Доклады Академии наук СССР
1970. Том 191, № 5

УДК 519.21 *МАТЕМАТИКА*

Г. П. КЛИМОВ

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФИДУЦИАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛЯ МНОГОМЕРНОЙ НОРМАЛЬНОЙ СОВОКУПНОСТИ

*(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 4 IX 1969)*

Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — независимые наблюдения над случайной величиной (сл. в.) из $r$-мерной нормальной совокупности $N(\mu, A)$.

Случай 1. $A$ известна, $\mu$ неизвестна. Достаточной статистикой служит $\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + \ldots + x_n)$. Для всякого $\bar{x}$ определим фидуциальное распределение (фид. р.) $P_{\bar{x}}$ параметра $\mu$ равенством

$$P_\mu\{\mu \in S(\bar{x})\} = P_{\bar{x}}\{\mu \in S(\bar{x})\}$$

для всякой системы доверительных (измеримых) множеств $S(\bar{x})$, удовлетворяющих условию $\mu \in S(\bar{x}) \Leftrightarrow \mu + \mu_0 \in S(\bar{x} + \mu_0)$ для любого $r$-мерного вектора $\mu_0$.

Случай 2. $A$ неизвестна, $\mu$ известна и $\mu = 0$. Достаточной статистикой служит $T = \sum_1^n x_k x_k'$. Для почти всякой при $n \geqslant r$ положительно определенной матрицы $T$ определим фид. р. $P_T$ параметра $A$ равенством

$$P_A\{A \in S(T)\} = P_T\{A \in S(T)\}$$

для любой системы доверительных (измеримых) множеств $S(T)$, удовлетворяющих условию $A \in S(T) \Leftrightarrow A_C \in S(T_C)$, где $A_C = CAC'$, $T_C = CTC'$ и $C$ — произвольная невырожденная матрица размерности $r \times r$. Так как любую невырожденную вещественную матрицу $C$ можно представить в виде произведения конечного числа матриц, каждая из которых является либо диагональной с положительными элементами на главной диагонали, либо ортогональной, то последнее условие означает, что доверительные множества инвариантны относительно выбора единиц измерения и ортогональной системы координат, в которой измеряется выборочная переменная.

Случай 3. $A$ неизвестна, $\mu$ неизвестна. Достаточной статистикой служит пара $(T, \bar{x})$, где $T = \sum_1^n (x_k - \bar{x})(x_k - \bar{x})'$. Для всякой пары $(T, \bar{x})$ определим фид. р. $P_{(T, \bar{x})}$ параметра $(A, \mu)$ равенством

$$P_{(A, \mu)}\{(A, \mu) \in S(T, \bar{x})\} = P_{(T, \bar{x})}\{(A, \mu) \in S(T, \bar{x})\}$$

для любой системы доверительных (измеримых) множеств $S(T, \bar{x})$, удовлетворяющих условию:

$$(A, \mu) \in S(T, \bar{x}) \Leftrightarrow (A_C, C\mu + \mu_0) \in S(T_C, C\bar{x} + \mu_0)$$

для любой невырожденной матрицы $C$ и любого $r$-мерного вектора $\mu_0$. Последнее условие означает, что доверительные множества инвариантны относительно выбора системы координат, в которой измеряется выборочная переменная.

Теперь можно ввести фид. р. выборочной переменной как распределение выборочной переменной, когда ненаблюдаемый неизвестный параметр имеет фид. р., соответствующее некоторому значению достаточной статистики.

Обозначим через $W^*(r, n, B)$ распределение, сосредоточенное на множестве $A_r$ положительно определенных матриц размерности $r \times r$ с плотностью

$$p(A) = \gamma_0(r, n) \frac{|B|^{n/2}}{|A|^{(n+r+1)/2}} \exp\left\{-\frac{n}{2} \operatorname{tr}(A^{-1}B)\right\}, \quad n \geqslant r,$$

где $\gamma_0(r, n) = n^{nr/2}\gamma(r, n)$, а $\gamma(r, n)$ — нормирующий множитель в распределении Уишарта. Для всякой матрицы $A \in A_r$ через $K(r, n, A)$ обозначим распределение, сосредоточенное на эвклидовом пространстве $E_r$, с плотностью

$$p(x) = \gamma_1(r, n) \frac{1}{|A|^{1/2}} \left[1 + \frac{(A^{-1}x, x)}{n}\right]^{-(n+1)/2}; \quad \gamma_1(r, n) = (\pi n)^{-r/2} \times \\ \times \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma((n-r+1)/2)}.$$

Фид. сл. ненаблюдаемый параметр и фид. выборочную переменную будем снабжать знаком звездочка сверху. Тогда в случае 1

$$\mu^* \in N\left(\bar{x}, \frac{1}{n} A\right), \quad x^* \in N\left(\bar{x}, \frac{n+1}{n} A\right)$$

(знак $\in$ означает, что, например, $\mu^*$ имеет распределение $N\left(\bar{x}, \frac{1}{n} A\right)$).

В случае 2

$$A^* \in W^*(r, n, \hat{A}); \quad x^* - \mu \in K(r, n, \hat{A}); \quad \hat{A} = \frac{1}{n} \sum_1^n (x_k - \mu)(x_k - \mu)'.$$

В случае 3

$$\sqrt{n}(\mu^* - \bar{x}) \in K(r, n-1, S); \quad A^* \in W^*(r, n-1, S);$$

$$x^* - \bar{x} \in K\left(r, n-1, \frac{n+1}{n} S\right); \quad S = \frac{1}{n-1} \sum_1^n (x_k - \bar{x})(x_k - \bar{x})'.$$

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
1 IX 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. П. Климов, ДАН, 191, № 4 (1970).