

Приближение Вина в ультрафиолетовой области спектра теплового излучения звёзд

О.В. НОВИКОВА, Г.Ю. ТЮМЕНКОВ

В работе проведена количественная оценка эффективности приближения Вина для теплового излучения звёзд в ультрафиолетовой области спектра. Для ряда фиксированных температур рассчитано относительное отклонение спектральной плотности Вина от планковской на границах диапазонов *NUV*, *MUV*, *FUV* и *EUUV*. Для указанных диапазонов также определены относительные отклонения излучательных способностей, светимостей и блесков. Проведена оценка эффективности приближения для некоторых звёзд. **Ключевые слова:** ультрафиолетовое излучение, спектральная плотность, кривая Планка, формула Вина, относительное отклонение, светимость.

The paper provides a quantitative assessment of the effectiveness of the Wien approximation for the thermal radiation of stars in the ultraviolet region of the spectrum. For a number of fixed temperatures, the relative deviations of the Wien spectral density from the Planck one at the edges of the *NUV*, *MUV*, *FUV* and *EUUV* ranges are calculated. For the same ranges, the relative deviations of emissivities, luminosities and fluxes are also determined. The efficiency of the approximation for some stars was assessed as well.

Keywords: ultraviolet radiation, spectral density, Planck curve, Wien formula, relative deviation, luminosity.

Введение. Вид непрерывных составляющих спектров электромагнитного излучения звёзд говорит о правомерности использования модели абсолютно-чёрного тела (АЧТ) для их описания [1], [2]. Как любая модель, АЧТ не является идеально точной, но она достаточно эффективна. Физическая привлекательность модели заключается в том, что единственным параметром звезды, определяющим характер излучения, является температура её поверхности T . Следовательно, законы, описывающие излучение АЧТ, можно использовать в качестве законов излучения звёзд. В этом случае функция спектральной плотности $\varepsilon(T, \lambda)$, параметризованная температурой T и длиной волны λ , часто называемая «кривой Планка», имеет вид [1], [2]

$$\varepsilon(T, \lambda) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{\frac{hc}{e^{\lambda kT}} - 1} \equiv \varepsilon_p(T, \lambda). \quad (1)$$

В (1) присутствуют физические константы: h – постоянная Планка, k – постоянная Больцмана, c – скорость света в вакууме. Численные значения этих констант общеизвестны.

В свою очередь, $\varepsilon(T, \lambda)$ имеет связь с интегральной мощностью излучения с единицы поверхности $\varepsilon(T)$, которую также часто называют излучательной способностью, вида

$$\varepsilon(T) = \int_0^{\infty} \varepsilon(T, \lambda) d\lambda = \sigma T^4. \quad (2)$$

Выражение (2) – это закон Стефана-Больцмана, где $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \text{К}^4}$ – постоянная Стефана-Больцмана. Если же проинтегрировать (2) в пределах от некоторого λ_1 до некоторого λ_2 , то получится мощность излучения с единицы поверхности в выбранном диапазоне

$$\varepsilon(T) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \varepsilon(T, \lambda) d\lambda. \quad (3)$$

В дальнейшем на $\varepsilon(T)$ будем навешивать индексы диапазона и типа спектральной плотности, например, $\varepsilon_p^{MUV}(T)$ – то есть, *MUV* – диапазон и «планковская» плотность.

Исследование функции (1) на экстремум при фиксированной температуре, требующее выполнения условия

$$\left[\frac{\partial \varepsilon(T, \lambda)}{\partial \lambda} \right]_T = 0$$

приводит к координате максимума

$$\lambda_{(max)} = \frac{b}{T}. \tag{4}$$

Выражение (3) – закон «смещения Вина», где $b = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$ – постоянная Вина.

Таким образом, приведенные здесь математические соотношения (1), (2), (4) и рассматриваются в качестве законов излучения АЧТ.

Приближение Вина. Выражение (1) для функции спектральной плотности $\varepsilon(T, \lambda)$ неудобно было интегрировать аналитическими методами. В настоящее же время используются численные методы, встроенные в компьютерные технологии, например [3]. Поэтому исторически сложилось так, что формула (1) была упрощена для случая «коротких» волн. Например, для середины ультрафиолетовой (далее $УФ$) области спектра с длиной волны $\lambda = 205 \text{ нм}$ при температуре $T = 6000 \text{ К}$ показатель экспоненты в (1)

$$\frac{hc}{\lambda kT} \cong 70.$$

Предположение о правомерности утверждения о большом значении показателя и для других «коротких» волн и температур, позволяет пренебречь единицей, и (1) преобразуется к виду

$$\varepsilon(T, \lambda) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \cdot e^{-\frac{hc}{\lambda kT}} \equiv \varepsilon_w(T, \lambda). \tag{5}$$

Полученную формулу (5) называют *формулой Вина*, которую и надо понимать, как приближение Вина для функции спектральной плотности (1) в «коротковолновой» области спектра.

Относительное отклонение спектральных плотностей в ультрафиолетовой области спектра. Специфика различных научных дисциплин часто предполагает наличие собственных единиц измерения, различных шкал, специфической терминологии и т. д. Это касается и деления спектра электромагнитного излучения на области, диапазоны и поддиапазоны. Согласно стандарту ISO-DIS-21348 [4], ультрафиолетовую область спектра делят на диапазоны так, как это представлено в Таблице 1, и мы будем следовать этому делению. Следует заметить, что ультрафиолетовая астрономия продолжает активно развиваться, особенно в технологическом отношении [5]. И большие надежды ученых в наше время связаны с новейшей информацией, получаемой со снимков, сделанных в диапазонах $УФ$ области спектра, космическим телескопом *Хаббл* [6].

Таблица 1 – Разделение инфракрасного излучения на диапазоны

Наименование	Аббревиатура	Длины волн (нм)
Экстремальный ультрафиолетовый диапазон	<i>EUV</i>	10–121
Дальний ультрафиолетовый диапазон	<i>FUV</i>	121–200
Средний ультрафиолетовый диапазон	<i>MUV</i>	200–300
Ближний ультрафиолетовый диапазон	<i>NUV</i>	300–400

Для оценки качества приближения можно использовать относительное отклонение спектральных плотностей $\delta\varepsilon(T, \lambda)$ вида

$$\delta\varepsilon(T, \lambda) = \frac{\varepsilon_p(T, \lambda) - \varepsilon_w(T, \lambda)}{\varepsilon_p(T, \lambda)}, \tag{6}$$

которое характеризует близость расположения приближенной «виновской» кривой к точной «планковской».

Ниже в таблице 2 приведены значения $\delta\varepsilon(T, \lambda)$ для ряда температур, совпадающих либо близких к границам спектральных классов, и для граничных длин волн диапазонов из таблицы 1. При расчётах на основе формул (6), (1) и (5) использовалась система компьютерной алгебры Wolfram Mathematica [7], которая была применена и при последующих вычислениях.

Таблица 2 – Относительное отклонение спектральных плотностей $\delta\varepsilon(T, \lambda)$ на границах диапазонов

$\delta\varepsilon(T, \lambda)$ \ $\lambda, \text{нм}$	10	121	200	300	400
$\delta\varepsilon(2000 \text{ K}, \lambda)$	0,0000	1,5123·10⁻²⁶	2,0320·10⁻¹⁶	3,8538·10⁻¹¹	1,5468·10⁻⁸
$\delta\varepsilon(5000 \text{ K}, \lambda)$	0,0000	4,6974·10⁻¹¹	5,6434·10⁻⁷	0,0001	0,0008
$\delta\varepsilon(10000 \text{ K}, \lambda)$	0,0000	6,8546·10⁻⁶	0,0008	0,0083	0,0274
$\delta\varepsilon(30000 \text{ K}, \lambda)$	1,4845·10⁻²¹	0,0190	0,0909	0,2022	0,3015
$\delta\varepsilon(60000 \text{ K}, \lambda)$	3,8530·10⁻¹¹	0,1378	0,3015	0,4496	0,5491

По данным таблицы 2 можно сделать заключение, что при температурах от 2000 K до 10000 K приближение Вина работает прекрасно во всех диапазонах ультрафиолетовой области, и даже на дальнем краю *NUV* $\delta\varepsilon(T, \lambda)$ имеет значение всего около 3 %. Также оно эффективно в *EUUV* диапазоне при температуре 30000 K и только вблизи его ближнего края при 60000 K. В таблице 2 все приемлемые значения $\delta\varepsilon(T, \lambda)$ меньше 5 % выделены жирным шрифтом.

Относительное отклонение излучательных способностей (светимостей, блесков). Теперь обратимся непосредственно к излучательной способности $\varepsilon(T)$ вида (3), которая связана со светимостью звезды L и наблюдаемым блеском E в рассматриваемом диапазоне, соотношениями

$$L = 4\pi R^2 \varepsilon(T), \quad E = \left(\frac{R}{r}\right)^2 \cdot \varepsilon(T), \quad (7)$$

где R – радиус звезды, а r – расстояние до звезды.

Данные её расчетов для случаев «планковской» (1) и «виновской» спектральных плотностей (5) во всех диапазонах *УФ* области приведены в таблице 3.

Теперь введем относительное отклонение излучательной способности $\delta\varepsilon(T)$ вида

$$\delta\varepsilon(T) = \frac{\varepsilon_p(T) - \varepsilon_w(T)}{\varepsilon_p(T)}, \quad (8)$$

которое носит обобщающий характер в силу взаимосвязей (7) и будет равно относительным отклонениям светимости и блеска, то есть

$$\delta\varepsilon(T) = \delta L(T) = \delta E(T).$$

Так как блеск является наблюдаемой характеристикой звёзд, отдадим ему приоритет.

Таблица 3 – Значения излучательных способностей $\varepsilon(T)$ в *УФ* диапазонах для различных температур

$\varepsilon(T), \text{Вт/м}^2$ \ T, K	2000	5000	10000	30000	60000
$\varepsilon_p^{NUV}(T)$	14,8293	1,9096·10 ⁶	1,1774·10 ⁸	2,5291·10 ⁹	7,6552·10 ⁹
$\varepsilon_w^{NUV}(T)$	14,8293	1,9089·10 ⁶	1,1580·10 ⁸	1,9074·10 ⁹	3,8742·10 ⁹
$\varepsilon_p^{MUV}(T)$	0,0843	4,4408·10 ⁵	1,1710·10 ⁸	6,9907·10 ⁹	2,6279·10 ¹⁰
$\varepsilon_w^{MUV}(T)$	0,0843	4,4407·10 ⁵	1,1665·10 ⁸	6,0356·10 ⁹	1,6721·10 ¹⁰
$\varepsilon_p^{FUV}(T)$	1,6926·10 ⁻⁶	1,1366·10 ³	3,6535·10 ⁷	1,5069·10 ¹⁰	9,0169·10 ¹⁰
$\varepsilon_w^{FUV}(T)$	1,6926·10 ⁻⁶	1,1366·10 ³	3,6524·10 ⁷	1,4366·10 ¹⁰	7,1922·10 ¹⁰
$\varepsilon_p^{EUUV}(T)$	4,6747·10 ⁻¹⁶	3,9219	1,3064·10 ⁶	1,8819·10 ¹⁰	6,0436·10 ¹¹
$\varepsilon_w^{EUUV}(T)$	4,6747·10 ⁻¹⁶	3,9219	1,3064·10 ⁶	1,8700·10 ¹⁰	5,8422·10 ¹¹

Результаты расчётов $\delta E(T)$ по данным таблицы 3, абсолютно правомерные для $\delta\varepsilon(T)$ и $\delta L(T)$, приведены в таблице 4.

Таблица 4 – Значения относительного отклонения блеска $\delta E(T)$

T, K \ $\delta E(T)$	$[\delta E(T)]^{NUV}$	$[\delta E(T)]^{MUV}$	$[\delta E(T)]^{FUV}$	$[\delta E(T)]^{EUUV}$
2000	7,1337·10⁻⁹	1,8069·10⁻¹¹	2,5021·10⁻¹⁶	0,0000
5000	3,6539·10⁻⁴	2,9671·10⁻⁵	2,5317·10⁻⁷	2,2017·10⁻¹¹

Окончание таблицы 4

10000	0,0165	0,0038	0,0003	3,0020·10⁻⁶
30000	0,2458	0,1366	0,0466	0,0063
60000	0,4939	0,3637	0,2024	0,0333

На основе данных таблицы 4 приходим к выводу, что при температурах от 2000 K до 10000 K приближение Вина абсолютно корректно во всех диапазонах ультрафиолетовой области спектра. Вполне разумно полагать, что достаточно качественную оценку даёт относительное отклонение на уровне 5 % и ниже, поэтому реальная верхняя граница температуры выше 10000 K и составляет 13850 K, что несложно проверить. Здесь, как и в таблице 2, все приемлемые значения $\delta E(T, \lambda)$ выделены жирным шрифтом. При температурах до 30000 K приближение Вина применимо в *FUV* и *EUUV* диапазонах. Также оно эффективно в *EUUV* диапазоне при температурах 60000 K.

Данные расчётов $\delta E(T)$ для ряда звёзд. Результаты расчётов относительных отклонений блесков $\delta E(T)$ приведены в таблице 5. В ней подтверждаются выводы предыдущего пункта на примере ряда реальных звёзд в широком диапазоне температур поверхности. Вполне очевидно, что эти результаты соответствуют общим тенденциям поведения $\delta E(T)$, следовательно, и поведения $\delta \epsilon(T)$ и $\delta L(T)$.

 Таблица 5 – Значения относительного отклонения блеска $\delta E(T)$ ряда звёзд

Звезда (<i>T</i>)	$\delta E(T)$	$[\delta E(T)]^{NUV}$	$[\delta E(T)]^{MUV}$	$[\delta E(T)]^{FUV}$	$[\delta E(T)]^{EUUV}$
<i>β Ориона C</i> (33000 K)		0,2789	0,1628	0,0603	0,0088
<i>β Южного Креста</i> (30000 K)		0,2458	0,1366	0,0466	0,0063
<i>Сириус B</i> (25200 K)		0,1889	0,0950	0,0276	0,0032
<i>Спика</i> (22000 K)		0,1488	0,0686	0,0174	0,0017
<i>Ахернар</i> (15000 K)		0,0625	0,0215	0,0035	0,0001
<i>Сириус A</i> (9500 K)		0,0134	2,9253·10⁻³	2,1400·10⁻⁴	1,6166·10⁻⁶
<i>Альтаир</i> (8700 K)		9,1974·10⁻³	1,8061·10⁻³	1,0758·10⁻⁴	5,1701·10⁻⁷
<i>τ Кита</i> (5300 K)		5,5664·10⁻⁴	5,0929·10⁻⁵	5,6790·10⁻⁷	8,4262·10⁻¹¹
<i>ϵ Эридана</i> (4830 K)		2,8152·10⁻⁴	2,1212·10⁻⁵	1,5315·10⁻⁷	9,5549·10⁻¹²
<i>Вольф 359</i> (3000 K)		2,8354·10⁻⁶	5,1799·10⁻⁸	1,8069·10⁻¹¹	0,0000

Заключение. Таким образом, в работе показано, что приближение Вина:

- корректно использовать во всей ультрафиолетовой области спектра при температурах поверхности звёзд ниже 13850 K;
- правомерно использовать в *EUUV* диапазоне для звёзд всех спектральных классов за исключением горячих звёзд класса *W*;
- неправомерно для использования либо неудовлетворительно работает в *NUV*, *MUV* и *FUV* диапазонах для всех звёзд спектральных классов *W*, *O* и частично *B*.

Литература

1. Кононович, Э. В. Общий курс астрономии / Э. В. Кононович, В. И. Мороз. – М. : URSS, 2022. – 544 с.
2. Carroll, B. W. An introduction to modern astrophysics / B. W. Carroll, D. A. Ostlie. – San Francisco : Pearson International Edition, 2007. – 1351 p.
3. Schmidt, W. Numerical Python in astronomy and astrophysics / W. Schmidt, M. Völschow. – Cham, Switzerland : Springer, 2021. – 260 p.
4. Definitions of solar irradiance spectral categories [Electronic resource]. – Mode of access : https://www.acttr.com/images/pdf/ISO_DIS_21348.pdf/. – Date of access : 13.02.2024.
5. The extreme-ultraviolet explorer (EUVE) [Electronic resource]. – Mode of access : <https://nssdc.gsfc.nasa.gov/nmc/spacecraft/display.action?id=1992-031A/>. – Date of access : 10.02.2024.
6. The telescope that captured our imagination [Electronic resource]. – Mode of access : <https://science.nasa.gov/mission/hubble/observatory/>. – Date of access : 02.02.2024.
7. Wolfram, S. Metamathematics : foundations & physicalization / S. Wolfram. – New York, 2022. – 190 p.