### УДК 539.4

### EDN: YIZSRJ

# Расчет сил, действующих на непараллельных границах раздела аустенит / мартенсит в ферромагнитном монокристалле с памятью формы, находящемся в жесткой заделке

## В.О. ОСТРИКОВ<sup>1</sup>, О.М. ОСТРИКОВ<sup>2</sup>

Решена статическая задача о расчете сил, действующих вдоль непараллельных границ раздела аустенит / мартенсит единичной мартенситной прослойки, в механически нагруженном ферромагнитном призматическом монокристалле с памятью формы, находящемся в жесткой заделке. Ключевые слова: мартенситная прослойка, ферромагнитный монокристалл с памятью формы, межфазная граница раздела.

The static problem of calculating the forces acting along non-parallel austenite / martensite interfaces of a single martensite layer in a mechanically loaded ferromagnetic prismatic shape memory single crystal located in a rigid embedding is solved.

Keywords: martensitic layer, ferromagnetic monocrystal with shape memory, interface.

**Введение.** Уникальные физико-механические свойства ферромагнитных сплавов Гейслера с эффектом запоминания формы хорошо изучены с помощью экспериментальных методов исследования [1]–[6]. Растет актуальность разработки теоретических методов для прогнозирования поведения данных материалов при заданных нагрузках. Такие методы и полученные с их помощью результаты востребованы в технологиях изготовления технических систем, рабочим элементом в которых являются ферромагнитные материалы с эффектом памяти формы [7], [8]. Как было показано в [9]–[12], расчеты для инженерных приложений и развития теории бездиффузионных фазовых превращений удобно вести на основе методов механики деформируемого твердого тела [13].

Целью данной работы стало решение статической задачи о расчете сил, действующих в плоскостях границ раздела аустенит / мартенсит мартенситной прослойки в случае непараллельных границ раздела в механически нагруженном призматическом ферромагнитном монокристалле состава Гейслера, обладающим свойством памяти формы и находящемся в жесткой заделке.

**1. Постановка задачи.** На рисунке 1 показан фрагмент монокристалла Ni<sub>2</sub>MnGa с непараллельными границами раздела аустенит / мартенсит (фотография любезно предоставлена Созиновым А.Л.). При соприкосновении границ раздела, как это показано на рисунке 1, они теряют свою подвижность в направлении навстречу друг другу. При этом в противоположном направлении подвижность границ сохраняется. В сечении плоскостью, параллельной плоскости рисунка 1, мартенситная прослойка имеет форму треугольника. При этом границы раздела контактируют в одной из вершин треугольника (верхняя вершина на рисунке 1).



Рисунок 1 – Фрагмент монокристалла Ni<sub>2</sub>MnGa с непараллельными соприкасающимися границами раздела аустенит / мартенсит

На рисунке 2 схематически представлен призматический монокристаллический образец с треугольной в сечении мартенситной прослойкой. Образец механически нагружен и находится в жесткой заделке.

Случай не контактирующих друг с другом границ раздела схематически представлен на рисунке 3. При этом мартенситная прослойка в рассматриваемом сечении имеет вид трапеции.







Рисунок 3 – Схематическое изображение находящегося в жесткой заделке механически нагруженного призматического монокристаллического образца с мартенситной прослойкой в случае несоприкасающихся непараллельных межфазных границ

Заданными (известными) параметрами будем считать следующие (см. рисунки 2 и 3):  $\vec{F}$  – приложенная к свободному торцу призматического образца нагрузка;  $\theta$  – угол между направлением действия силы  $\vec{F}$  и осью образца;  $\psi$  – угол между плоскостью границы раздела и аустенитной поверхностью монокристалла;  $\varphi$  – угол между плоскостью границы раздела и мартенситной поверхностью монокристалла;  $l_{a1}$  и  $l_{a2}$  – параметры аустенитных частей монокристалла;  $l_m$  – длина основания треугольника или нижнего основания трапеции мартенситной части монокристалла;  $l_{m1}$  – длина верхнего основания трапеции мартенситной части монокристалла (рисунок 3).

Кроме моментов сил, к числу искомых отнесем реакцию  $\vec{R}_A$  и действующие в плоскостях границ раздела аустенит / мартенсит силы  $F_{ext1}$  и  $F_{ext2}$ .

### 2. Решение задачи и обсуждение результатов.

1. Для второго аустенитного объема (рисунки 2 и 3) в состоянии равновесия будем иметь:

$$\sum_{i} F_{iX'} = R_C \cos\gamma - F \cos\theta = 0, \tag{1}$$

$$\sum_{i} F_{iY'} = R_C \sin\gamma - F \sin\theta = 0.$$
<sup>(2)</sup>

Здесь  $R_c \cos\gamma = X'_c$ ,  $R_c \sin\gamma = Y'_c$ ,  $\gamma$  и  $R_c$  – искомый угол и реакция (рисунки 2 и 3). Условие равновесия моментов сил для второго аустенитного объема имеет вид:

$$\sum_{i} M_{C}(F_{i}) = Fl_{a2}\sin\theta + M_{C} = 0.$$

Отсюда

$$M_c = -Fl_{a2}\sin\theta. \tag{3}$$

Следует отметить, что в (3) с правой стороны равенства все параметры известны. А из (1) и (2) следует:

tgγ = tgθ, т. е. 
$$\gamma = \theta$$
 и  $R_c = F$ . (4)

2. Для мартенситного объема получим (рисунки 4 и 5):

$$F_{iX''} = R_C \cos\gamma_1 + R_B \cos\beta_1 = 0, \qquad (5)$$

$$\sum_{i} F_{iY''} = R_C \sin\gamma_1 + R_B \sin\beta_1 = 0.$$
(6)

Для моментов сил в случае соприкасающихся границ раздела (рисунок 4) будем иметь

$$\sum_{i} M_{B}(F_{i}) = R_{C} \frac{l_{m}}{2} \sin\gamma_{1} - M_{B} + M_{C} = 0,$$
(7)

а для несоприкасающихся (рисунок 5) –

$$\sum_{i} M_{B}(F_{i}) = R_{C} \frac{l_{m} + l_{m1}}{2} \sin\gamma_{1} - M_{B} + M_{C} = 0.$$
(8)

Тогда из (7), с учетом (3), получаем

$$M_{B} = R_{C} \frac{l_{m}}{2} \sin\gamma_{1} - F l_{a2} \sin\theta = F \left(\frac{l_{m}}{2} \sin\gamma_{1} - l_{a2} \sin\theta\right).$$
(9)

Из (8), с учетом (3), имеем

$$M_{B} = R_{C} \frac{l_{m} + l_{m1}}{2} \sin\gamma_{1} - F l_{a2} \sin\theta = F \left( \frac{l_{m} + l_{m1}}{2} \sin\gamma_{1} - l_{a2} \sin\theta \right).$$
(10)

Из рисунков 2, 3, 4, 5, с учетом (4), не трудно показать, что

$$\gamma_1 = \gamma - (\phi - \psi) = \theta - (\phi - \psi). \tag{11}$$

Таким образом, угол  $\gamma_1$  и момент сил  $M_B$  выражаются через известные параметры, т. е.  $\gamma_1$  и  $M_B$  найдены.

**3.** Для первого аустенитного объема в соответствии с рисунками 2 и 3 справедлива система уравнений:

$$\sum_{i} F_{iX} = X_A + X_B = 0, \tag{12}$$

$$\sum_{i} F_{iY} = Y_A + Y_B = 0, (13)$$

$$\sum_{i} M_{A}(F_{i}) = R_{B}l_{a1}\sin\beta + M_{A} - M_{B} + M_{C} = 0.$$
(14)

Из (12) и (13) получаем  $R_A \cos \alpha = -R_B \cos \beta$ ,  $R_A \sin \alpha = -R_B \sin \beta$ . И далее

β

tga = tgβ, т. е. 
$$\alpha = \beta$$
, и  $R_A = -R_B$ . (15)

Учитывая это, из геометрических построений, представленных на рисунках 2, 3, 4, 5, получим

$$_{1} = \beta - (\phi - \psi) = \alpha - (\phi - \psi).$$
 (16)



Рисунок 4 – Схематическое изображение сил, действующих на границах раздела аустенит / мартенсит в случае соприкасающихся непараллельных межфазных границ



Рисунок 5 – Схематическое изображение сил, действующих на границах раздела аустенит / мартенсит в случае несоприкасающихся непараллельных межфазных границ

Из (5) и (6), с учетом (4), (11) и (15), имеем

$$R_{A} = F \frac{\cos(\theta - (\phi - \psi))}{\cos(\alpha - (\phi - \psi))},$$

$$R_{A} = F \frac{\sin(\theta - (\phi - \psi))}{\sin(\alpha - (\phi - \psi))}$$

Отсюда следует, что

 $\alpha = \theta$  и  $R_A = F$ .

$$M_A = M_B - M_C - R_B l_{a1} \sin\beta.$$
<sup>(18)</sup>

(17)

Подставив в (18) соотношения (3) и (9) или (10), будем иметь

$$M_{A} = R_{C} \frac{l_{m}}{2} \sin\gamma_{1} - R_{B} l_{a1} \sin\beta = F\left(\frac{l_{m}}{2} \sin\gamma_{1} + l_{a1} \sin\beta\right)$$

для ситуации, представленной на рисунке 2, и

$$M_{A} = R_{C} \frac{l_{m} + l_{m1}}{2} \sin\gamma_{1} - R_{B} l_{a1} \sin\beta = F\left(\frac{l_{m} + l_{m1}}{2} \sin\gamma_{1} + l_{a1} \sin\beta\right),$$

для ситуации, представленной на рисунке 3.

**4.** Для нахождения модулей сил  $F_{ext1}$  и  $F_{ext2}$ , действующих в плоскостях границ раздела аустенит/мартенсит мартенситной прослойки, воспользуемся соотношениями, полученными из геометрических построений, представленных на рисунках 4 и 5:

$$F_{ext1} = R_B \cos\delta, \tag{19}$$

$$F_{ext2} = R_C \cos \chi. \tag{20}$$

Здесь  $\delta = \phi - \beta_1$ , а с учетом (16) и (17) не трудно показать, что  $\delta = \phi - \theta + (\phi - \psi)$ .

Из рисунков 4 и 5 видно, что  $\chi = \pi - \phi - \gamma_1$ . Учитывая (11), получим

$$\chi = \pi - \Theta - \psi$$

Ранее было показано (соотношение (4)), что  $R_c = F$ . А из (15) и (17) следует, что  $R_B = -F$ . Тогда (19) и (20) перепишем в виде:

$$F_{ext1} = -F\cos(2\phi - \theta - \psi), \qquad (21)$$

$$F_{ext2} = -F\cos(\theta + \psi). \tag{22}$$

При получении соотношения (22) были выполнены следующие преобразования [14]:

$$\cos \chi = \cos (\pi - \theta - \psi) = -\cos (-\theta - \psi) = -\cos (\theta + \psi)$$

Как видно из (21) и (22) силы  $F_{ext1}$  и  $F_{ext2}$  направлены в противоположную сторону направления показанного на рисунках 4 и 5.

Заключение. Таким образом, решена статическая задача для механически нагруженного ферромагнитного призматического монокристалла с памятью формы, находящегося в жесткой заделке, с мартенситной прослойкой, имеющей непараллельные границы. В ходе решения задачи были найдены: моменты сил, действующих на аустенитный и мартенситный объемы; реакция заделки  $\vec{R}_A$ ; силы  $F_{ext1}$  и  $F_{ext2}$ , действующие в плоскостях границ раздела аустенит / мартенсит. Адекватность разработанной расчетной схемы и достоверность полученных на ее основе результатов базируется на применении классических методов расчетов, представленных в известной учебной литературе [13], [14].

Авторы благодарят профессора А.Л. Созинова за предоставленную фотографию (рисунок 1) и обсуждение отдельных вопросов статьи.

#### Литература

1. 6% magnetic-field-induced strain by twin-boundary motion in ferromagnetic Ni-Mn-Ga / S. J. Murrey, M. Marioni, S. M. Allen, R. C. O'Handley // Appl. Phys. Lett. – 2000. – V. 77. – P. 886–888.

2. Saren, A. Dynamic twinning stress and viscous-like damping of twin boundary motion in magnetic shape memory alloy Ni-Mn-Ga / A. Saren, K. Ullakko // Scripta Materialia. – 2017. – V. 139. – P. 126–129.

3. Energy conversion in Ni-Mn-Ga with asymmetrical bias magnetic field / M. Veligatla, P. Lindquist, C. J. Garcia-Cervera, P. Müllner // Journal of Magnetism and Magnetic Materials. -2022. -V. 551. -P. 169–183.

4. Twin boundary structure and mobility / D. Shilo, E. Faran, B. Karki, P. Müllner // Acta Materialia. – 2021. – V. 220. – P. 117–316.

5. Остриков, О. М. Исследование пластической деформации поверхности монокристалла Ni<sub>2</sub>MnGa методом индентирования / О. М. Остриков, А. Л. Созинов, А. В. Сорока // Инженернофизический журнал. – 2012. – Т. 85, № 5. – С. 1132–1141.

6. Остриков, О. М. Разрушение и сопутствующие ему эффекты в ферромагнитном монокристалле Ni<sub>2</sub>MnGa с эффектом памяти формы / О. М. Остриков, Е. В. Шматок // Инженерно-физический журнал. – 2015. – Т. 88, № 1. – С. 272–279.

7. Linearly enhanced circular magnetic field actuator : pat. US 11094440B2 / P. Müllner, G. Johnston. – Publ. date 17.08.2021.

8. Ullakko, K. Magnetically controlled shape memory alloys : A new class of actuator materials / K. Ullakko // J. Mater. Eng. Perform. – 1996. – V. 5, № 3. – P. 405–409.

9. Остриков, В. О. Статика и динамика границы раздела аустенит / мартенсит в нагруженном призматическом монокристалле с эффектом памяти формы, находящемся в жесткой заделке / В. О. Остриков, О. М. Остриков // Машиностроение : республ. межведомственный сб. науч. трудов / БНТУ ; гл. ред. В. К. Шелег. – Минск : БНТУ, 2022. – Вып. 33. – С. 139–147.

10. Василевич, Ю. В. Статика и динамика границы раздела аустенит / мартенсит в призматическом ферромагнитном монокристалле с эффектом памяти формы, находящемся в жесткой заделке и магнитном поле / Ю. В. Василевич, В. О. Остриков, О. М. Остриков // Машиностроение : республ. межведомственный сб. науч. трудов / БНТУ ; редкол.: В. К. Шелег (гл. ред.) [и др.]. – Минск : БНТУ, 2023. – Вып. 34. – С. 131–139.

11. Василевич, Ю. В. Статика и динамика границ раздела аустенит / мартенсит мартенситной прослойки в нагруженном призматическом ферромагнитном монокристалле с эффектом памяти формы, находящемся в жесткой заделке / Ю. В. Василевич, В. О. Остриков, О. М. Остриков // Машиностроение : республ. межведомственный сб. науч. трудов / БНТУ ; редкол.: В. К. Шелег (гл. ред.) [и др.]. – Минск : БНТУ, 2023. – Вып. 34. – С. 139–146.

12. Остриков, В. О. Статическая и динамическая задача для единичной мартенситной прослойки в ферромагнитном монокристалле с эффектом памяти формы, находящемся в магнитном поле в жесткой заделке / В. О. Остриков, О. М. Остриков // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 1 (54). – С. 43–46.

13. Тарг, С. М. Краткий курс теоретической механики / С. М. Тарг. – М. : Высш. шк., 2010. – 416 с.

14. Воднев, В. Т. Основные математические формулы : Справочник / В. Т. Воднев, А. Ф. Наумович, Н. Ф. Наумович. – Минск : Выш. шк., 1988. – 269 с.

<sup>1</sup>Гомельский государственный технический университет имени П.О. Сухого

<sup>2</sup>Белорусский государственный университет транспорта

Поступила в редакцию 04.03.2024