УДК 517.538.5+517.538.6

О ДЕТЕРМИНАНТНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ МНОГОЧЛЕНОВ ЭРМИТА–ПАДЕ ВТОРОГО РОДА

А.П. Старовойтов, Н.В. Рябченко, Н.А. Старовойтова
Учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Представленная статья посвящена изучению многочленов Эрмита–Паде 2-го рода для произвольной системы степенных рядов вида $f_j(z)=\sum_{i=0}^{\infty} f_i^j z^i,\ j=1,2...,k$.

Цель работы – нахождение необходимых и достаточных условий на индекс $(n,\vec{m})\in\mathbb{Z}_+^{k+1}$ *и систему f, при которых решение задачи Эрмита–Паде единственно.*

Материал и методы. *Материалом исследования являются многочлены Эрмита–Паде второго рода. При этом используются методы теории алгебраических уравнений, теории матриц и теории определителей.*

Результаты и их обсуждение. *Введены новые понятия: вполне нормальный индекс и вполне совершенная система функций. Сформулирован критерий единственности решения задачи Эрмита–Паде для системы f. Получены явные детерминантные представления многочленов Эрмита–Паде 2-го рода.*

Заключение. *С помощью введенных в данной работе новых понятий доказан критерий единственности решения задачи Эрмита–Паде, получены явные детерминантные представления многочленов Эрмита–Паде 2-го рода для произвольной системы степенных рядов. Результаты проведенного авторами исследования дополняют хорошо известные результаты в теории аппроксимаций Эрмита–Паде.*

Ключевые слова: *задача Эрмита–Паде, многочлены Эрмита–Паде, нормальный индекс, совершенная система функций, определители Адамара.*

ABOUT THE DETERMINANT REPRESENTATIONS OF TYPE II HERMITE–PADE POLINOMIALS

A.P. Starovoitov, N.V. Ryabchenko, N.A. Starovoitova
Educational Establishment «Francisk Skorina Gomel State University»

The presented article refers to the study of type II Hermite–Pade polynomials for an arbitrary system of power series of the from $f_j(z)=\sum_{i=0}^{\infty} f_i^j z^i,\ j=1,2...,k$.

The purpose of the work is to find the necessary and sufficient conditions for the index $(n,\vec{m})\in\mathbb{Z}_+^{k+1}$ *and the system* f*, under which the solution of the Hermite–Pade problem is unique.*

Material and methods. *The research object is type II Hermite–Pade polynomials. The methods of the theory of algebraic equations, the theory of matrices and the theory of determinants are used in the research.*

Findings and their discussion. *New concepts are introduced. They are a quite normal index and a quite perfect system of functions. A criterion for the uniqueness of the solution of the Hermite–Pade problem was formulated for the system f. Explicit determinant representations of type II Hermite–Padé polynomials have been obtained.*

Conclusion. *New concepts are introduced in the work. They are a quite normal index and a quite perfect system of functions. Using these concepts, a uniqueness criterion was proved, explicit determinant representations of type II Hermite–Padé polynomials for an arbitrary system of power series were obtained. The obtained findings complement and generalize the well-known results in the theory of Hermite–Padé approximations.*

Key words: *Hermite–Pade problem, Hermite–Pade polynomials, normal index, perfect system of functions, Adamar identifiers.*

1. Введение. Основные определения. Пусть $f=(f_1,...,f_k)$ – набор формальных степенных рядов

$$f_j(z)=\sum_{i=0}^{\infty} f_i^j z^i,\ j=1,2...,k \tag{1.1}$$

с комплексными коэффициентами. Множество k -мерных мультииндексов (индексов), т.е. упорядоченных k целых неотрицательных чисел, обозначим $\mathbb{Z}_+^k$. Порядок мультииндекса $\vec{m}=(m_1,...,m_k)\in\mathbb{Z}_+^k$ – это сумма

$m = m_1 + ... + m_k$. Зафиксируем индекс $n \in \mathbb{Z}_+^1$ и мультииндекс $\vec{m} = (m_1, \ldots, m_k)$ и рассмотрим следующую хорошо известную задачу Эрмита–Паде (см. [1; гл. 4, § 3], [2–4]):

Задача ЭП. *Найти тождественно не равный нулю многочлен* $Q_m(z) = Q_{n,\vec{m}}(z; f)$, $\deg Q_m \leqslant m$ *и такие многочлены* $P_{n_j}^j(z) = P_{n,\vec{m}}^j(z; f)$, $\deg P_{n_j}^j \leqslant n_j$, $n_j = n + m - m_j$, *чтобы при* $j = 1,...,k$

$$R_{n,\vec{m}}^j(z) = R_{n,\vec{m}}^j(z; f) := Q_m(z) f_j(z) - P_{n_j}^j(z) = A_j z^{n+m+1} + \ldots \tag{1.2}$$

Если k = 1, то f состоит из одной функции $f(z) := f_1(z)$. В этом случае решение поставленной задачи было получено Паде, который нашел явный вид многочленов $Q_m(z)$, $P_n(z) := P_{n,m}^1(z; f)$ (их называют многочленами Паде). Например, если положить $f_i = f_i^1$, $i = 0,1,...$, то [2, гл. 4, § 1.1, теорема 1.1.1]

$$Q_m(z) = \begin{vmatrix} f_{n-m+1} & f_{n-m+2} & \cdots & f_n & f_{n+1} \\ f_{n-m+2} & f_{n-m+3} & \cdots & f_{n+1} & f_{n+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_n & f_{n+1} & \cdots & f_{n+m-1} & f_{n+m} \\ z^m & z^{m-1} & \cdots & z & 1 \end{vmatrix}. \tag{1.3}$$

Здесь и далее при $i < 0$ считаем, что $f_i^j = 0$. Когда f состоит из набора экспонент $\left\{e^{\lambda_j z}\right\}_{j=1}^k$, где λ_j – различные комплексные числа, решение поставленной задачи в явном виде найдено Эрмитом в его известной работе [5], посвященной доказательству трансцендентности числа e.

В общем случае решение задачи Эрмита–Паде существует [1], а искомые многочлены Q_m, $P_{n_j}^j$ находятся с точностью до мультипликативного множителя: если пара (Q_m, P), где $P = (P_{n_1}^1, \ldots, P_{n_k}^k)$, удовлетворяет необходимым условиям, то для любого отличного от нуля комплексного числа λ новая пара $(\lambda Q_m, \lambda P)$ также удовлетворяет необходимым условиям. Эта неединственность может быть и более существенной.

Пример 1.1. *Пусть* $k = 1$, $n = 2$, $m = 2$*, а*

$$f(z) = \frac{1}{2-4z} = \frac{1}{2} + z + 2z^2 + 4z^3 + 8z^4 + \ldots \cdot$$

Тогда любое решение задачи можно представить в виде $(\lambda Q_2, \lambda P_2)$, где

$$Q_2(z) = a + bz - (4a + 2b)z^2, \; P_2(z) = \frac{1}{2} + \left(a + \frac{1}{2}b\right)z,$$

а a и b – произвольные действительные числа.

Принято говорить [1], что задача ЭП имеет единственное решение, если все решения задачи можно записать в виде $(\lambda Q, \lambda P)$, где $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$, а (Q_m, P) – некоторое одно фиксированное решение.

Определение 1.1. *Если пара* (Q_m, P)*, где* $P = (P_{n_1}^1, \ldots, P_{n_k}^k)$ *– решение задачи Эрмита–Паде с индексом* n *и мультииндексом* $\vec{m} = (m_1, \ldots, m_k) \in \mathbb{Z}_+^k$*, то многочлены* Q_m, $P_{n_1}^1, \ldots, P_{n_k}^k$ *называют многочленами Эрмита–Паде 2-го рода для набора (системы)* f *формальных степенных рядов (1.1)*.

Центральными понятиями в теории таких многочленов являются понятия нормального индекса и совершенной системы [1; гл. 4, § 1].

Определение 1.2. *Индекс* $(n, \vec{m}) = (n, m_1, \ldots, m_k) \in \mathbb{Z}_+^{k+1}$ *называется нормальным для системы* f*, если для любого решения* (Q_m, P) *задачи ЭП с индексом* n *и мультииндексом* $\vec{m}$

$$\deg Q_m = m, \deg P^j_{n_j} = n_j,\ j = 1,...,k\,.$$

При $k=1$ критерий нормальности индекса (n,m) выражается условием (см. [1–4])

$$H_{n,m} \cdot H_{n,m+1} \neq 0\,, \tag{1.4}$$

где определители Адамара $H_{n,m}$ задаются равенствами

$$H_{n,m} = \begin{vmatrix} f_{n-m+1} & f_{n-m+2} & \cdots & f_n \\ f_{n-m+2} & f_{n-m+3} & \cdots & f_{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_n & f_{n+1} & \cdots & f_{n+m-1} \end{vmatrix}.$$

Хорошо известно [1], что если индекс $(n,\vec{m})$ является нормальным, то задача ЭП имеет единственное решение. В этом случае однозначно определяется вектор

$$\pi_{n,\vec{m}} = \left(\pi^1,...,\pi^k\right), \quad \pi^j = \frac{P^j_{n_j}}{Q_m},$$

компоненты которого π^j называются аппроксимациями Эрмита–Паде 2-го рода (совместными аппроксимациями Паде) для системы f. Следующий пример показывает, что уже при $k=1$ нормальность индекса (n,m) не является необходимым условием единственности решения поставленной задачи.

Пример 1.2. *Пусть* $k=1$, $n=2$, $m=2$, *а*

$$f(z) = \frac{1}{2-z} + \frac{1}{4}z = \frac{1}{z} + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{8} + \frac{z^3}{16} + \frac{z^4}{32} + \ldots$$

Тогда любое решение задачи ЭП можно записать в виде $(\lambda Q_2, \lambda P_2)$, где $\lambda \in \mathbb{C}$, а

$$Q_2(z) = 2-z,\ P_2(z) = 1 + \frac{z}{2} - \frac{z^2}{4},$$

в то время как индекс $(2,2)$ не является нормальным, так как $\deg Q_2 = 1$.

Наша ближайшая цель – нахождение необходимых и достаточных условий на индекс $(n,\vec{m}) \in \mathbb{Z}^{k+1}_+$ и систему *f*, при которых решение задачи ЭП единственно.

2. Критерий единственности. Материал исследования – многочлены Эрмита–Паде второго рода. Компоненты вектора $f = \{f_1,..., f_k\}$ являются, вообще говоря, формальными степенными рядами. Уже по этой причине поставленная задача чисто алгебраическая и, следовательно, имеет алгебраическое решение. В дальнейшем, не ограничивая общности, будем считать, что все степенные ряды (1.1) имеют ненулевой радиус сходимости.

Введем необходимые обозначения. Для каждого $j=1,...,k$ и фиксированных индекса n и мультииндекса $\vec{m} = (m_1,\ldots,m_k)$, в предположении, что $m_j \neq 0$, зададим матрицы-строки порядка $1\times(m+1)$

$$F^j_i = \begin{pmatrix} f^j_{n-m_j+i} & f^j_{n-m_j+i+1} & \ldots & f^j_{n_j+i} \end{pmatrix}, \quad i = 1,2,\ldots;$$

функциональные матрицы-строки порядка $1\times(m+1)$

$$E(z) = \begin{pmatrix} z^m & z^{m-1} & \ldots & z & 1 \end{pmatrix};$$

$$E_{m_j}(z) = \left(\sum_{i=0}^{n-m_j} f_i^{\,j} z^{m+i} \quad \sum_{i=0}^{n-m_j+1} f_i^{\,j} z^{m+i-1} \quad \ldots \quad \sum_{i=0}^{n_j} f_i^{\,j} z^{i} \right);$$

матрицу порядка $m_j \times (m+1)$

$$F^{\,j} = \left[F_1^{\,j} \quad F_2^{\,j} \quad \ldots \quad F_{m_j}^{\,j} \right]^T = \begin{bmatrix} F_1^{\,j} \\ \vdots \\ F_{m_j}^{\,j} \end{bmatrix}, \tag{2.1}$$

матрицу порядка $m \times (m+1)$

$$F_{n,\vec{m}} = \left[F^1 \quad F^2 \quad \ldots \quad F^k \right]^T \tag{2.2}$$

и определители $(m+1)$-го порядка

$$d^{\,j}_{n,\vec{m},i} = det\left[F^1 \quad F^2 \quad \ldots \quad F^k \quad F^{\,j}_{m_j+i} \right]^T .$$

Определение 2.1. *Индекс $(n,\vec{m})$ будем называть вполне нормальным для f, если ранг матрицы $F_{n,\vec{m}}$ равен m.*

Очевидно, что любой нормальный индекс $(n,\vec{m})$ является также и вполне нормальным для f. Пример 1.2 показывает, что обратное утверждение неверно.

Сформулируем основную теорему.

Теорема 2.1. *Для того чтобы для фиксированного индекса $(n,\vec{m})$ задача Эрмита–Паде имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы индекс $(n,\vec{m})$ был вполне нормальным для f, т.е. $rang\, F_{n,\vec{m}} = m$.*

В случае, если $rang\, F_{n,\vec{m}} = m$, при определенном выборе мультипликативного множителя для решений задачи (Q_m, P) справедливы следующие детерминантные представления:

$$Q_m(z) = det\left[F^1 \quad F^2 \quad \ldots \quad F^k \quad E(z) \right]^T , \tag{2.3}$$

$$P^{\,j}_{n_j}(z) = det\left[F^1 \quad F^2 \quad \ldots \quad F^k \quad E_{m_j}(z) \right]^T , \tag{2.4}$$

$$R^{\,j}_{n,\vec{m}}(z) = \sum_{i=1}^{\infty} d^{\,j}_{n,\vec{m},i} z^{n+m+i} . \tag{2.5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $Q_m(z) = b_0 + b_1 z + \ldots + b_m z^m$. Обозначим через $(g)_k$ коэффициент при z^k степенного ряда $g(z)$. Рассмотрим систему m линейных однородных уравнений относительно $m+1$ неизвестных коэффициентов $b_0, b_1, \ldots, b_m$:

$$\left(Q_m f_j \right)_p = 0\,,\; p = n_j+1,\; n_j+2,\; \ldots,\; n_j+m_j;\; j = 1,2,\ldots,k. \tag{2.6}$$

В матричном виде система (2.6) имеет вид:

$$F_{n,\vec{m}} \times b^T = \theta^T , \tag{2.7}$$

где b – матрица-строка $b = (b_0, b_1, \ldots, b_m)$, а θ – матрица-строка порядка $1 \times (m+1)$, все элементы которой нулевые. Поскольку система (2.7) является однородной и в ней число неизвестных на единицу больше числа уравнений, то из теоремы Кронекера–Капелли следует, что у системы (2.7) имеется ненулевое решение. Более того, множество всех линейно независимых решений системы (2.7) состоит из одного фундаментального решения тогда и только тогда, когда $rang F_{n,\vec{m}} = m$. В этом случае все остальные ненулевые решения получаются домножением этого фундаментального решения на число $\lambda \neq 0$, тем самым первая часть теоремы доказана.

Докажем теперь равенства (2.3). Так как ранг матрицы $F_{n,\vec{m}}$ равен m, то при некотором $p \in \{1, \ldots, m+1\}$ определитель, полученный в результате вычеркивания p-го столбца в матрице $F_{n,\vec{m}}$, отличен от нуля. Предположим, что $p = m+1$. Тогда в развернутом виде систему (2.7) можно переписать в виде:

$$\begin{pmatrix} f^1_{n-m_1+1} & f^1_{n-m_1+2} & \cdots & f^1_{n_1} \\ f^1_{n-m_1+2} & f^1_{n-m_1+3} & \cdots & f^1_{n_1+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f^1_n & f^1_{n+1} & \cdots & f^1_{n+m-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f^k_{n-m_k+1} & f^k_{n-m_k+2} & \cdots & f^k_{n_k} \\ f^k_{n-m_k+2} & f^k_{n-m_k+3} & \cdots & f^k_{n_k+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f^k_n & f^k_{n+1} & \cdots & f^k_{n+m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_m \\ b_{m-1} \\ \cdot \\ b_{n-m_1+1} \\ \cdot \\ b_{m_k} \\ b_{m_k-1} \\ \cdot \\ b_1 \end{pmatrix} = -b_0 \begin{pmatrix} f^1_{n_1+1} \\ f^1_{n_1+2} \\ \cdot \\ f^1_{n+m} \\ \cdot \\ f^k_{n_k+1} \\ f^k_{n_k+2} \\ \cdot \\ f^k_{n+m} \end{pmatrix}. \tag{2.8}$$

Обозначим главный определитель системы (2.8) через $H_{n,\vec{m}}$. По предположению $H_{n,\vec{m}}$ не равен нулю. Если бы $b_0 = 0$, то система (2.8) имела бы только нулевое решение. Тогда и система (2.7) имела бы только нулевое решение. Поэтому $b_0 \neq 0$. Решаем систему (2.8) по правилу Крамера. Пренебрегая числовым множителем, результат можно записать в виде:

$$Q_m(z) = \begin{vmatrix} f^1_{n-m_1+1} & f^1_{n-m_1+2} & \cdots & f^1_{n_1+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f^1_n & f^1_{n+1} & \cdots & f^1_{n+m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f^k_{n-m_k+1} & f^k_{n-m_k+2} & \cdots & f^k_{n_k+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f^k_n & f^k_{n+1} & \cdots & f^k_{n+m} \\ z^m & z^{m-1} & \cdots & 1 \end{vmatrix} = det\begin{bmatrix} F^1 & \ldots & F^k & E(z) \end{bmatrix}^T .$$

Равенство (2.3) доказано.

Многочлены $P^j_{n_j}$ зададим равенствами:

$$P^j_{n_j}(z) = \sum_{p=0}^{n_j} (Q_m\, f_j)_p\, z^p,\ j = 1, 2, \ldots, k .$$

Для отыскания явного вида $P^j_{n_j}$ рассмотрим

$$Q_m(z)\cdot\sum_{i=0}^{\infty} f_i^j z^i = \begin{vmatrix} f_{n-m_1+1}^1 & f_{n-m_1+2}^1 & \dots & f_{n_1+1}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_n^1 & f_{n+1}^1 & \dots & f_{n+m}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n-m_k+1}^k & f_{n-m_k+2}^k & \dots & f_{n_k+1}^k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_n^k & f_{n+1}^k & \dots & f_{n+m}^k \\ \sum_{i=0}^{\infty} f_i^j z^{m+i} & \sum_{i=0}^{\infty} f_i^j z^{m+i-1} & \dots & \sum_{i=0}^{\infty} f_i^j z^i \end{vmatrix}. \tag{2.9}$$

При $m_j \neq 0$ в определителе (2.9) выделим блок F^j (матрицу порядка $m_j \times (m+1)$). Вычтем из последней строки определителя первую строку блока F^j, умноженную на z^{n_j+1}, вторую строку блока F^j, умноженную на z^{n_j+2}, и так далее вплоть до последней строки блока F^j, умноженной на z^{n+m}. В результате получим определитель, у которого ряды в последней строке имеют лакуны длиной m_j. Сохраняя начальные строки этих рядов, придем к определителю

$$P_{n_j}^j(z) = det\begin{bmatrix} F^1 & F^2 & \dots & F^k & E_{m_j(z)} \end{bmatrix}^T. \tag{2.10}$$

Он и будет искомым. Действительно, $P_{n_j}^j$ – многочлен, и $\deg P_{n_j}^j \leqslant n_j$. Учитывая (2.10) и равенство (1.2), $R_{n,\vec{m}}^j(z)$ можно представить в виде:

$$R_{n,\vec{m}}^j(z) = \begin{vmatrix} f_{n-m_1+1}^1 & f_{n-m_1+2}^1 & \dots & f_{n_1+1}^1 \\ f_{n-m_1+2}^1 & f_{n-m_1+3}^1 & \dots & f_{n_1+2}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_n^1 & f_{n+1}^1 & \dots & f_{n+m}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n-m_k+1}^k & f_{n-m_k+2}^k & \dots & f_{n_k+1}^k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_n^k & f_{n+1}^k & \dots & f_{n+m}^k \\ \sum_{i=n+1}^{\infty} f_i^j z^{m+i} & \sum_{i=n+2}^{\infty} f_i^j z^{m+i-1} & \dots & \sum_{i=n+m+1}^{\infty} f_i^j z^i \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{\infty} d_{n,\vec{m},i}^j z^{n+m+i}.$$

При преобразованиях воспользовались определением суммы степенного ряда и правилом сложения определителей. Нетрудно заметить, что предыдущее равенство справедливо и при $m_j = 0$. Теорема 2.1. доказана.

Заметим, что если хотя бы один ряд в (1.1) является формальным, то ряд (2.5) также будет формальным.

3. Замечания. Некоторые следствия. Необходимо сказать, что если индекс $(n,\vec{m})$ не вполне нормальный, то многочлены Q_m и $P_{n_j}^j$, определенные равенствами (2.3) и (2.4), не являются решениями задачи Эрмита–Паде. В частности, из примера 1.1 следует, что для индекса (2.2) искомый многочлен равен $Q_2(z) = a + bz - (4a+2b)z^2$. Однако, если Q_2 находится по формуле (1.3), то имеем, что $Q_2(z) \equiv 0$. Представление (1.3) многочлена Паде получается из (2.3) при $k=1$ и оно также справедливо только в том случае, когда индекс (n, m) является вполне нормальным. В монографии [2] при доказательстве теоремы 1.1.1 на это обстоятельство не обращено внимание (см. [2, гл. 4, § 1.1, теорема 1.1.1]).

Из (2.3) и (2.4) вытекает следующий критерий нормальности индекса $(n,\vec{m})$.

Следствие 3.1. *Индекс $(n,\vec{m})$ будет нормальным для f тогда и только тогда, когда*

$$H_{n,\vec{m}} \cdot \prod_{j=1}^{k} H_{n,\vec{m}}^j \neq 0, \tag{3.1}$$

где

$$H^{j}_{n,\vec{m}} = \begin{vmatrix} f^1_{n-m_1+1} & f^1_{n-m_1+2} & \cdots & f^1_{n_1+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f^1_n & f^1_{n+1} & \cdots & f^1_{n+m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f^k_{n-m_k+1} & f^k_{n-m_k+2} & \cdots & f^k_{n_k+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f^k_n & f^k_{n+1} & \cdots & f^k_{n+m} \\ f^j_{n-m_j} & f^j_{n-m_j+1} & \cdots & f^j_{n_j} \end{vmatrix}.$$

В частности, при $k=1$ получим критерий нормальности индекса (n,m) (1.4).

Следующее утверждение можно рассматривать как некоторый аналог теоремы Кронекера [1].

Следствие 3.2. *Пусть* $n=(n,\vec{m})$ *является вполне нормальным для* $f=\{f_1,\ldots,f_k\}$. *Тогда для того, чтобы функция* f_j *была рациональной, необходимо и достаточно, чтобы* $d^{j}_{n,\vec{m},i}=0$ *для всех достаточно больших* i.

Компонента m_j мультииндекса $\vec{m}$ устанавливает число коэффициентов ряда f_j, которые участвуют при построении многочленов Q_m. В частности, если $m_j=0$, то матрица $F_{n,\vec{m}}$ и определитель в (2.3) не содержат блока F^j и, следовательно, при их построении формальный ряд f_j не участвует, а порядок мультииндекса $\vec{m}$ задается остальными ненулевыми компонентами.

Например, если $\vec{m}=(m_1,0,\ldots,0)\in\mathbb{Z}^k$, то $m=m_1$ и тогда, как и в одномерном случае, при нахождении Q_m учитываются только коэффициенты ряда f_1. При этом представление (2.3) совпадает с (1.3), а критерий нормальности индекса (n,m) (3.1) согласуется с (1.4). Если $\vec{m}$ – нулевой вектор, с точностью до константы получаем, что $Q_m(z)\equiv 1$, а P^j_n – многочлен Тейлора функции f_j.

ЛИТЕРАТУРА

1. Никишин, Е.М. Рациональные аппроксимации и ортогональность / Е.М. Никишин, В.Н. Сорокин. – М.: Наука, 1988. – 257 с.
2. Бейкер мл., Дж. Аппроксимации Паде. 1. Основы теории. 2. Обобщения и приложения / Дж. Бейкер мл., П. Грейвс-Моррис. – М.: Мир, 1986. – 502 с.
3. Stahl, H. Asymptotics for quadratic Hermite-Padé polynomals associated with the exponential function / H. Stahl // Electronic Trans. Num. Anal. – 2002. – № 14. – P. 193–220.
4. Аптекарев, А.И. Аппроксимации Паде, непрерывные дроби и ортогональные многочлены / А.И. Аптекарев, В.И. Буслаев, А. Мартинес-Финкельштейн, С.П. Суетин // Успехи матем. наук. – 2011. – Т. 66, № 6(402). – С. 37–122.
5. Hermite, C. Sur la fonction exponentielle / C. Hermite // C.R. Akad. Sci. – 1873. – Vol. 77. – P. 18–293.

REFERENCES

1. Nikishin E.M., Sorokin V.N. *Ratsionalniye approksimatsii i ortogonalnost* [Rational Approximations and Orthogonality], Moscow: Nauka, 1988, 256 p.
2. George A.Baker, Jr., Graves-Morris P. *Approksimatsii Pade. 1. Osnovy teorii. 2. Obobshcheniya I prilozheniya* [Pade Approximations 1. Basics of the Theory. 2. Extensions and Applications], Moscow, Mir, 1986, 502 p.
3. Stahl H. Asymptotics for quadratic Hermite-Padé polynomals associated with the exponential function / H. Stahl / Electronic Trans. Num. Anal. – 2002. – № 14. – P. 193–220.
4. Aptekarev A.I., Buslayev V.I., Martınez-Finkelshtein A., Suyetin S.P. *Uspekhi mat. nauk* [Success of Mathematical Sciences], 2011, Vol. 66, 6(402), pp. 37–122.
5. Hermite C. Sur la fonction exponentielle/ C. Hermite// C.R. Akad. Sci. – 1873. – Vol. 77. – P. 18–293.

Поступила в редакцию 24.06.2019

Адрес для корреспонденции: e-mail: apsvoitov@gmail.com – Старовойтов А.П.