

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КАЧМАЖА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССА МАГНИТНО-АБРАЗИВНОЙ ФИНИШНОЙ ОБРАБОТКИ ПЛОСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Д.А. Степаненко, Е.С. Еромин

Белорусский национальный технический университет, Минск

APPLICATION OF KACZMARZ METHOD FOR SOLVING INVERSE MODELLING PROBLEMS OF MAGNETIC-ABRASIVE FINISHING PROCESS OF PLANAR SURFACES

D.A. Stepanenko, E.S. Eromin

Belarusian National Technical University, Minsk

Аннотация. Рассматривается методика решения обратных задач моделирования процесса магнитно-абразивной финишной обработки плоских поверхностей. Решение задачи позволяет определять закон управления давлением на заготовку, обеспечивающий съем припуска в соответствии с заданной функцией. Задача формулируется в матричном виде на основе уравнения Престона, а соответствующая система линейных уравнений решается итерационным методом Качмажа. На основе анализа численных примеров показано, что управление давлением при обработке позволяет с достаточно высокой точностью (отклонение не более 2,2%) реализовать заданную функцию съема припуска, в частности, практически равномерную функцию съема, а также функцию съема, обеспечивающую компенсацию начальных погрешностей формы заготовки.

Ключевые слова: магнитно-абразивная финишная обработка, равномерность съема припуска, уравнение Престона, обратные задачи, метод Качмажа.

Для цитирования: Степаненко, Д.А. Применение метода Качмажа для решения обратных задач моделирования процесса магнитно-абразивной финишной обработки плоских поверхностей / Д.А. Степаненко, Е.С. Еромин // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 2 (59). – С. 90–98. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_2_59_90. – EDN: KOFBHW

Abstract. The article considers the solution technique for inverse modelling problems of magnetic-abrasive finishing of planar surfaces. The solution of the problem enables the determination of control law of the pressure exerted onto the workpiece needed for realization of material removal according to the prescribed function. The problem is posed in matrix form on the basis of Preston's equation, and the corresponding linear system of equations is solved using iterative Kaczmarz method. On the basis of numerical examples it is shown that pressure control during machining enables sufficiently precise (with deviation no more than 2.2%) realization of the prescribed material removal function, particularly, a nearly uniform removal function as well as the removal function providing compensation of initial shape errors of the workpiece.

Keywords: magnetic-abrasive finishing, uniformity of material removal, Preston's equation, inverse problems, Kaczmarz method.

For citation: Stepanenko, D.A. Application of Kaczmarz method for solving inverse modelling problems of magnetic-abrasive finishing process of planar surfaces / D.A. Stepanenko, E.S. Eromin // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2024. – № 2 (59). – P. 90–98. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_2_59_90 (in Russian). – EDN: KOFBHW

Введение

В настоящее время создание многих оптических, электронных и оптико-электронных устройств требует применения сверхплоских поверхностей с чрезвычайно высокими требованиями к шероховатости и глубине дефектного слоя. Примерами являются зеркала для сверхжесткого (экстремального) ультрафиолетового излучения, зеркала лазерных резонаторов, подложки для микро- и наноэлектроники [1]. Для оптических зеркал отклонение от плоскостности не должно превышать $\lambda/10$, где λ – длина волны светового излучения, что соответствует значениям

менее 80 нм для видимого света и еще более низким значениям для ультрафиолетового излучения, а для полупроводниковых подложек нормируется параметр TTV (Total Thickness Variation), представляющий собой общее изменение (отклонение) толщины по пластине. Требования к параметру TTV ужесточаются по мере увеличения степени интеграции электронных микросхем, миниатюризация элементов которых требует применения проекционных фотолитографических систем с большими числовыми апертурами [2]. В настоящее время технология магнитореологической финишной обработки (МРФО)

позволяет достигнуть значений TTV до 40 нм для подложек диаметром 300 мм [2]. Традиционно финишная обработка полупроводниковых подложек производится методом химико-механического полирования, однако разрабатываются альтернативные методы обработки, такие как МРФО, магнитно-абразивная финишная обработка (МАФО), плазменная, ионно-лучевая и лазерная обработка [3], [4]. МАФО является перспективным методом обработки полупроводниковых подложек, так как позволяет обеспечить требуемые для них значения шероховатости (Ra 0,7..2 нм) и минимальную глубину дефектного слоя [5, с. 192]. Однако недостаточно исследованными являются проблема обеспечения равномерности съема припуска при МАФО и более общая проблема обеспечения съема припуска по заданному закону (корректирующей обработки поверхности, имеющей отклонения формы). Моделирование процесса МАФО включает в себя две задачи: прямую, состоящую в расчете функции съема припуска при заданных параметрах процесса обработки, и обратную, заключающуюся в определении параметров процесса МАФО, обеспечивающих съем припуска по заданному закону [6]. Упомянутые выше проблемы относятся к классу обратных задач. Прямые задачи моделирования процесса МАФО ранее рассматривались в работах [6], [7], а обратные задачи – в работе [6], где описаны матричная формулировка обратной задачи и методика ее решения с помощью псевдообратной матрицы Мура – Пенроуза с использованием регуляризации по Тихонову, а также в работе [8], где описаны формулировка и решение обратной задачи для случая обработки с простой кинематикой. В данной статье описываются альтернативный подход к решению обратных задач моделирования процесса МАФО, основанный на применении метода Качмажа, и его преимущества по сравнению с методикой, предложенной ранее.

1 Постановка и методика решения задачи

Схема, иллюстрирующая кинематику процесса МАФО, приведена на рисунке 1.1.

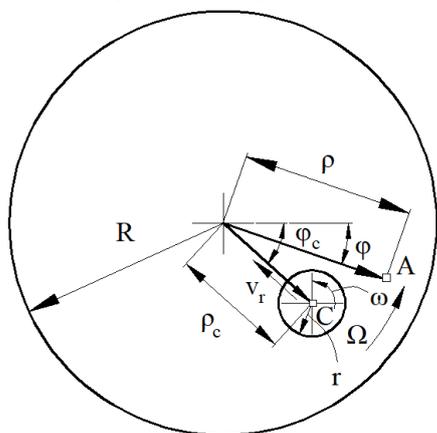


Рисунок 1.1 – Кинематика процесса МАФО

На рисунке использованы следующие обозначения: R – радиус обрабатываемой заготовки; r – радиус зоны обработки (радиус полюсного наконечника магнитной системы станка); Ω – угловая скорость вращения заготовки; ω – угловая скорость вращения полюсного наконечника; v_r – линейная скорость радиального перемещения полюсного наконечника; (ρ, φ) – полярные координаты точки A поверхности заготовки с радиус-вектором \mathbf{p} ; (ρ_c, φ_c) – полярные координаты центра C зоны обработки, имеющего радиус-вектор \mathbf{p}_c .

Линейная скорость съема припуска RR (скорость изменения толщины заготовки dH/dt) может быть определена из уравнения Престона [9, с. 18]

$$RR(\rho, \varphi, t) = K_p p(\rho, \varphi, \rho_c(t), \varphi_c(t)) v(\rho, \varphi, \rho_c(t), \varphi_c(t)), \quad (1.1)$$

где K_p – коэффициент Престона, зависящий от условий обработки; $p(\rho, \varphi, \rho_c(t), \varphi_c(t))$ – давление на поверхность заготовки в точке с координатами (ρ, φ) в момент времени t , соответствующий расположению центра зоны обработки в точке с координатами $(\rho_c(t), \varphi_c(t))$; $v(\rho, \varphi, \rho_c(t), \varphi_c(t))$ – скорость движения точки поверхности заготовки с координатами (ρ, φ) относительно полюсного наконечника.

Функция съема припуска рассчитывается путем интегрирования уравнения (1.1):

$$h(\rho, \varphi) = \int_0^T RR(\rho, \varphi, t) dt, \quad (1.2)$$

где T – продолжительность процесса обработки.

Обратная задача моделирования процесса МАФО состоит в определении закона управления параметрами обработки (давлением p и/или скоростью v), обеспечивающего требуемое распределение съема припуска $h_{\text{зад}}(\rho, \varphi)$. Предпочтительным является управление давлением p , так как оно влияет на скорость съема припуска линейным образом, а скорость v связана с кинематическими параметрами процесса обработки (Ω , ω и v_r) нелинейной зависимостью. Управление скоростью v рационально использовать для процессов обработки, характеризующихся простой кинематикой, например, линейным перемещением инструмента относительно неподвижной заготовки [8]. С точки зрения технической реализации возможны следующие варианты управления давлением при обработке:

1. Регулирование индукции магнитного поля путем изменения силы тока, протекающего через обмотку электромагнитного индуктора станка.
2. Регулирование воздушного зазора между полюсным наконечником станка и поверхностью заготовки.
3. Регулирование скважности импульсов магнитного поля при фиксированной частоте повторения (широотно-импульсная модуляция).

Давление может регулироваться за счет изменения параметров магнитного поля, так как давление при МАФО определяется величиной сил, действующих со стороны магнитного поля на частицы ферроабразивного порошка [10].

Так как в дальнейшем будет рассматриваться только качественная картина распределения съема припуска, то для упрощения расчетов можно положить в уравнении (1.1) $K_p = 1$. Примем также предположение о равномерном распределении давления в зоне обработки:

$$p(\rho, \varphi, \rho_c(t), \varphi_c(t)) = \begin{cases} w(t)p_0 & \text{при } |\rho - \rho_c(t)| \leq r, \\ 0 & \text{при } |\rho - \rho_c(t)| > r, \end{cases}$$

где p_0 – начальное давление, для которого путем решения прямой задачи при $w(t) = 1$ или экспериментальным путем при неизменном давлении на заготовку определяется функция съема припуска $h_{\text{баз}}(\rho, \varphi)$ (базовая функция съема припуска); $w(t)$ – безразмерная весовая функция, описывающая закон управления давлением при обработке, обеспечивающий съем припуска в соответствии с заданной функцией $h_{\text{зад}}(\rho, \varphi)$.

При необходимости реальная функция распределения давления может быть определена экспериментальным или расчетным путем и без труда введена в рассматриваемую модель.

Если разбить интервал времени $t \in [0; T]$ на N_t подинтервалов вида $t \in [t_k; t_{k+1}]$, где $t_k = 2\pi(k-1)/\Omega$ при $k \in \{1, 2, \dots, N_t\}$, $t_{N_t+1} = T$, $N_t =]\Omega T/2\pi[$ – число оборотов заготовки за время обработки T (N_t -й оборот в общем случае является неполным), $] \cdot [$ – операция округления до ближайшего большего целого значения, и считать, что весовая функция $w(t)$ является кусочно-постоянной, принимая значение $w(t) = w_k$ при $t \in [t_k; t_{k+1}]$, то уравнение (1.2) примет вид

$$h_{\text{зад}}(\rho, \varphi) = \sum_{k=1}^{N_t} w_k h_{\text{баз}}^{(k)}(\rho, \varphi), \quad (1.3)$$

где

$$h_{\text{баз}}^{(k)}(\rho, \varphi) = p_0 \int_{t_k}^{t_{k+1}} v(\rho, \varphi, \rho_c(t), \varphi_c(t)) \Phi(r - |\rho - \rho_c(t)|) dt$$

– базовая функция съема припуска для k -го оборота заготовки, $\Phi(\cdot)$ – единичная функция Хевисайда.

Если считать, что функции $h_{\text{баз}}^{(k)}(\rho, \varphi)$ и $h_{\text{зад}}(\rho, \varphi)$ являются осесимметричными (радиальными), то уравнение (1.3) можно записать в одномерной форме (зависящей только от радиальной координаты ρ):

$$\tilde{h}_{\text{зад}}(\rho) = \sum_{k=1}^{N_t} w_k \tilde{h}_{\text{баз}}^{(k)}(\rho), \quad (1.4)$$

где $\tilde{h}_{\text{зад}}(\rho) = h_{\text{зад}}(\rho, 0)$, $\tilde{h}_{\text{баз}}^{(k)}(\rho) = h_{\text{баз}}^{(k)}(\rho, 0)$.

Принятое допущение об осесимметричности функций $h_{\text{баз}}^{(k)}(\rho, \varphi)$ является справедливым при малых относительных радиальных подачах $s_r/r = 2\pi v_r/\Omega r \ll 1$. Функция $h_{\text{зад}}(\rho, \varphi)$ является радиальной при осесимметричности начального распределения отклонений формы заготовки. При больших относительных радиальных подачах и/или неосесимметричности начального распределения отклонений формы заготовки уравнение (1.3) должно решаться в двумерной форме с более высокой частотой дискретизации по времени, позволяющей регулировать давление в пределах одного оборота заготовки, что необходимо для коррекции локальных азимутальных изменений профиля заготовки.

Если дискретизировать уравнение (1.4) по радиальной координате ($\rho_i = iR/N_r$, $i \in \{1, 2, \dots, N_r - 1\}$), то его можно будет представить в матричной форме:

$$\{\tilde{\mathbf{h}}_{\text{баз}}\} \mathbf{w} = \tilde{\mathbf{h}}_{\text{зад}}, \quad (1.5)$$

где $\tilde{h}_{\text{баз } i, k} = \tilde{h}_{\text{баз}}^{(k)}(\rho_i)$, $\tilde{h}_{\text{зад } i} = \tilde{h}_{\text{зад}}(\rho_i)$.

Точки с координатами $\rho = 0$ и $\rho = R$ не включаются в совокупность точек дискретизации, так как в дальнейшем рассматривается случай $\rho_c(0) = R - r$, $\rho_c(T) = r$, для которого $\tilde{h}_{\text{баз}}^{(k)}(0) = \tilde{h}_{\text{баз}}^{(k)}(R) = 0$ (так называемый «краевой эффект», состоящий в снижении съема припуска до нуля на краях заготовки, не пересекаемых инструментом при обработке). При необходимости рассмотрения более общего случая $\rho_c(0) > R - r$, $\rho_c(T) < r$ дискретизация должна выполняться по схеме $\rho_i = (i-1)R/N_r$, $i \in \{1, 2, \dots, N_r + 1\}$.

Уравнение (1.5) может быть решено с помощью псевдообратной матрицы Мура – Пенроуза [6], однако представляют интерес и альтернативные подходы к его решению. В частности, при решении уравнения (1.3) в двумерной постановке оно сводится к уравнению вида (1.5) с большим числом неизвестных, для которого псевдоинверсия матрицы является чрезвычайно затратной для вычислений. Поэтому целесообразно на примере одномерной задачи рассмотреть в качестве тестового примера специальные приемы, применяемые для решения линейных систем уравнений с большим числом неизвестных. Такие линейные системы возникают, например, в обратных задачах компьютерной томографии при восстановлении изображений по их проекциям и решаются с помощью итеративных методов алгебраической реконструкции, примером которых является метод ART (Algebraic Reconstruction Technique) [11, с. 47]. В задачах компьютерной томографии возникают системы вида $\{\mathbf{A}\} \mathbf{x} = \mathbf{b}$, где \mathbf{x} – подлежащий определению вектор

свойств объекта, например, линейного коэффициента ослабления излучения в рентгеновской томографии; \mathbf{b} – вектор проекционных данных; $\{\mathbf{A}\}$ – матричная форма оператора проецирования (в рентгеновской томографии представляет собой оператор интегрирования вдоль проекционных лучей) [12]. Общими свойствами рассматриваемых обратных задач компьютерной томографии и моделирования процесса МАФО являются неотрицательность элементов матрицы, положительность вектора правой части и разреженность матрицы. Решение обоих типов задач должно удовлетворять требованию неотрицательности. Важным свойством итеративных методов алгебраической реконструкции является построчный характер вычислений, то есть при выполнении итераций одновременно используется только одно из уравнений системы. Это позволяет уменьшить загрузку оперативной памяти, так как не требуется хранение в оперативной памяти всей матрицы $\{\mathbf{A}\}$.

С математической точки зрения метод ART эквивалентен методу Качмажа, широко используемому для решения переопределенных систем линейных уравнений с большим числом неизвестных [13]. В общем случае алгоритм Качмажа формулируется следующим образом:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \lambda_k \frac{b_i - (\{\mathbf{A}\}^T)^{<i>} \cdot \mathbf{x}^{(k)}}{\|(\{\mathbf{A}\}^T)^{<i>}\|^2} (\{\mathbf{A}\}^T)^{<i>},$$

$$\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0},$$

где $\mathbf{x}^{(k)}$ – k -е приближение решения; $i = \text{mod}(k, N) + 1$ – номер уравнения системы, используемого при выполнении текущего шага алгоритма; N – количество уравнений системы; $\text{mod}(k, N)$ – остаток от деления числа k на число N ; λ_k – релаксационный параметр; $(\{\mathbf{A}\}^T)^{<i>}$ – i -й столбец транспонированной матрицы $\{\mathbf{A}\}$; точка обозначает скалярное произведение векторов; $\|\cdot\|$ – евклидова (ℓ_2) норма.

Формула $i = \text{mod}(k, N) + 1$ обеспечивает приведение значений i к диапазону от 1 до N , когда номер шага k превышает количество N уравнений системы (периодический возврат к начальному уравнению системы после выполнения итераций на всех уравнениях системы).

Релаксационный параметр λ_k может приниматься равным единице, однако его правильный выбор позволяет ускорить сходимость алгоритма. Простейшим вариантом удовлетворения требованию неотрицательности решений является присвоение нулевых значений отрицательным элементам вектора $\mathbf{x}^{(k+1)}$ [14], однако в рассматриваемых далее численных примерах требование неотрицательности удовлетворяется автоматически. Матрица $\{\mathbf{A}\}$ является плохо обусловленной для многих обратных задач. Улучшению обусловленности задачи способствует ее регуляризация,

в результате которой также может повышаться гладкость решения [6; 15, с. 49]. Метод Качмажа обладает регуляризационными свойствами, если рассматривать в качестве параметра регуляризации количество шагов k [16]. При использовании регуляризации по Тихонову выбор оптимальных значений параметра регуляризации является более сложной задачей. В дальнейшем на основе анализа численных примеров будет показано, что увеличение числа шагов k приводит к повышению точности решения, однако при этом ухудшается гладкость решения. В связи с этим выбор значения параметра регуляризации является компромиссной задачей, требующей соблюдения оптимального баланса между точностью и гладкостью решения.

2 Результаты и их обсуждение

Расчеты производились с помощью программы Mathcad при следующих значениях исходных данных: радиус заготовки $R = 150$ мм, радиус полюсного наконечника $r = 10$ мм, угловая скорость вращения заготовки $\Omega = 2\pi$ рад/с, угловая скорость вращения полюсного наконечника $\omega = 10\Omega$, линейная скорость радиального перемещения полюсного наконечника $v_r = 1$ мм/с, $N_r = 150$, начальное положение центра зоны обработки $\rho_c(0) = R - r$, конечное положение центра зоны обработки $\rho_c(T) = r$, продолжительность обработки $T = 130$ с, $N_i = 130$.

Пример 1: задача о равномерном съеме припуска с краевым эффектом. Требуемый закон съема припуска задавался в виде трапециoidalной функции (рисунок 2.1, а, кривая 1), что соответствует равномерному съему припуска в зоне $2r \leq \rho \leq R - 2r$ и учитывает возникновение зон краевого эффекта.

Расчет функций $\tilde{h}_{\text{баз}}(\rho) = h_{\text{баз}}(\rho, 0)$ и $\tilde{h}_{\text{баз}}^{(k)}(\rho)$ производился с помощью ранее описанной методики решения прямых задач [6]. Величина съема припуска выражалась в относительных единицах путем деления расчетного значения величины съема на максимальное значение базовой функции $\tilde{h}_{\text{баз}}(\rho)$, график которой представлен на рисунке 2.1, б.

В качестве критерия остановки итераций в методе Качмажа использовалось условие

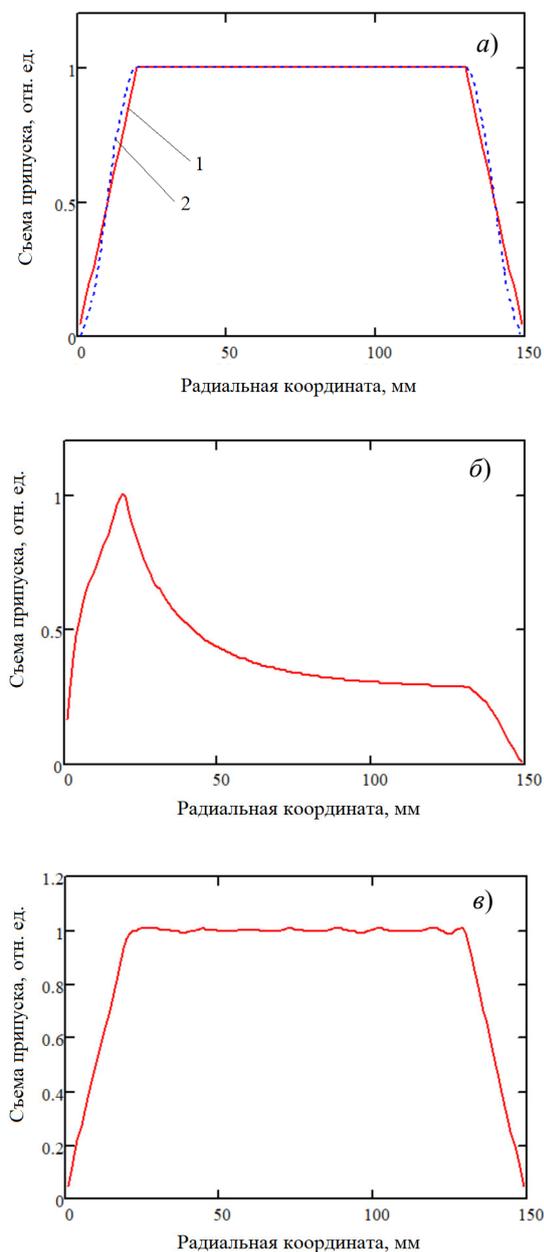
$$\frac{\|\mathbf{w}^{((k+1)N)} - \mathbf{w}^{(kN)}\|}{\|\langle \mathbf{w}^{((k+1)N)} \rangle\|} < 0,05, \quad (2.1)$$

где $k \in \{0, 1, \dots\}$, $\langle \cdot \rangle$ – среднее значение, N – количество уравнений системы (1.5).

Условие (2.1) удовлетворялось при $k = 38$, что соответствует 39 полным циклам итераций на всех уравнениях системы.

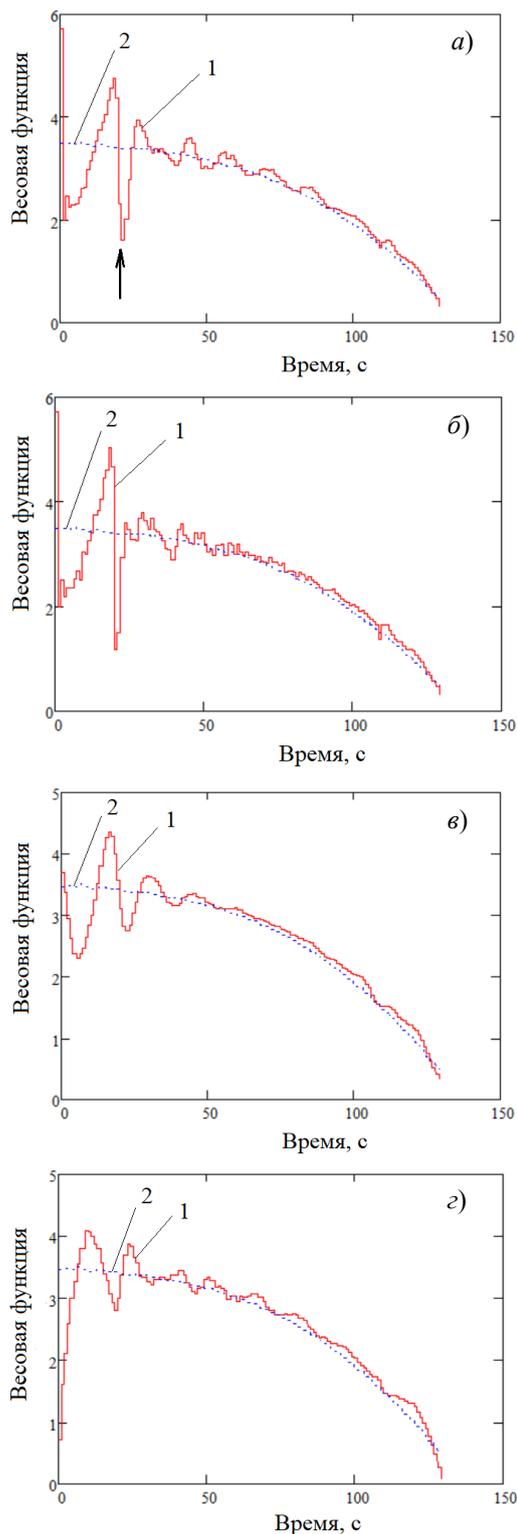
Расчетное распределение съема припуска, полученное на основе решения обратной задачи,

представлено на рисунке 2.1, в. Как следует из анализа графика, в зоне равномерного съема отклонение от равномерности съема припуска не превышает 2,2%. На рисунке 2.2 а, б представлены расчетные графики изменения весовой функции $w(t)$, полученные методом Качмажа при различных значениях количества итераций.



1 – трапецидальная функция съема;
 2 – сглаженная функция съема

Рисунок 2.1 – Графики съема припуска:
 а) график требуемого распределения съема припуска;
 б) график базовой функции съема;
 в) график, полученный на основе решения обратной задачи



1 – кривые, полученные путем решения обратной задачи; 2 – кривые, полученные на основе приближенных формул

Рисунок 2.2 – Графики изменения весовой функции:
 а) расчет методом Качмажа, 39 итераций;
 б) расчет методом Качмажа, 128 итераций;
 в) расчет с помощью матрицы Мура – Пенроуза;
 з) расчет методом Качмажа для сглаженной функции $\tilde{h}_{зад}(\rho)$, 39 итераций

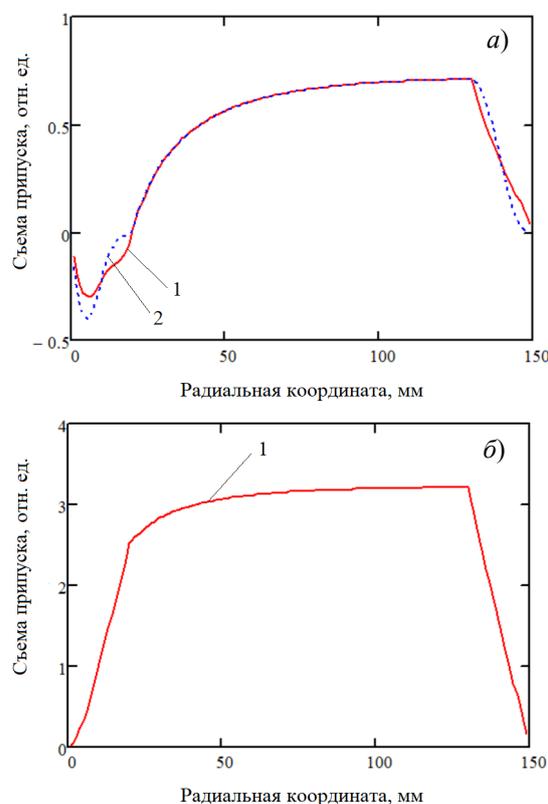
Для сравнения на этом же рисунке приведены графики изменения весовой функции $w(t)$, рассчитанные путем решения обратной задачи с помощью матрицы Мура – Пенроуза с использованием регуляризации по Тихонову [6] (рисунок 2.2, в) и на основе приближенных формул, первоначально предложенных (без строгого математического обоснования) применительно к задаче о нанесении равномерных по толщине покрытий [6], [17]. Как видно из графиков, с увеличением количества итераций наблюдается снижение гладкости весовой функции, что усложняет техническую реализацию соответствующего закона управления давлением при обработке. Выигрыш в точности решения оказывается при этом несущественным: отклонение от равномерности съема припуска в зоне равномерного съема составляет около 1,6% при расчете весовой функции по 128 итерациям против 2,2% при расчете по 39 итерациям. Весовые функции, рассчитанные путем решения обратной задачи, совершают колебания относительно значений, рассчитанных по приближенным формулам, с сохранением общего тренда изменения. Общий характер изменения весовых функций, рассчитанных методом Качмажа, близок к характеру изменения функции, рассчитанной с помощью матрицы Мура – Пенроуза. Для весовых функций, рассчитанных методом Качмажа, в момент времени, соответствующий прохождению центра зоны обработки через границу $\rho = R - 2r$ зоны краевого эффекта, наблюдается разрыв первого рода (отмечен стрелкой на рисунке 2.2 а), что может быть объяснено разрывностью первой производной функции $\tilde{h}_{зад}(\rho)$ в точке $\rho = R - 2r$ и может затруднять управление давлением при обработке. При использовании сглаженной функции $\tilde{h}_{зад}(\rho)$, для которой съем припуска в зонах краевого эффекта описывается косинусоидальными функциями (рисунок 2.1, а, кривая 2), получается кривая изменения весовой функции, не имеющая разрывов первого рода и представленная на рисунке 2.2, з.

Пример 2: задача определения параметров корректирующей обработки. Предположим, что заготовка имеет погрешности формы, вызванные обработкой при постоянном давлении, съем припуска при которой описывается базовой функцией съема $\tilde{h}_{баз}(\rho)$ (рисунок 2.1, б). Для устранения погрешностей формы при корректирующей обработке естественно определить функцию требуемого распределения съема припуска как

$$\tilde{h}_{корр}(\rho) = \tilde{h}_{зад0}(\rho) - \tilde{h}_{баз}(\rho), \quad (2.2)$$

где $\tilde{h}_{зад0}(\rho)$ – функция требуемого распределения съема припуска, используемая в задаче о равномерном съеме припуска (рисунок 2.1, а).

Так как величина съема припуска должна удовлетворять ограничению $\tilde{h}_{корр}(\rho) \geq 0$, то определение вида (2.2) можно использовать только при условии $\tilde{h}_{зад0}(\rho) \geq \tilde{h}_{баз}(\rho)$, однако данное условие может не выполняться в зоне краевого эффекта, что иллюстрируется рисунком 2.3, а.



1 – кривые, полученные для трапецеидальной функции $\tilde{h}_{зад0}(\rho)$; 2 – кривые, полученные для сглаженной функции $\tilde{h}_{зад0}(\rho)$

Рисунок 2.3 – Графики функции требуемого распределения съема припуска:

а) расчет по формуле (2.2);

б) расчет по формуле (2.3)

Как показывает рисунок 2.3, б, добиться выполнения условия $\tilde{h}_{корр}(\rho) \geq 0$ можно путем введения в уравнение (2.2) коэффициента $K_h > 1$, характеризующего повышение максимального значения суммарного съема припуска $\tilde{h}_{корр}(\rho) + \tilde{h}_{баз}(\rho)$ по сравнению с максимальным значением съема при базовой обработке:

$$\tilde{h}_{корр}(\rho) = K_h \tilde{h}_{зад0}(\rho) - \tilde{h}_{баз}(\rho). \quad (2.3)$$

Для трапецеидальной функции $\tilde{h}_{зад0}(\rho)$ минимальное значение коэффициента K_h составило 3,3, а для сглаженной функции $\tilde{h}_{зад0}(\rho)$ – 26,8. При расчете было принято значение $K_h = 3,5$ для трапецеидальной функции.

На рисунке 2.4 представлены расчетный график изменения весовой функции $w(t)$, полученный методом Качмажа для 39 итераций, и расчетное распределение суммарного съема припуска $\tilde{h}_{\text{корр}}(\rho) + \tilde{h}_{\text{баз}}(\rho)$, полученные для трапецидальной функции $\tilde{h}_{\text{зад}0}(\rho)$.

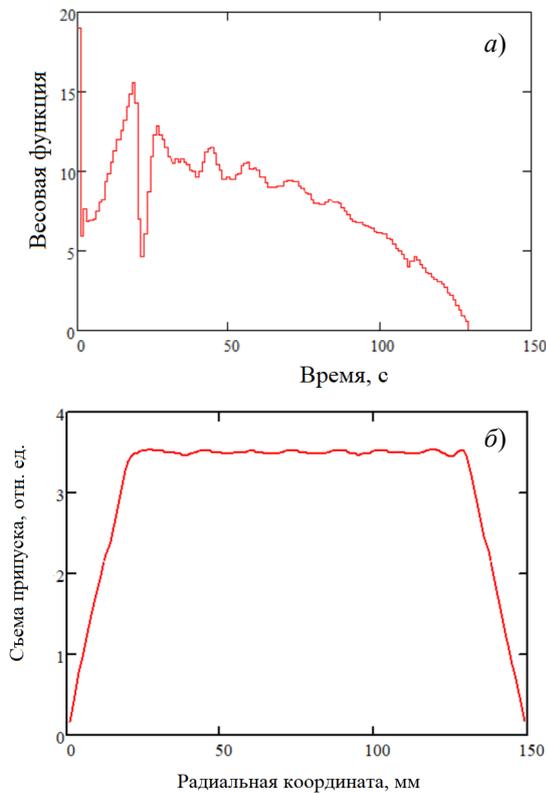


Рисунок 2.4 – Результаты решения обратной задачи для корректирующей обработки:
 а) график изменения весовой функции;
 б) распределение суммарного съема припуска

Отклонение от равномерности съема припуска в зоне равномерного съема составляет около 2,2%.

Рассмотренная задача может быть решена другим, более простым способом, так как нам была доступна априорная информация об условиях формирования исходных погрешностей формы (было сделано предположение, что они вызваны обработкой при постоянном давлении). Так как съем припуска линейно зависит от величины давления на заготовку, то при обработке заготовки в несколько этапов (начальная обработка с последующей корректирующей обработкой) эквивалентная весовая функция (весовая функция, соответствующая съему суммарного припуска за один этап) равна сумме весовых функций для каждого из этапов:

$$w_{\text{экв}}(t) = w_{\text{нач}}(t) + w_{\text{корр}}(t).$$

Так как нами было принято предположение о постоянстве давления на первом (начальном)

этапе обработки, то весовая функция для первого этапа $w_{\text{нач}}(t) = 1$. Эквивалентная весовая функция должна иметь вид $w_{\text{экв}}(t) = K_w w_0(t)$, где $w_0(t)$ – весовая функция, полученная путем решения задачи о равномерном съеме припуска, $K_w > 1$ – масштабный коэффициент. Таким образом, весовая функция для второго (корректирующего) этапа обработки будет иметь вид

$$w_{\text{корр}}(t) = w_{\text{экв}}(t) - w_{\text{нач}}(t) = K_w w_0(t) - 1.$$

Введение масштабного коэффициента необходимо для удовлетворения ограничения $w_{\text{корр}}(t) \geq 0$: минимальное значение масштабного множителя определяется по формуле

$$K_{w \text{ min}} = 1/\min(w_0(t)) = 3,449.$$

Так как масштабирование весовой функции сопровождается пропорциональным изменением величины съема припуска, то коэффициенты K_w и K_h эквивалентны, что подтверждается близостью их расчетных минимальных значений. В справедливости равенства $w_{\text{корр}}(t) = K_w w_0(t) - 1$ можно убедиться путем сравнения рисунков 2.2, а и 2.4, а: они изображают одну и ту же функцию с точностью до масштабирования и параллельного переноса. Так как при расчете было принято значение $K_h = 3,5$, близкое к минимальному значению 3,449, то при $t \rightarrow T$ весовая функция, представленная на рисунке 2.4, а, стремится к нулю.

При отсутствии априорной информации об условиях формирования исходных погрешностей формы соответствующая начальному этапу обработки весовая функция $w_{\text{нач}}(t)$ может быть определена путем решения обратной задачи, в которой $\tilde{h}_{\text{зад}}(\rho) = \tilde{h}_{\text{нач}}(\rho)$, где $\tilde{h}_{\text{нач}}(\rho)$ – функция съема припуска при начальной обработке. Весовая функция для корректирующего этапа обработки будет рассчитываться по формуле

$$w_{\text{корр}}(t) = K_w w_0(t) - w_{\text{нач}}(t).$$

Пример 3: задача о равномерном съеме припуска без краевого эффекта. Требуемый закон съема припуска задавался в виде функции $\tilde{h}_{\text{зад}}(\rho) = 1$. Технически устранение краевого эффекта может быть достигнуто за счет пересечения полюсным наконечником края заготовки $\rho = R$ и ее центра $\rho = 0$ [6]: при расчете функции $\tilde{h}_{\text{баз}}(\rho)$, график которой представлен на рисунке 2.5, а, были приняты значения $\rho_c(0) = R + r$ и $\rho_c(T) = 0$.

В результате расчета была определена весовая функция, график которой представлен на рисунке 2.5, б. Соответствующее ей распределение съема припуска представлено на рисунке 2.5, в и характеризуется отклонением от равномерности около 1,5%.

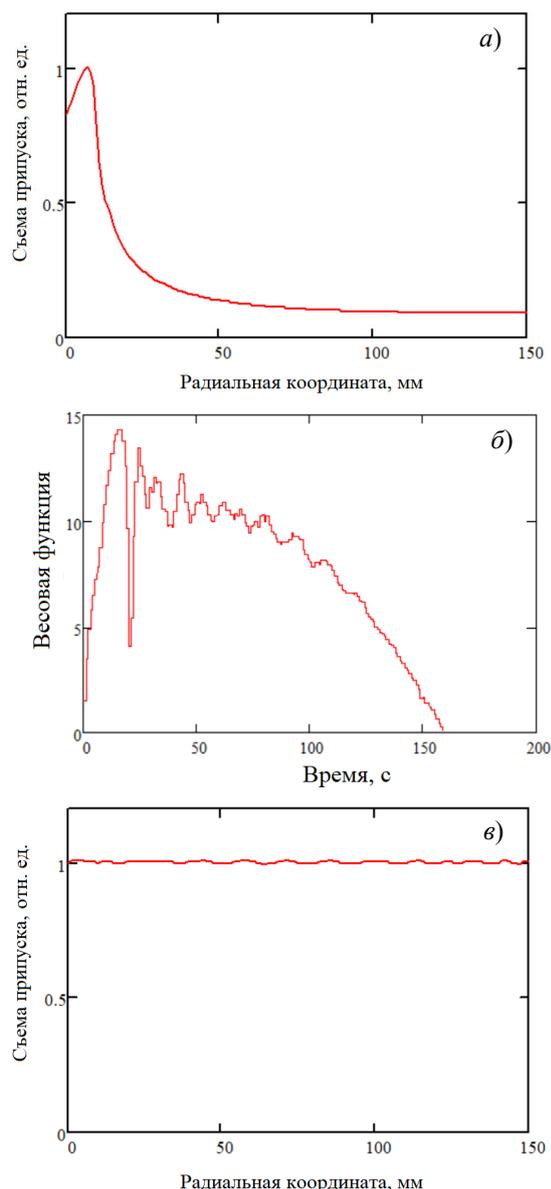


Рисунок 2.5 – Результаты расчетов для задачи о равномерном съеме припуска без краевого эффекта:

- а) график базовой функции съема;
- б) график изменения весовой функции;
- в) график расчетного съема припуска, 58 итераций

Заключение

1. Разработана методика решения обратных задач моделирования процесса МАФО плоских поверхностей, основанная на применении метода Качмажа и позволяющая определять закон управления давлением на заготовку при обработке, обеспечивающий съем припуска в соответствии с заданной функцией.

2. На основе анализа численных примеров показано, что управление давлением при обработке позволяет с достаточно высокой точностью (отклонение не более 2,2%) реализовать

заданную функцию съема припуска, в частности, производить съем припуска, близкий к равномерному, а также съем припуска в соответствии с функцией, обеспечивающую компенсацию начальных погрешностей формы заготовки (корректирующая обработка).

3. Показаны преимущества метода Качмажа по сравнению с другими методами решения обратной задачи, в частности, методом, основанном на применении псевдообратной матрицы Мура – Пенроуза и регуляризации по Тихонову.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Challenges in realizing ultraflat materials surfaces* / T. Yatsui [et al.] // *Beilstein Journal of Nanotechnology*. – 2013. – Vol. 4. – P. 875–885.

2. *Manufacture and metrology of 300 mm silicon wafers with ultra-low thickness variation* / U. Griesmann [et al.] // *AIP Conference Proceedings*. – 2007. – Vol. 931. – P. 105–110.

3. *Review on the various strategies adopted for the polishing of silicon wafer – A chemical perspective* / M. Srivastava [et al.] // *Materials Today: Proceedings*. – 2022. – Vol. 63. – P. 62–68.

4. *Polishing approaches at atomic and close-to-atomic scale* / Z. Geng [et al.] // *Micromachines*. – 2023. – Vol. 14. – Article 343.

5. *Хомич, Н.С.* Магнитно-абразивная обработка изделий / Н.С. Хомич. – Минск: БНТУ, 2006. – 217 с.

6. *Степаненко, Д.А.* Обеспечение равномерности съема припуска при магнитно-абразивной финишной обработке полупроводниковых пластин за счет управления режимами процесса обработки / Д.А. Степаненко, Е.С. Еромин // *Наука и техника*. – 2023. – № 6. – С. 477–486.

7. *Моделирование кинематики процесса магнитно-абразивного полирования кремниевых пластин* / Н.С. Хомич [и др.] // *Вестник БНТУ*. – 2009. – № 1. – С. 32–38.

8. *Zhang, Y.* Study on corrective abrasive finishing for workpiece surface by using magnetic abrasive finishing processes / Y. Zhang, Y. Zou // *Machines*. – 2022. – Vol. 10. – Article 98.

9. *Luo, J.* Integrated Modeling of Chemical Mechanical Planarization for Sub-Micron IC Fabrication / J. Luo, D. Dornfeld. – Berlin: Springer, 2004. – 311 p.

10. *Modeling of material removal in magnetic finishing based on Maxwell's stress tensor theory and its experimental validation* / X. He [et al.] // *Journal of Materials Processing Technology*. – 2023. – Vol. 312. – Article 117808.

11. *Byrne, C.L.* Iterative Algorithms in Inverse Problems / C.L. Byrne. – N.Y.: Chapman & Hall / CRC, 2014. – 300 p.

12. *Older, J.K.* Matrix formulation of computed tomogram reconstruction / J.K. Older, P.C. Johns // *Physics in Medicine and Biology*. – 1993. – Vol. 38. – P. 1051–1064.

13. *Sznajder, R.* Kaczmarz algorithm revisited / R. Sznajder // *Czasopismo Techniczne. Nauki Podstawowe*. – 2015. – № 2-NP. – P. 247–254.

14. *Popa, C.* Constrained Kaczmarz extended algorithm for image reconstruction / C. Popa // *Linear Algebra and its Applications*. – 2008. – Vol. 429. – P. 2247–2267.

15. *Bouvier, C.* Investigation of polishing algorithms and removal processes for a deterministic subaperture polisher: PhD thesis / C. Bouvier. – University of Rochester, 2007. – 272 p.

16. *Semi-convergence properties of Kaczmarz's method* / T. Elfving [et al.] // *Inverse Problems*. – 2014 – Vol. 30. – Article 055007.

17. *Stepanenko, D.A.* Modeling of spraying with time-dependent material feed rate / D.A. Stepanenko // *Applied Mathematical Modelling*. – 2007. – Vol. 31. – P. 2564–2576.

Поступила в редакцию 29.01.2024.

Информация об авторах

Степаненко Дмитрий Александрович – д.т.н., профессор

Еромин Егор Сергеевич – аспирант