $f(x, y, z, u)$ = 01010111010110111;
16 $f(x, y, z, u)$ = 0101111010110111.

Задание 3.4. Найдите все тупиковые и минимальные ДНФ методом Квайна и минимизирующих карт функции задания 3.3.

4 Полнота и замкнутость

4.1 Понятие полной системы

Система булевых функций $D = \{ f_1, f_2, \ldots, f_r \}$ называется *полной*, если любую булеву функцию $f \in P_2$ можно представить в виде суперпозиции функций из D, где P_2 – множество всех булевых функций.

Теорема 4.1. *Пусть* $D_1 = \{ f_1, \ldots, f_r, \ldots \}$ *и* $D_2 = \{ g_1, \ldots, g_r, \ldots \}$ *системы булевых функций. Если* D_1 *– полная система и каждая ее функция выражается в виде суперпозиции функций из* D_2, *то система* D_2 *также является полной.*

Множество T булевых функций называется *замкнутым классом*, если любая суперпозиция функций из T снова принадлежит T.

Всякая система M булевых функций порождает некоторый замкнутый класс. Этот класс состоит из всех булевых функций, которые можно получить суперпозициями из M. Такой класс называется *замыканием* M и обозначается $[M]$. Для замкнутого класса M следует, что $[M] = M$. Очевидно, что, если M – полная система, что $[M] = P_2$.

4.2 Важнейшие замкнутые классы

Говорят, что булева функция $f(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ *сохраняет константу* 0, если $f(0, 0,\ldots, 0) = 0$. Множество функций, сохраняющих константу 0, образует класс T_0.

Теорема 4.2. *Число всех булевых функций, сохраняющих константу 0, равно* 2^{2^n-1}: $| T_0 | = 2^{2^n-1}$.

Говорят, что булева функция $f(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ *сохраняет константу* 1, если $f(1,1,\ldots, 1) = 1$. Множество функций, сохраняющих константу 1, образует класс T_1.

Теорема 4.3. *Число всех булевых функций, сохраняющих константу* 1, *равно* 2^{2^n-1}: $| T_1 | = 2^{2^n-1}$.

Говорят, что булева функция $f^*(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ является *двойственной* к функции $f(x_1, x_2,\ldots, x_n)$, если $f^*(x_1, x_2,\ldots, x_n) = \overline{f}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$.

Всякая формула алгебры логики может быть приведена равносильными преобразованиями к формуле, содержащей только операции конъюнкции, дизъюнкции и отрицания. Поэтому, учитывая законы де Моргана и двойного отрицания, две формулы алгебры логики N и M, содержащие только операции конъюнкции, дизъюнкции и отрицания, будут двойственными, если одна получается из другой заменой каждой операции на двойственную, и 1 заменяется на 0, а 0 на 1.

Теорема 4.4. *Если булевы функции* f *и* g *равны, то и двойственные им функции* f^* *и* g^* *равны.*

Булева функция f называется *самодвойственной*, если она совпадает с двойственной к себе функцией: $f^* = f$: $\overline{f}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Множество самодвойственных функций образует класс S.

Теорема 4.5. *Число всех самодвойственных функций равно* $\sqrt{2^{2^n}}$, то есть $|S| = \sqrt{2^{2^n}}$.

Теорема 4.6. *Если функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ самодвойственна, то функция $\overline{f}$ также самодвойственна.*

Теорема 4.7. *Для того чтобы функция была самодвойственной, необходимо и достаточно, чтобы на всяких двух противоположных наборах она принимала разные значения.*

Противоположными называются те наборы, которые в сумме дают двоичный код числа $(2^n - 1)$.

Булева функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется *линейной*, если ее полином Жегалкина не содержит конъюнкций:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n,$$

где $a_i \in \{0, 1\}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Множество линейных функций образует класс L.

Теорема 4.8. *Число всех линейных булевых функций от переменных равно* 2^{n+1}: $|L| = 2^{n+1}$.

Для того чтобы определить, является данная булева функция линейной или нет, ее надо представить в виде полинома Жегалкина.

Два набора $\tilde{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ и $\tilde{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ называются *сравнимыми*, если $a_i \le b_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Запись $\tilde{a} \le \tilde{b}$ означает, что набор $\tilde{a}$ *предшествует* набору $\tilde{b}$. Например, $001 \le 011$, а наборы 010 и 001 несравнимы.

Булева функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется *монотонной*, если для любых наборов $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ таких, что $\tilde{a} \le \tilde{b}$, имеет место $f(\tilde{a}) \le f(\tilde{b})$.

Множество монотонных функций образует класс M.

Теорема 4.9. (Критерий монотонности) *Булева функция, имеющая сокращенную ДНФ, не содержащую отрицаний, является монотонной функцией, отличной от 0 и 1.*

Теорема 4.10. *Классы булевых функций T_0, T_1, S, L, M являются замкнутыми классами.*

4.3 Теорема о полноте

Теорема 4.11. (О полноте) *Для того чтобы система булевых функций D была полной, необходимо и достаточно, чтобы она целиком не содержалась ни в одном из пяти замкнутых классов T_0, T_1, S, L, M.*

Таблица 4.1 – Таблица Поста

	T_0	T_1	S	L	M
f_1					
f_2					
…					
f_r					

Для того чтобы выяснить, является ли данная система булевых функций $D = \{ f_1, f_2, \ldots, f_r \}$ полной, составляются таблицы Поста (таблица 4.1). В клетках таблицы пишется «+» или «–», в зависимости от того, входит функция, стоящая в строке в класс, стоящий в столбце, или не входит. Для полноты системы булевых функций необходимо и достаточно, чтобы в каждом столбце стоял хотя бы один «–».

Система булевых функций называется *несократимой*, если из нее нельзя исключить ни одной функции так, чтобы оставшаяся после исключения система снова была полной.

Очевидно, что любую полную систему булевых функций можно свести к несократимой. Как следует из теоремы о полноте, в любой несократимой полной системе содержится не более 5 функций.

Теорема 4.12. *Максимальное возможное число функций в несократимой полной системе булевых функций равно 4.*

Система (множество) булевых функций называется *базисом*, если она полна и любая ее подсистема не является полной на множестве булевых функций. Для выделения *базиса* из полной системы функций $D = \{ f_1, f_2, \ldots, f_r \}$ нужно упорядочить по числу функций множество подсистем системы D: $\{ f_1 \}$, $\{ f_2 \}$, …, $\{ f_1, f_2 \}$, $\{ f_1, f_3 \}$, …, $\{ f_1, f_2, \ldots, f_r \}$ и, начиная с первой, исследовать их на полноту. Первая из полных в этой последовательности подсистем будет базисом.

4.4 Решение типовых примеров

Пример 4.1. Какие из функций принадлежат классу T_0: $f_1(x, y) = x \cdot y$, $f_2(x, y) = x \vee y$, $f_3(x, y) = x \to y$, $f_4(x, y) = x \leftrightarrow y$, $f_5(x, y) = x + y$, $f_6(x, y) = x \mid y$, $f_7(x, y) = x \downarrow y$.

Решение. Так как $f_1(0, 0) = 0 \cdot 0 = 0$, то $x \cdot y \in T_0$.

Так как $f_2(0, 0) = 0 \vee 0 = 0$, то $x \vee y \in T_0$.

Так как $f_3(0, 0) = 0 \to 0 = 1$, то $x \to y \notin T_0$.

Так как $f_4(0, 0) = 0 \leftrightarrow 0 = 1$, то $x \leftrightarrow y \notin T_0$.

Так как $f_5(0, 0) = 0 + 0 = 0$, то $x + y \in T_0$.

Так как $f_6(0, 0) = 0 \mid 0 = 1$, то $x \mid y \notin T_0$.

Так как $f(0, 0) = 0 \downarrow 0 = 0$, то $x \downarrow y \in T_0$.

Пример 4.2. Выясните, являются ли самодвойственными функции:

1) $f_1(x) = \bar{x}$;　　2) $f_2(x, y) = x \to y$;

3) $f_3(x, y, z) = xy \vee yz \vee xz$;　　4) $f_4(x, y, z) = 01110010$.

Решение. Так как $f_1^*(x) = \overline{f}_1(\overline{x}) = \overline{\overline{\overline{x}}} = \overline{x} = f_1(x)$, то функция $f_1(x) = \overline{x}$ – самодвойственна.

Для функции $f_2(x, y) = x \to y$ аналогично имеем:

$$f_2^*(x, y) = \overline{f}_2(\overline{x}, \overline{y}) = \overline{\overline{x} \to \overline{y}} = \overline{\overline{\overline{x}} \vee \overline{y}} = \overline{x}\, y \neq f_2(x, y),$$

то есть функция $f_2(x, y) = x \to y$ не является самодвойственной.

Найдем двойственную функцию для $f_3(x, y, z) = xy \vee yz \vee xz$:

$$f_3^*(x, y, z) = \overline{f}_3(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) = \overline{\overline{x}\,\overline{y} \vee \overline{y}\,\overline{z} \vee \overline{x}\,\overline{z}} = (x \vee y)(y \vee z)(x \vee z) =$$
$$= xy \vee yz \vee xz \vee xz = xy \vee yz \vee xz = f_3(x, y, z).$$

Значит, $f_3(x, y, z) = xy \vee yz \vee xz$ является самодвойственной.

Строим таблицу истинности для функции $f_4(x, y, z)$ (таблица 4.2). Пары противоположных наборов есть

000 и 111, 001 и 110, 010 и 101, 011 и 100.

На всяких двух противоположных наборах функция принимает разные значения. Следовательно, функция $f_4(x, y, z) = 01110010$ является самодвойственной.

Таблица 4.2

x	y	z	$f_4(x, y, z)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Пример 4.3. Выясните, является ли функция $f(x, y) = x \vee y$ линейной.

Решение. Найдем полином Жегалкина функции:

$$f(x, y) = x \vee y = \overline{\overline{x}\,\overline{y}} = \overline{x}\,\overline{y} + 1 = (x + 1)(y + 1) + 1 = xy + x + y + 1 + 1 =$$
$$= xy + x + y.$$

Полином Жегалкина содержит конъюнкцию xy, поэтому функция $f(x, y) = x \vee y$ не является линейной.

Пример 4.4. Являются ли монотонными функции $f_1(x, y, z) = 00100110$; $f_2(x, y, z) = 00110111$, $f_3(x_1, x_2, x_3) = \overline{x}_2 x_3 \vee \overline{x}_1 x_3 \vee x_1 x_2$?

Решение. Построим таблицы истинности функций f_1 и f_2 (таблица 4.3).

Так как набор $010 \leq 011$, а $f_1(0, 1, 0) \nleq f_1(0, 1, 1)$, то $f_1(x, y, z)$ немонотонна.

Для всех наборов $\tilde{a} \leq \tilde{b}$, имеет место $f_2(\tilde{a}) \leq f_2(\tilde{b})$, поэтому $f_2(x, y, z)$ монотонная.

Сокращенная ДНФ функции $f_3(x_1, x_2, x_3)$ имеет вид (пример 3.1) $f_3(x_1, x_2, x_3) = x_3 \vee x_1x_2$. Поскольку сокращенная ДНФ не содержит отрицаний, то функция является монотонной.

Таблица 4.3

x	y	z	f_1	f_2
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1

Пример 4.5. Являются ли полными системы булевых функций:

$D_1 = \{\, x\,|\,y \,\}$, $D_2 = \{\, x + y + z,\ xy,\ 0,\ 1 \,\}$, $D_3 = \{\, \bar{x}\,\bar{y} \vee \bar{x}\,\bar{z} \vee \bar{y}\,\bar{z} \,\}$?

Решение. Система $D_1 = \{\, x\,|\,y \,\}$. Так как $0\,|\,0 = 1$ и $1\,|\,1 = 0$, то $x\,|\,y \notin T_0$ и $x\,|\,y \notin T_1$. Двойственная функция к функции $x\,|\,y$ равна

$$f^*(x, y) = \overline{f}(\bar{x},\ \bar{y}) = \overline{\bar{x}\,|\,\bar{y}} = \overline{\bar{\bar{x}} \vee \bar{\bar{y}}} = \bar{x}\ \bar{y} \neq f(x, y).$$

Значит, функции $x\,|\,y \notin S$. Полином Жегалкина функции $x\,|\,y$ есть $x\,|\,y = \overline{x\,y} = xy + 1$. Следовательно, функция $x\,|\,y \notin L$. Так как $00 \le 11$, а $0\,|\,0 \not\le 1\,|\,1$, то есть $1 \not\le 0$, то $x\,|\,y \notin M$.

Таблица 4.4 – Система D_1

	T_0	T_1	S	L	M
$x\,\|\,y$	–	–	–	–	–

Заполним таблицу Поста (таблица 4.4). Все столбцы таблицы содержат «–», поэтому система $D_1 = \{\, x\,|\,y \,\}$ полная.

Система $D_2 = \{\, x + y + z,\ xy,\ 0,\ 1 \,\}$.

Исследуем функцию $x + y + z$. Очевидно, что она принадлежит классам T_1, T_0, L. Покажем самодвойственность:

$$\overline{\bar{x} + \bar{y} + \bar{z}} = x + 1 + y + 1 + z + 1 + 1 = x + y + z.$$

Таблица 4.5 – Система D_2

	T_0	T_1	S	L	M
$x + y + z$	+	+	+	+	–
xy	+	+	–	–	+
0	+	–	–	+	+
1	–	+	–	+	+

Функция $x + y + z$ немонотонна, так как $100 \le 100$, а $1 + 0 + 0 \not\le 1 + 1 + 0$.

Составим таблицу Поста для системы D_2 (таблица 4.5). В каждом столбце таблицы 4.5 стоит минус. Следовательно, система D_2 является полной.

Таблица 4.6 – Система D_3

	T_0	T_1	S	L	M
$\bar{x}\,\bar{y} \vee \bar{x}\,\bar{z} \vee \bar{y}\,\bar{z}$	–	–	+	–	–
$\bar{x}$	–	–	+	+	–

Система $D_3 = \{\, \bar{x}\,\bar{y} \vee \bar{x}\,\bar{z} \vee \bar{y}\,\bar{z},\ \bar{x} \,\}$.

Составим таблицу Поста для системы D_3 (таблица 4.6). Не все столбцы содержат хотя бы 1 минус, поэтому система D_3 не является полной.

Пример 4.6. Исследуйте систему функций $D = \{\, x_1x_2,\ 0,\ 1,\ x_1 + x_2 + x_3 \,\}$.

Решение. Составим таблицу Поста системы D (таблица 4.7).

Из таблицы 4.7 видно, что система является полной и несократимой, так как

Таблица 4.7 – Система D

	T_0	T_1	S	L	M
x_1x_2	+	+	–	–	+
0	+	–	–	+	+
1	–	+	–	+	+
$x_1 + x_2 + x_3$	+	+	+	+	–

$\{\, 0,\ 1,\ x_1 + x_2 + x_3 \,\} \in L$,
$\{\, x_1x_2,\ 1,\ x_1 + x_2 + x_3 \,\} \in T_1$,
$\{\, x_1x_2,\ 0,\ x_1 + x_2 + x_3 \,\} \in T_0$,
$\{\, x_1x_2,\ 0,\ 1 \,\} \in M$,
$\{\, x_1 + x_2 + x_3 \,\} \in S$.

Пример 4.7. Исследуйте систему функций и, если она полна, выделите из нее базис: $D = \{\, x_1 + 1,\ x_1 \downarrow x_2,\ x_1x_2 \to x_3 \,\}$.

Решение. Составим таблицу Поста системы D (таблица 4.8).

Из таблицы 4.8 видно, что система является полной. Базисом является функция $x_1 \downarrow x_2$, так как подсистема $\{\, x_1 \downarrow x_2 \,\}$ полная. Функции $f_1 = x_1 + 1$ и $f_2 = x_1x_2 \to x_3$ не образуют базис.

Таблица 4.8 – Таблица Поста

	T_0	T_1	S	L	M
$x_1 + 1$	+	+	+	+	+
$x_1 \downarrow x_2$	–	–	–	–	–
$x_1x_2 \to x_3$	–	+	–	–	–

4.5 Лабораторная работа 4 «Полнота и замкнутость»

Задание 4.1. Являются ли функции задания 1.2:

а) линейными, б) монотонными, в) самодвойственными?

Задание 4.2. Являются ли системы функций полными? Если да, то выделите из нее базис.

1 а) $\{\, x \to y, 0, 1, x \to \bar{y}z \,\}$; б) { 01101001, 1010, 11100111};

2 а) $\{\, x\bar{y}, 1, x \leftrightarrow yz \,\}$; б) { 01101101, 1110, 11010110};

3 а) $\{\, 0, 1, x\bar{y}, (y \leftrightarrow z) + x \,\}$; б) {11101001, 1010, 01100111};

4 а) $\{\, xy \vee y\bar{z} \vee \bar{x}z, 0, x + \bar{y} \,\}$; б) {01101001, 1000, 01110110};

5 а) $\{\, 0, 1, x \vee y, \bar{x} + y + z \,\}$; б) { 01101011, 1010, 01010110};

6 а) $\{\, \bar{x}y \vee x\bar{z} \vee yz, x, x \to \bar{y} \,\}$; б) { 01111001, 1010, 11010110};

7 а) $\{\, x\bar{z} \vee \bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}z, x \leftrightarrow y, 0 \,\}$; б) {01011101, 0101, 11010110};

8 а) $\{\, \bar{x}y \vee xy\bar{z}, \bar{x} \to y, 1 \,\}$; б) {11100011, 0010, 01010100};

9 а) $\{\, 0, 1, x \downarrow y, y \to (z + x) \,\}$; б) {01001011, 0001, 11010100};

10 а) $\{\, x\bar{z} \vee yz, 0, 1, x + \bar{y} \,\}$; б) {01111001, 1010, 01110111};

11 а) $\{\, 0, 1, \bar{x} \vee \bar{y}, xy \leftrightarrow z \,\}$; б) {11100011, 0110, 01110100};

12 а) $\{\, x\bar{y}z, x \leftrightarrow yz, 0, 1 \,\}$; б) {01111001, 1001, 11010100};

13 а) $\{\, \bar{x}y\bar{z}, 0, 1, x + (y \downarrow z) \,\}$; б) {01101100, 1010, 01010111};

14 а) $\{\, x\bar{z} + yz, \bar{x}, x \to \bar{y} \,\}$; б) {10111001, 1000, 01011100};

15 а) $\{\, \bar{x}y \vee x\bar{z} \vee \bar{y}\bar{z}, x \to y, \bar{x} \,\}$; б) {10110101, 1101, 01011110};

16 а) $\{\, xy \vee x\bar{z} \vee \bar{y}\bar{z}, x \vee y, 0, \bar{x} \,\}$; б) {10110111, 1001, 00111110};

5 Контактные и логические схемы

5.1 Контактные схемы

Первыми объектами применения алгебры логики для решения технических задач были контактные схемы. Под *контактными схемами* будем понимать электрические цепи, содержащие только контакты. Каждый контакт может находиться в двух состояниях – разомкнут (0) и замкнут (1). Такие цепи изображаются диаграммой, на которой возле контактов пишется x_i или $\bar{x}_i$. Причем значение 1 этих переменных соответствует прохождению тока через данный контакт, а значение 0 нет.

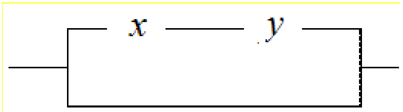


Рисунок 5.1 – Контактная схема функции $f(x,y) = xy$

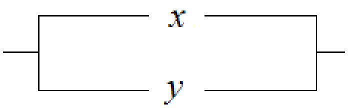


Рисунок 5.2 – Контактная схема функции $f(x,y) = x \vee y$

Если контакты x и y соединены *последовательно*, то цепь замкнута, когда оба контакта замкнуты и разомкнуты, когда хотя бы один из контактов разомкнут (рисунок 5.1). Если контакты x и у соединены *параллельно*, то цепь замкнута, когда хотя бы один контакт замкнут и разомкнут, когда оба контакта разомкнуты (рисунок 5.2).

Булеву функцию можно представить в виде контактной схемы, и наоборот, любая контактная схема с последовательно или параллельно соединенными контактами реализуется булевой функцией. *Задача анализа* контактной схемы и состоит в построении соответствующей ей булевой функции.

Контактные схемы называют *эквивалентными*, если они соответствуют одной и той же булевой функции. *Задача синтеза* контактной схемы состоит в построении контактной схемы по булевой функции, которая может быть задана как формулой, так и таблицей. Из множества эквивалентных схем, путем упрощения соответствующих формул, выделяется наиболее простая схема. Эта проблема сводится к минимизации булевых функций, то есть к такому их представлению, в котором соответствующие формулы содержат минимальное количество вхождений переменных.

5.2 Логические устройства

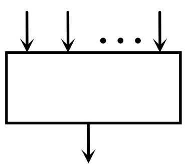
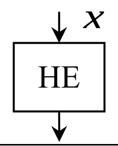
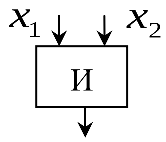
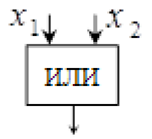
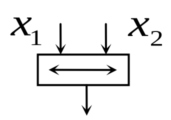
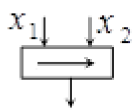


Рисунок 5.3 – Дискретное устройство

Пусть имеется некоторое устройство, имеющее n упорядоченных «входов» и один «выход», причем внутренняя структура этого устройства не важна. На каждый вход могут подаваться сигналы 0 или 1. При каждом наборе сигналов на входах на выходе возникает один из сигналов 0 или 1 (рисунок 5.3). Причем набор сигналов на входах однозначно определяет сигнал на выходе. Каждое такое устройство реализует некоторую булеву функцию.

Устройства, реализующие элементарные булевы функции, называются *логическими элементами*. Логические элементы изображаются в виде прямоугольников, внутри которых помещаются условные названия или символы соответствующих функций (таблица 5.1).

Таблица 5.1 – Графическое изображение элементарных булевых функций

Функция	$\bar{x}$	$x_1\,x_2$	$x_1 \vee x_2$	$x_1 \leftrightarrow x_2$	$x_1 \rightarrow x_2$
Логический элемент					

Из логических элементов путем соединения входа одного из них с выходов другого строятся более сложные логические схемы. Для построенных логических схем записывают соответствующие им булевы функции.

5.3 Решение типовых примеров

Пример 5.1. Записать булеву функцию для контактной схемы (рисунок 5.4, а) и упростить ее.

Решение. Контактная схема реализуется функцией

$$f(x, y, z) = x \vee (x \vee \bar{y})(y \vee \bar{z}) \vee \bar{y} \vee z.$$

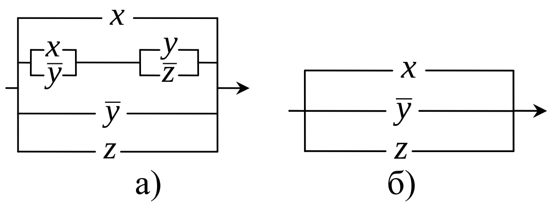


Рисунок 5.4 – Контактная схема (а) и ей эквивалентная (б)

Упростим формулу:

$$f(x, y, z) = x \vee (x \vee \bar{y})(y \vee \bar{z}) \vee \bar{y} \vee z =$$

$$= x \vee xy \vee xz \vee y\bar{y} \vee \bar{y}\,\bar{z} \vee \bar{y} \vee z = x \vee \bar{y} \vee z.$$

Соответствующая контактная схема представлена на рисунке 5.4, б.

Пример 5.2. Из контактов x, y, z составьте простую схему так, чтобы она замкнулась тогда и только тогда, когда замкнуты не менее двух контактов.

Таблица 5.2

x	y	z	$f(x, y, z)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Решение. Составим таблицу истинности для булевой функции, соответствующей требуемой контактной схеме (таблица 5.2). СДНФ соответствующей булевой функции имеет вид

$$f(x, y, z) = \bar{x}yz \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z} \vee xzy =$$

$$= yz(\bar{x} \vee x) \vee xz(\bar{y} \vee y) \vee xy(\bar{z} \vee z) = yz \vee xz \vee xy.$$

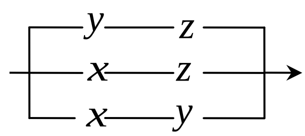


Рисунок 5.5 – Контактная схема примера 5.2

Схема функции представлена на рисунке 5.5.

Пример 5.3. Постройте логические схемы для функций

1) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \vee x_2) + (\bar{x}_3 + x_4)$; 2) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 \vee (\bar{x}_3 + x_4)$.

Решение. Логические схемы функций представлены на рисунке 5.6.

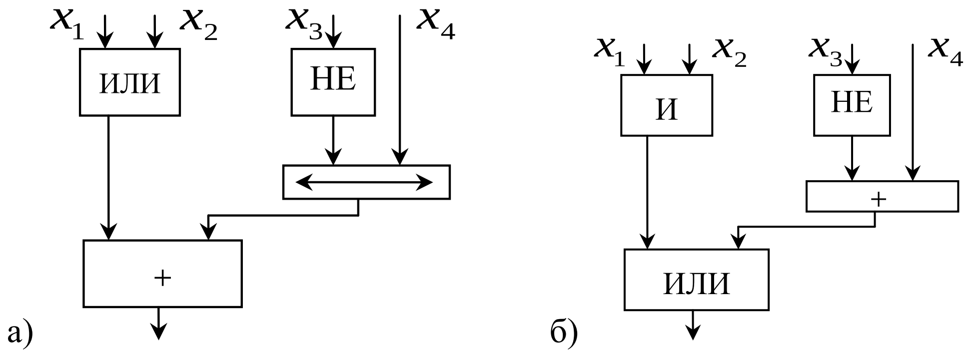


Рисунок 5.6 – Логические схемы функций:
а) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \vee x_2) + (\bar{x}_3 + x_4)$;
б) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 \vee (\bar{x}_3 + x_4)$.

5.4 Лабораторная работа 5 «Контактные и логические схемы»

Задание 5.1. Составьте контактные и логические схемы для функций задания 1.2.

Задание 5.2. Решите следующие задачи.

1 Включение света в комнате осуществляется с помощью трех различных переключателей так, чтобы нажатие на любой из них приводит к включению света, если он перед этим был выключен, и к его выключению, если он включен. Постройте простую цепь, удовлетворяющую условию.

2 Пусть каждый из трех членов комитета голосует «за», нажимая кнопку. Постройте простейшую цепь, через которую ток проходил бы тогда и только тогда, когда большинство членов комитета голосует «за».

3 Команда проходит в следующий тур, если она выиграла хотя бы у двух команд группы из четырех. Постройте контактные и логические схемы, реализующие булеву функцию, характеризующую выход команды в следующий тур.

4 Каждый из четырех членов комитета голосует «за», нажимая кнопку. Постройте простейшую цепь, через которую ток проходит тогда и только тогда, когда большинство членов комитета голосует «за», но только при дополнительном условии, что за него голосует председатель комитета.

5 Пусть каждый из четырех членов комитета голосует «за», нажимая кнопку. Постройте простейшую цепь, через которую ток проходил бы тогда и только тогда, когда большинство членов комитета голосует «за».

6 Поединок борцов дзюдо судят трое судей. Судья, засчитывающий очко бойцу А (пропуск игрока Б), нажимает на имеющуюся в его распоряжении кнопку А; судья, не засчитывающий результат, кнопку А не нажимает. Очко засчитывается, если не менее двух судей его засчитали. В этом случае в соответствующем углу должна загореться лампочка. Построить схему принятия решений судьями в поединке.

7 Каждый из трех членов комитета голосует «за», нажимая кнопку. Постройте простейшую цепь, через которую ток проходил тогда и только тогда, когда большинство членов комитета голосует «за», но только при дополнительном условии, что за него голосует председатель комитета.

8 Построить контактные и логические схемы, реализующие функции от четырех аргументов, которая равна I тогда и только тогда, когда число аргументов, принимающих значение I, более трех или не более одного.

9 Команда проходит в следующий тур, если она выиграла хотя бы у двух команд группы из пяти. Постройте контактные и логические схемы, реализующие булеву функцию, характеризующую выход команды в следующий тур.

10 Построить контактные и логические схемы, реализующие функцию от трех аргументов, которая равна 1 тогда и только тогда, когда один или два аргумента равны 1.

11 Спроектировать релейно-контактную схему, позволяющую включать и выключать электрическую лампочку с помощью трех независимых переключателей.

12 Боксерский поединок судят трое судей. Судья, засчитывающий очко бойцу, нажимает на имеющуюся в его распоряжении кнопку; судья, не засчитывающий результат, кнопку не нажимает. Очко засчитывается, если не менее двух судей его засчитали. В этом случае в соответствующем углу загорается лампочка. Построить схему принятия решений судьями в поединке.

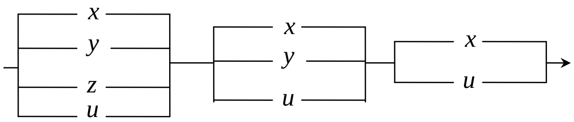
13 Имеется одна лампочка в лестничном пролете двухэтажного здания. Построить схему так, чтобы на каждом этаже своим выключателем можно было бы гасить и зажигать лампу независимо от положения другого выключателя.

14 Команда проходит в следующий тур, если она выиграла хотя бы у трех команд группы из пяти. Постройте контактные и логические схемы, реализующие булеву функцию, характеризующую выход команды в следующий тур.

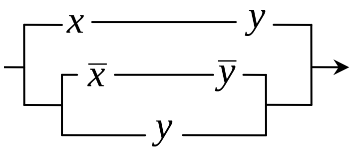
15 Построить контактные и логические схемы, реализующие функцию от трех переменных, которая равна 1 тогда и только тогда, когда один из аргументов принимает значение 1.

16 Команда проходит в следующий тур, если она выиграла хотя бы у трех команд группы из четырех. Постройте контактные и логические схемы, реализующие булеву функцию, характеризующую выход команды в следующий тур.

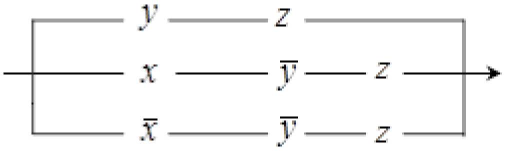
Задание 5.3. Упростите схемы



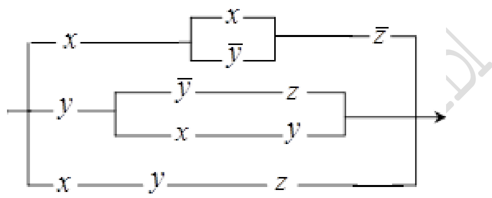
1



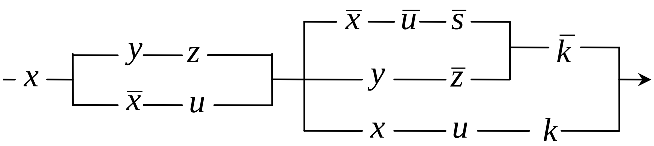
2



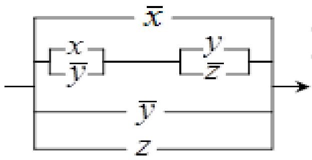
3



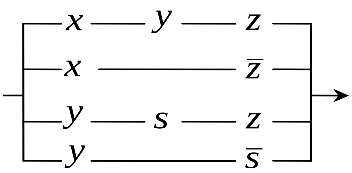
4



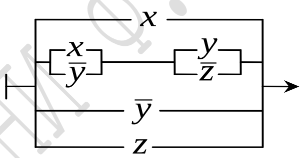
5



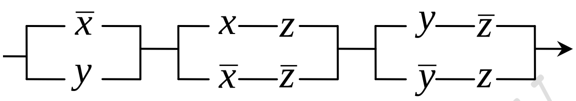
6



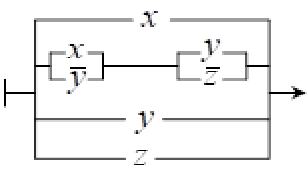
7



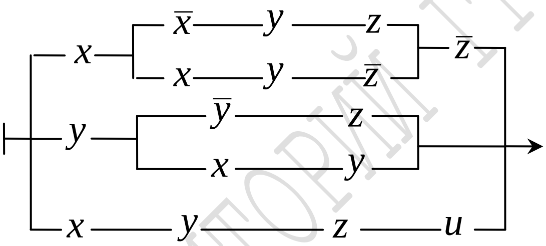
8



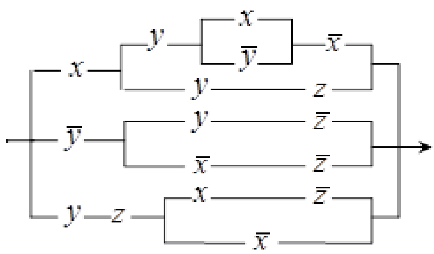
9



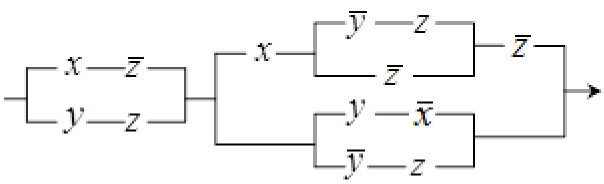
10



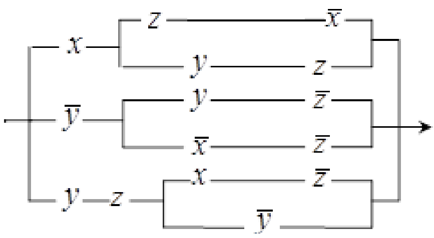
11



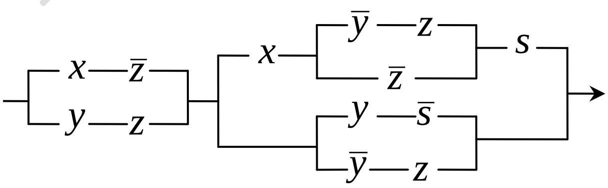
12



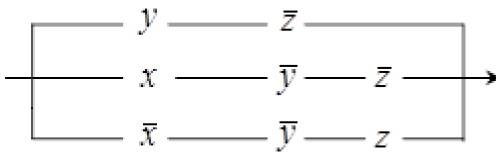
13



14



15



16

6 Логическое следование формул

6.1 Логические следствия

Множество формул $L = \{ F_1, F_2, ..., F_m \}$ называется *выполнимым*, если существует такая интерпретация $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, что

$$F_1(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 1,\ F_2(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 1, \ldots, F_n(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 1.$$

Проверить выполнимость множества формул $\{ F_1, F_2, ..., F_m \}$ можно построением совместной таблицы истинности этих формул. Если найдется хотя бы одна строка, в которой в столбцах формул стоят единицы, то это множество формул выполнимо. Если такой строки нет, то множество формул невыполнимо.

Формула G называется *логическим следствием* формул $F_1, F_2, ..., F_m$, если для любой интерпретации на наборе $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ из того, что $F_1(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 1$, $F_2(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 1$, …, $F_n(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 1$ следует, что $G(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 1$. Логическое следование обозначается

$$\{ F_1, F_2, ..., F_m \} \vDash G \text{ или } \frac{F_1, F_2, ..., F_m}{G}.$$

Теорема 6.1. *Формула G является логическим следствием формул $F_1, F_2, ..., F_m$ тогда и только тогда, когда формула $F_1F_2...F_m \to G$ общезначима.*

Теорема 6.2. *Формула G является логическим следствием формул $F_1, F_2, ..., F_m$ тогда и только тогда, когда множество формул $\{ F_1, F_2, ..., F_m, \overline{G} \}$ невыполнимо*.

Если G есть логическое следствие формул $F_1, F_2, ..., F_m$, то формула $F_1F_2...F_m \to G$ называется *теоремой,* $F_1, F_2, ..., F_m$ называются *аксиомами* (*постулатами, посылками*), а G – *следствием* (*заключением*).

Доказательство теорем можно осуществлять:

1) по таблице истинности, показав, что формула G истинна в каждой интерпретации, в которой истинны формулы $F_1, F_2, ..., F_m$;

2) по таблице истинности показав общезначимость формулы $F_1F_2...F_m \to G$;

3) по таблице истинности, показав противоречивость формулы $F_1F_2...F_m\overline{G}$;

4) приведением к КНФ доказать общезначимость формулы $F_1F_2...F_m \to G$;

5) приведением к ДНФ доказать противоречивость формулы $F_1F_2...F_m\overline{G}$.

6.2 Резольвента дизъюнктов логики высказываний

Литералом называется переменная x или ее отрицание $\bar{x}$. *Дизъюнктом* (*клозом*) называется литерал или дизъюнкция литералов.

Введем *пустой дизъюнкт* $\square$, то есть дизъюнкт, не содержащий литералов. Считается, что пустой дизъюнкт $\square$ ложен при любой интерпретации, то есть равен 0. При этом имеют место формулы $F \cdot \square = 0$ и $F \vee \square = F$.

Литералы x и $\bar{x}$ называются *контрарными*. Например, в дизъюнктах $y \vee F$, $\bar{y} \vee G$ литералы y и $\bar{y}$ контрарные.

Правило резолюций: из дизъюнктов $D_1 = x \vee F$ и $D_2 = \bar{x} \vee G$ выводится дизъюнкт $F \vee G$. Дизъюнкт $F \vee G$ называется *резольвентой* дизъюнктов D_1 и D_2, а дизъюнкты D_1 и D_2 – родительскими дизъюнктами. Очевидно, что резольвента контрарных литералов равна пустому дизъюнкту $\square$.

Лемма 6.1. *Резольвента есть логическое следствие породивших ее дизъюнктов*: $\{ x \vee F, \bar{x} \vee G \} \vDash F \vee G$.

Пусть $S = \{ D_1, D_2, \ldots, D_k \}$ – множество дизъюнктов, причем каждое слагаемое дизъюнкта является литералом. *Резолютивным выводом* (*выводом*) из S называется такая последовательность дизъюнктов, что каждый дизъюнкт этой последовательности принадлежит S или следует из предыдущих по правилу резолюций. Дизъюнкт D *выводим* из S, если существует вывод из S, последним дизъюнктом которого является D. Вывод пустого дизъюнкта $\square$ из S называется *опровержением* S. Дизъюнкт D_1 зависит от дизъюнкта D, если при выводе D_1 использовалась резольвента D.

Теорем 6.3. *Множество дизъюнктов S логики высказываний невыполнимо тогда и только тогда, когда из S выводим пустой дизъюнкт.*

6.3 Метод резолюций в логике высказываний

Метод резолюций определяет, является ли формула G логическим следствием множества формул $L = \{ F_1, F_2 , ..., F_m \}$, то есть $F_1, F_2, ..., F_m \vDash G$.

Суть метода резолюций: составляется множество $T = \{ F_1, F_2, ..., F_m, \overline{G} \}$. Каждая из формул множества T приводится к КНФ. Рассматривается множество $S = \{ D_1, D_2, \ldots, D_k \}$, составленное из дизъюнктов всех формул, и строится резолютивный вывод из S. Если построено опровержение S, то формула G есть логическое следствие формул $\{ F_1, F_2, ..., F_m \}$. Иначе G не является их логическим следствием.

При реализации метода резолюций осуществляется поиск вывода пустого дизъюнкта, предполагающий перебор дизъюнктов. Для организации перебора используются различные стратегии.

1 Стратегия насыщения. Пусть $S_0 = S$ – исходное множество дизъюнктов. Обозначим S_1 – объединение S_0 с множеством всех резольвент, порожденных от дизъюнктов S_0. И так далее. В результате порождается последовательность S_0, S_1, ..., S_i, …, где i называется *уровнем опровержения*. Стратегия

насыщения уровня предполагает последовательное порождение всех резольвент уровня 1, затем уровня 2 и так далее до получения пустого дизъюнкта.

2 Линейная стратегия. При данной стратегии резольвента, полученная на i-м шаге вывода ($i > 0$), всегда имеет в качестве одного из своих родительских дизъюнктов дизъюнкт (левый), полученный на ($i - 1$)-м шаге вывода.

3 Стратегия предпочтения одночленам. Перебор дизъюнктов-претендентов на резолюцию выполняется в порядке возрастания их длины. Вначале строятся резольвенты между одночленами, то есть дизъюнктами, содержащими единственный литерал. Если это удается, то сразу получается опровержение, если нет – то ищутся резольвенты для пар одночлен-двучлен, затем двучлен-двучлен и так далее. Перебор пар дизъюнктов в данной стратегии должен выполняться таким образом, чтобы сумма длин родительских дизъюнктов в процессе перебора не убывала.

4 Семантическая резолюция. Пусть S – исходное множество дизъюнктов. И пусть ($\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$) некоторая интерпретация, на которой дизъюнкты множества S и порождаемые резольвенты разбиваются на два подмножества – S_1, содержащее дизъюнкты, при данной интерпретации обращающиеся в 1, и S_2, включающее дизъюнкты, обращающиеся в 0. Стратегия семантической резолюции предусматривает, что при образовании каждой следующей резольвенты используется один дизъюнкт множества S_1 и один дизъюнкт множества S_2.

6.4 Метод резолюций для хорновских дизъюнктов

Метод резолюций является наиболее эффективным в случае применения его к множеству хорновских дизъюнктов. Литерал x называется *позитивным*, литерал $\bar{x}$ – *негативным*. Дизъюнкт D называется *хорновским*, если он содержит не более одного позитивного литерала.

Хорновский дизъюнкт вида $\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \ldots \vee \bar{x}_p \vee y$ называется *точным*, вида $\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \ldots \vee \bar{x}_p$, $p \geq 1$, – *негативным* дизъюнктом, вида y – *унитарным позитивным* дизъюнктом.

Рассмотрим множество S хорновских дизъюнктов без тавтологий. Невыполнимость S проверяется следующим образом. Полагаем, что $S^0 = S$. Пусть S^{n-1}, $n \geq 1$, построено. Для построения S^n выбираются из S^{n-1} дизъюнкты D_1 и D_2 такие, что: D_1 – унитарный позитивный дизъюнкт, например, $D_1 = P$; D_2 – дизъюнкт, содержащий $\bar{P}$. Вычисляется резольвента r для дизъюнктов D_1 и D_2 и полагаем, что $S^n = (S^{n-1} \setminus \{ D_2 \}) \cup \{ r \}$. Эту процедуру повторяется до тех пор, пока не получится пустой дизъюнкт $\square$ либо пока не окажется, что в S^{n-1} не существует дизъюнктов D_1 и D_2 указанных видов.

Для приведенной схемы появление пустого дизъюнкта $\square$ означает, что множество S хорновских дизъюнктов невыполнимо. Если же окажется, что S^{n-1} не содержит дизъюнктов D_1 и D_2 указанных видов, то исходное множество S хорновских дизъюнктов выполнимо.

6.5 Решение типовых примеров

Пример 6.1. Проверьте выполнимость множества формул

$$L = \{\, xy \to (x \to z),\, y,\, x \vee \bar{z} \,\}.$$

Решение. Составим совместную таблицу истинности формул (таблица 6.1). Существуют интерпретации 010, 111, на которых формулы множества L принимают значение 1. Значит, множество L выполнимо.

Таблица 6.1

x	y	z	$xy \to (x \to z)$	y	$x \vee \bar{z}$
0	0	0	1	0	1
0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	0
1	0	0	1	0	1
1	0	1	1	0	1
1	1	0	0	1	1
1	1	1	1	1	1

Пример 6.2. Докажите $\{\, x \to y,\ \bar{y} \,\} \vDash \bar{x}$, не используя метод резолюций.

Решение. 1 Покажем, что формула $G = \bar{x}$ истинна в каждой интерпретации, в которой истинны формулы $F_1 = x \to y$, $F_2 = \bar{y}$ с помощью таблицы истинности (таблица 6.2). Формулы F_1, F_2 и G истинны в интерпретации (0, 0).

Таблица 6.2 – Доказательство логического следствия $\{\, x \to y,\ \bar{y} \,\} \vDash \bar{x}$

x	y	$x \to y$	$\bar{y}$	$\bar{x}$	$(x \to y)\,\bar{y}$	$(x \to y)\,\bar{y} \to \bar{x}$	$x \to y)\,\bar{y}\ x$
0	0	1	1	1	1	1	0
0	1	1	0	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	1	1	0

2 Покажем, что формула $(x \to y)\,\bar{y} \to \bar{x}$ общезначима с помощью таблицы истинности (таблица 6.2).

3 Покажем противоречие формулы $(x \to y)\,\bar{y}\,\bar{x}$ с помощью таблицы истинности (таблица 6.2).

Найдем КНФ формулы $(x \to y)\,\bar{y} \to \bar{x}$:

$$(x \to y)\,\bar{y} \to \bar{x} = \overline{(\bar{x} \vee y)\bar{y}} \vee \bar{x} = x\bar{y} \vee y \vee \bar{x} = (x \vee y \vee \bar{x})(\bar{y} \vee y \vee \bar{x}) = 1.$$

Найдем ДНФ формулы $(x \to y)\,\bar{y}\ x$:

$$(x \to y)\,\bar{y}x = (\bar{x} \vee y)\,\bar{y}x = \bar{x}\,\bar{y}x \vee y\bar{y}x = 0 \vee 0 = 0.$$

Пример 6.3. Используя метод резолюций и разные стратегии, исследуйте выполнимость множества дизъюнктов $S = \{\, x \vee y,\ \bar{x} \vee y,\ x \vee \bar{y},\ \bar{x} \vee \bar{y} \,\}$.

Решение. *1 Стратегия насыщения*. Построим уровни опровержения до получения пустого дизъюнкта.

S_0: (1) $x \vee y$;
(2) $\bar{x} \vee y$;
(3) $x \vee \bar{y}$;
(4) $\bar{x} \vee \bar{y}$;

S_1: (5) y из (1) и (2);
(6) x из (1) и (3);
(7) $y \vee \bar{y}$ из (1) и (4);
(8) $x \vee \bar{x}$ из (1) и (4);
(9) $y \vee \bar{y}$ из (2) и (3);
(10) $x \vee \bar{x}$ из (2) и (3);
(11) $\bar{x}$ из (2) и (4);
(12) $\bar{y}$ из (3) и (4);

S_2: (13) $x \vee y$ из (1) и (7);
(14) $x \vee y$ из (1) и (8);
(15) $x \vee y$ из (1) и (9);
(16) $x \vee y$ из (1) и (10);
(17) y из (1) и (11);
(18) x из (1) и (12);
(19) y из (2) и (6);
(20) $\bar{x} \vee y$ из (2) и (7);
(21) $\bar{x} \vee y$ из (2) и (8);
(22) $\bar{x} \vee y$ из (2) и (9);
(23) $\bar{x} \vee y$ из (2) и (10);
(24) $\bar{x}$ из (2) и (12);
(25) x из (3) и (5);
(26) $x \vee \bar{y}$ из (3) и (7);
(27) $x \vee \bar{y}$ из (3) и (8);
(28) $x \vee \bar{y}$ из (3) и (9);
(29) $x \vee \bar{y}$ из (3) и (10);
(30) $\bar{y}$ из (3) и (11);
(31) $\bar{x}$ из (4) и (5);
(32) $\bar{y}$ из (4) и (6);
(33) $\bar{x} \vee \bar{y}$ из (4) и (7);
(34) $\bar{x} \vee \bar{y}$ из (4) и (8);
(35) $\bar{x} \vee \bar{y}$ из (4) и (9);
(36) $\bar{x} \vee \bar{y}$ из (4) и (10);
(37) y из (5) и (7);
(38) y из (5) и (9);
(39) $\square$ из (5) и (12).

Было порождено много лишних дизъюнктов. Например, (7), (8), (9) и (10) – тавтологии. Если же она порождается, то (за исключением очень немногих случаев) ее следует вычеркнуть. Дизъюнкты x, y, $\bar{x}$, $\bar{y}$ порождаются неоднократно. Также имеются другие повторяющиеся дизъюнкты: (13) – (16), (20) – (23), (26) – (29) и (33) – (36). Стратегия насыщения уровня обладает определенной избыточностью.

2 Линейная стратегия. Имеем:

(1) $x \vee y$;
(2) $\bar{x} \vee y$;
(3) $x \vee \bar{y}$;
(4) $\bar{x} \vee \bar{y}$;
(5) y из (1) и (2);
(6) x из (5) и (3);
(7) $\bar{y}$ из (6) и (4);
(8) $\square$ из (7) и (5).

3 Семантическая резолюция. Возьмем интерпретацию (0, 1), на которой дизъюнкты множества S и порождаемые резольвенты разбиваются на два множества: $S_1 = \{ x \vee y, \bar{x} \vee y, \bar{x} \vee \bar{y} \}$ и $S_2 = \{ x \vee \bar{y} \}$. Тогда имеем

(1) $x \vee y$ (S_1);
(2) $\bar{x} \vee y$ (S_1);
(3) $x \vee \bar{y}$ (S_2);
(4) $\bar{x} \vee \bar{y}$ (S_1);
(5) x из (1) и (3), (S_2);
(6) $\bar{y}$ из (4) и (3), (S_2);
(7) y из (2) и (5) (S_1);
(8) $\square$ из (7) и (6).

Здесь в скобках справа обозначены множества S_1 и S_2, которым принадлежат дизъюнкты.

Пример 6.4. Проверьте истинность следующего утверждения. Заработная плата возрастет в том и только в том случае, если будет инфляция. Если будет инфляция, то увеличится стоимость жизни. Заработная плата возрастет. Следовательно, увеличится стоимость жизни.

Решение. Рассмотрим простые высказывания: x – заработная плата возрастет, y – будет инфляция, z – увеличится стоимость жизни. Нужно доказать, что z есть логическое следствие формул $x \leftrightarrow y$, $y \to z$, x:

$$\{ x \leftrightarrow y, y \to z, x \} \vDash z.$$

Согласно теореме 6.2 необходимо показать, что множество формул $\{ x \leftrightarrow y, y \to z, x, \bar{z} \}$ невыполнимо. Найдем для формул КНФ:

$$x \leftrightarrow y = xy \vee \bar{x}\,\bar{y} = (\bar{x} \vee y)(x \vee \bar{y}),\ y \to z = \bar{y} \vee z.$$

Тогда множество дизъюнктов есть $S = \{ \bar{x} \vee y, x \vee \bar{y}, \bar{y} \vee z, x, \bar{z} \}$.

Построим резолютивный вывод используя стратегию предпочтения одночленам. Имеем

(1) $\bar{x} \vee y$;
(2) $x \vee \bar{y}$;
(3) $\bar{y} \vee z$;
(4) x;
(5) $\bar{z}$;
(6) y из (1) и (4);
(7) $\bar{y}$ из (5) и (3);
(8) □ из (6) и (7).

Пример 6.5. Выполнимо ли множество хорновских дизъюнктов:

$$S = \{ x \vee \bar{z} \vee \bar{t}, y, z, t \vee \bar{x} \vee \bar{z}, t \vee \bar{y}, \bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z} \}.$$

Решение. Выпишем дизъюнкты из $S_0 = S$ в ячейки нулевой строки таблицы 6.2. Каждая n-я строка содержит дизъюнкты из S_n, $n \geq 0$. Дизъюнкты, из которых строятся резольвенты, помечены снизу звёздочками.

Таблица 6.2 – Метод резолюций для хорновских дизъюнктов примера 6.5

Множество дизъюнктов, S_n	Дизъюнкты					
S_0	$x \vee \bar{z} \vee \bar{t}$	y*	z	$t \vee \bar{x} \vee \bar{z}$	$t \vee \bar{y}$*	$\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}$*
S_1	$x \vee \bar{z} \vee \bar{t}$ *	y	z*	$t \vee \bar{x} \vee \bar{z}$*	t	$\bar{x} \vee \bar{z}$ *
S_2	$x \vee \bar{t}$ *	y	z	$t \vee \bar{x}$	t	$\bar{x}$ *
S_3	x *	y	z	$t \vee \bar{x}$	t	$\bar{x}$ *
S_4	□					

На четвертом шаге имеем пустой дизъюнкт □, следовательно, множество S хорновских дизъюнктов невыполнимо.

6.6 Лабораторная работа 6 «Логическое следование формул»

Задание 6.1. Докажите невыполнимость или выполнимость множеств формул, используя метод резолюций. Примените произвольный порядок перебора дизъюнктов, а также стратегии: предпочтение одночленам, линейную, семантическую резолюцию.

1 $\{\, x \vee y \vee \bar{z},\ yz \to x,\ z,\ \bar{x} \,\}$;
2 $\{\, y \vee \bar{z},\ xz \to y,\ z \vee \bar{y},\ \bar{z} \,\}$;
3 $\{\, x \vee y \vee \bar{z},\ xz \to y,\ \bar{y} \vee \bar{z},\ z \,\}$;
4 $\{\, z \to y,\ \bar{y} \vee \bar{z},\ xz \to y,\ \bar{x} \vee z,\ \bar{y} \,\}$;
5 $\{\, x \vee z,\ z \to x,\ \bar{x} \vee \bar{z},\ y \vee \bar{x} \vee \bar{z},\ \bar{x} \,\}$;
6 $\{\, x \vee \bar{y} \vee z,\ \bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z},\ z \to y,\ x,\ \bar{z} \,\}$;
7 $\{\, \bar{x} \vee y \vee z,\ xy \to z,\ \bar{x} \vee \bar{z},\ \bar{x},\ z,\ x \,\}$;
8 $\{\, x \vee y,\ x \vee z,\ \bar{x} \vee \bar{y} \vee z,\ z \to \bar{y},\ y \,\}$;
9 $\{\, x \vee z,\ x \vee \bar{y},\ x \vee \bar{y} \vee z,\ z \to yx,\ y \,\}$;
10 $\{\, y \vee \bar{z},\ \bar{x} \vee \bar{y},\ x \vee y,\ xy \to z,\ \bar{y} \,\}$;
11 $\{\, x \vee y \vee \bar{z},\ yz \to x,\ z,\ \bar{x} \,\}$;
12 $\{x,\ xy \to \bar{z},\ y \vee z,\ x \vee \bar{z},\ x\}$;
13 $\{\, xy \to z,\ \bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z},\ x \to y \,\}$;
14 $\{\, x \to y,\ z \to x,\ x \vee z \vee \bar{y},\ y \,\}$;
15 $\{\, x \to \bar{y},\ z \to x,\ x \vee z \vee \bar{y},\ x,\ y \,\}$;
16 $\{\, x \vee \bar{y} \vee \bar{z},\ y \to x,\ z,\ \bar{x} \,\}$.

Задание 6.2 Определите, является ли G логическим следствием S:

1 $L = \{\, x\bar{y} \to z,\ x,\ x \to y \,\},\ G = \bar{x}z$;
2 $L = \{\, xz \to \bar{y},\ \bar{z},\ x \to y \,\},\ G = \bar{x}z$;
3 $L = \{\, xz \to y,\ \bar{z},\ \bar{x} \to y \,\},\ G = y\bar{z}$;
4 $L = \{\, x,\ y,\ xz \to \bar{y} \,\},\ G = \bar{z}$;
5 $L = \{\, xy \to \bar{z},\ \bar{x},\ x \to z \,\},\ G = yz$;
6 $L = \{\, \bar{x},\ y,\ xy \to \bar{z} \,\},\ G = x\bar{y}$;
7 $L = \{\, x\bar{y} \to z,\ \bar{x},\ x \to \bar{y} \,\},\ G = xz$;
8 $L = \{\, \bar{x},\ y,\ x\bar{z} \to \bar{y} \,\},\ G = x\bar{y}$;
9 $L = \{\, yz \to \bar{x},\ y,\ \bar{x} \to y \,\},\ G = yz$;
10 $L = \{\, x,\ y,\ x\bar{y} \to \bar{z} \,\},\ G = x\bar{y}$;
11 $L = \{\, x,\ \bar{z},\ xy \to z \,\},\ G = xy$;
12 $L = \{\, x,\ \bar{y},\ xy \to \bar{z} \,\},\ G = \bar{x}$;
13 $L = \{\, x \vee y,\ xz \to \bar{y} \,\},\ G = \bar{z}$;
14 $L = \{\, xz \to \bar{y},\ \bar{z},\ xz \to \bar{y} \,\},\ G = \bar{x}y$;
15 $L = \{\, \bar{x},\ y,\ x\bar{z} \to \bar{y} \,\},\ G = \bar{x}z$;
16 $L = \{\, x,\ y,\ yz \to x,\ z \to \bar{y} \,\},\ G = x\bar{z}$.

Задание 6.3. Запишите формально рассуждение на языке логики высказываний и исследуйте его истинность, используя метод резолюций.

1 Если Иван ляжет спать сегодня поздно, то утром он будет уставшим. Если он ляжет не поздно, то ему будет казаться, что он ленивый. Следовательно, Иван будет утром уставшим или ему будет казаться, что он ленивый.

2 Курс акций падает, если предварительные процентные ставки растут. Большинство людей несчастны, когда курс акций падает. Предварительные ставки растут. Следовательно, большинство людей несчастны.

3 Если конгресс откажется принять новые законы, то забастовка не будет окончена, если только она не длится более года или президент фирмы не уходит в отставку. Закончится ли забастовка, если конгресс отказывается принимать новые законы, и забастовка только началась.

4 Если инфляция растет, то цены на товары и услуги растут. Если цены растут, то падает уровень жизни. Инфляция растет. Следовательно, падает уровень жизни?

5 Если человек говорит неправду, то он заблуждается или вводит в заблуждение. Пусть человек говорит неправду, но не заблуждается. Следовательно, он вводит в заблуждение.

6 Предприятия А, В, С утверждают проекты на условиях: 1) если В не участвует в утверждении проекта, то не участвует и А, 2) если В принимает участие в утверждении проекта, то в нем принимают участие А и С. Следовательно, предприятие С принимает участие в утверждении проекта, если в нем принимает участие А.

7 Если налоги в бюджет не собраны, то либо секвестируется бюджет, либо правительство уходит в отставку. Если секвестируется бюджет, то падает уровень жизни. Налоги в бюджет не собраны. Следовательно, либо падает уровень жизни, либо уровень жизни не падает и правительство уходит в отставку.

8 Если идет дождь, то нежарко. Если светит солнце, то жарко. Идет дождь. Следовательно, нежарко и не светит солнце.

9 Экзамен сдан вовремя или сессия продлена. Если сессия продлена, то не сдана курсовая работа или не зачтены лабораторные работы. Курсовая работа сдана. Экзамен вовремя не сдан. Следовательно, неверно, что если курсовая работа сдана, то лабораторные работы зачтены.

10 Если имеет место денежная эмиссия, то растет курс доллара. Если эмиссии нет, и инфляция не растет, то курс доллара не растет. Инфляция не растет. Следовательно, имеет место эмиссия и растет курс доллара или нет эмиссии и курс доллара не растет.

11 Заработная плата возрастет только, если будет инфляция. Если будет инфляция, то увеличится стоимость жизни. Заработная плата возрастет. Следовательно, стоимость жизни увеличится.

12 Курс акций падает, если ставки на рынке растут. Если курс падает, то малый и средний бизнес уходит с рынка. Ставки на рынке растут. Следовательно, малый и средний бизнес уходит с рынка.

13 Иван или переутомился, или он болен. Если он переутомился, то он раздражается. Он не раздражается. Следовательно, Иван болен.

14 Если завтра будет холодно, Ольга наденет теплое пальто, если оно будет готово после ремонта. Завтра будет холодно, а пальто не будет готово после ремонта. Следовательно, Ольга не наденет теплое пальто.

15 Если исход скачек будет предрешен сговором или в игорных домах будут орудовать шулеры, то доходы от туризма упадут и город пострадает. Если доходы от туризма упадут, полиция будет довольна. Полиция никогда не бывает довольна. Следовательно, исход скачек не предрешен сговором.

16 Или Иван и Павел одного возраста, или Иван старше Павла. Если Иван и Павел одного возраста, то Нина и Павел не одного возраста. Если Ольга старше Ивана, то Павел старше Олега. Следовательно, или Нина и Павел не одного возраста, или Павел старше Олега.

Список использованных источников

1 Гаврилов, Г. П. Задачи и упражнения по дискретной математике : учебное пособие / Г. П. Гаврилов, А. А. Сапоженко. – 3-е изд., перераб. – М. : Физматлит, 2005. – 416 с.

2 Лавров, И. А. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов : учебное пособие / И. А. Лавров, Л. Л. Максимова. – 5-е изд. – М. : Физматлит, 2004. – 256 с.

3 Новиков, Ф. А. Дискретная математика для программистов : учебник / Ф. А. Новиков. – СПб. : Питер, 2007. – 364 с.

4 Таранников, Ю. В. Дискретная математика. Задачник : учебное пособие / Ю. В. Таранников. – М. : Изд-во Юрайт, 2016. – 385 с.

5 Тишин, В. В. Дискретная математика в примерах и задачах : учебное пособие / В. В. Тишин. – СПб. : БХВ-Петербург. 2008. – 352 с.

6 Плотников, А. Д. Дискретная математика : учебное пособие / А. Д. Плотников. – 2-е изд., испр. и доп. – М. : Новое знание, 2006. – 304 с.

7 Яблонский, С. В. Введение в дискретную математику / С. В. Яблонский. – 4-е изд. – М. : Высшая школа, 2003. – 384 с.

Производственно-практическое издание

Марченко Лариса Николаевна,
Семенчук Владимир Николаевич

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА: булевы функции и некоторые их реализации

Практическое пособие

Редактор *В. И. Шкредова*
Корректор *В. В. Калугина*

Подписано в печать 17.05.2019. Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная. Ризография. Усл. печ. л. 2,8.
Уч.-изд. л. 3,1. Тираж 25 экз. Заказ 308.

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий № 3/1452 от 17.04.2017.
Специальное разрешение (лицензия) № 02330 / 450 от 18.12.2013.
Ул. Советская, 104, 246019, г. Гомель.