Доклады Академии наук СССР
1970. Том 192, № 2

УДК 513.821.838 *МАТЕМАТИКА*

В. И. ПУПКО, В. А. ЕФРЕМОВИЧ

ПОВЕДЕНИЕ ЭКВИМОРФИЗМОВ В БЕСКОНЕЧНОСТИ

(Представлено академиком П. С. Новиковым 20 X 1969)

В ([1]) было установлено, что всякий эквиморфизм $f: H^n \to H^{n'}$ гиперболических пространств сохраняет касание кривых с абсолютом, а также касание кривых, лежащих на абсолюте, однако порядок касания с абсолютом и порядок касания кривых на абсолюте, вообще говоря, не сохраняются. Здесь будут уточнены свойства эквиморфизма f на абсолюте, именно, оказывается, что хотя порядок касания и не сохраняется, но каждый из трех типов касания: нулевой, конечный и бесконечный (см. ниже) остается неизменным.

1. Говорят, что касание в точке a двух кривых K и K_1 в метрическом пространстве R имеет порядок α, $0 \leqslant \alpha \leqslant \infty$, если для каждого $\alpha' < \alpha$ можно найти такую общую параметризацию кривых (взаимно однозначное и непрерывное соответствие между параметрами), при которой $xy / (ax)^{1+\alpha'} \to 0$ $(x \in K,\ y \in K_1,\ x,\ y \to a)$, но при любом $\alpha' > \alpha$ такой параметризации не существует *. В частности, при $\alpha = 0$, $0 < \alpha < \infty$, $\alpha = \infty$ получаем три типа касания: нулевой, конечный и бесконечный.

Рассмотрим теперь кривую K_1, лежащую на абсолюте S^{n-1} пространства H^n, и касающуюся ее в точке $u \in S^{n-1}$ кривую K, также лежащую на S^{n-1} или в H^n. Здесь под порядком касания кривых K и K_1 понимается порядок касания их образов на сферической модели Пуанкаре (модель P). Если K_1 представляет собой центральную проекцию K на абсолют, то порядок касания K с K_1 называется порядком касания K с абсолютом.

Примем прямую, ведущую в точку $u \in S^{n-1}$, за ось oz «цилиндрической» системы координат в H^n: для любой точки $p \in H^n$ обозначим через d расстояние ее от oz, через z — проекцию вектора $\overrightarrow{op}$ на oz. Тогда три введенных типа касания кривой K с абсолютом можно различить, уже вовсе не прибегая к модели, следующим образом.

0-порядок касания: на K существует последовательность точек $p_n \to u$, для которых $d_n / z_n \to 0$ $(d_n \to \infty,\ p_n \to u,\ p_n \in K)$; конечный порядок: найдутся две константы $c, C > 0$ такие, что $d / z > c$ для любой точки $p \in K$, но существует последовательность $p_n \to u$ точек на K, для которых $d_n / z_n < C$; бесконечный порядок: $d / z \to \infty$ при $p \to u$, $p \in K$.

Рассмотрим, например, кривую нулевого порядка касания с абсолютом. Для нее $(1 - r) / \theta \to 0$, $\theta \to 0$, но $(1 - r) / \theta^{1+\alpha} \not\to 0$ при любом $\alpha > 0$, где $r = \operatorname{th} \rho / 2$, $\rho = \overrightarrow{op}$, θ — угол между $\overrightarrow{op}$ и oz. Второе соотношение означает, что $1 / \operatorname{sh} \rho \cdot \theta^{1+\alpha} \not\to 0$ и, следовательно, $\operatorname{sh} \alpha z / \operatorname{sh} d \not\to 0$ при $z \to \infty$ или $d - \alpha z \not\to \infty$ при $z \to \infty$. Отсюда следует, что для последовательности $\alpha_n \to 0$ найдется на кривой последовательность точек $p_n = (d_n, z_n)$ и последовательность $c_n > 0$ такие, что $z_n \to \infty$, $c_n / z_n \to 0$ и $d_n - \alpha_n z_n < c_n$, т. е. $d_n / z_n < \alpha_n + c_n / z_n$, значит, $d_n / z_n \to 0$. Для конечного (бесконечного) порядка касания $\lim 1 / \operatorname{sh} \rho \cdot \theta^{1+\alpha_0} = 0$ для некоторого $\alpha_0 > 0$ (для любого $\alpha_0 > 0$), т. е. при всех положительных $\alpha \leqslant \alpha_0$ $d - \alpha z \to \infty$, откуда, очевидно, следует, что не существует никакой последовательности $p_n \in K$, для которой $d_n / z_n \to 0$.

Замечание. Легко видеть, что если подвергнуть кривую K, ведущую в бесконечно удаленную точку u, ограниченному сдвигу, т. е. каждую ее точку переместить на конечное расстояние, то порядок касания ее с абсолютом не изменится.

* При $\alpha = 0$, ∞ эта формулировка должна быть естественным образом несколько модифицирована.

Следующие теоремы устанавливают инвариантность каждого из трех указанных типов касания.

2. Теорема 1. *Нулевой порядок касания кривой K с абсолютом инвариантен относительно эквиморфизмов пространства H^n.*

Доказательство. Как было только что установлено, для некоторой последовательности p_n точек кривой $d_n / z_n \to 0$ при $p_n \to u$. Покажем, во-первых, что d_n' / d_n остается ограниченным с двух сторон при всяком эквиморфизме f. Обозначим проекцию точки p_n на oz через q_n, образы точек p_n и q_n при эквиморфизме f через p_n' и q_n', наименьшее расстояние точки p_n' от образа оси oz через D_n'. Тогда $D_n' \leqslant p_n'q_n' \leqslant L \cdot p_n q_n = L \cdot d_n$ (для достаточно больших расстояний эквиморфизм удовлетворяет двустороннему условию Липшица; константы, входящие сюда, обозначим через l и L). Далее, $d_n' \leqslant D_n' + c_0$, где c_0 — наибольшее отклонение образа oz от oz (см. (²)), причем мы предполагаем, что точки u и o остаются на месте. Таким образом, $d_n' \leqslant L \cdot d_n + c_0 < (L+1) d_n = \bar{L} \cdot d_n$. Рассмотрев обратное отображение f^{-1}, таким же образом убеждаемся, что $d_n' > \bar{l} \cdot d_n$. Итак, $\bar{l} < d_n' / d_n < \bar{L}$, где $\bar{l}$, $\bar{L} > 0$ — некоторые константы. Теперь закончим доказательство инвариантности нулевого порядка касания. Аналогично предыдущему имеем $l < \rho_n' / \rho_n < L$, где $\rho_n = op_n$, $\rho_n' = op_n'$. Значит, $l / 2 < (z_n' + d_n') / (z_n + d_n) < 2L$, откуда следует, что $\frac{l}{2} < \frac{z_n'/z_n + d_n'/z_n}{1 + d_n/z_n} < 2L$ и так как $d_n / z_n \to 0$ и $d_n' / z_n \to 0$ (последнее вследствие ограниченности отношения d_n' / d_n) при $n \to \infty$, то $l / 3 <$ $< z_n' / z < 3L$. Отсюда $\frac{d_n'}{z_n'} = \frac{d_n'}{d_n} \frac{d_n}{z_n} \frac{z_n}{z_n'} \to 0$, что и требовалось.

Прежде чем сформулировать теорему 2, докажем одно вспомогательное предложение, которое понадобится и в дальнейшем.

Лемма. *Для того чтобы две кривые $K_1, K_2 \subset S^{n-1}$ имели порядок касания в точке u:* а) *нулевой,* б) *бесконечный, необходимо и достаточно, чтобы на каждом проектирующем конусе oK_1 и oK_2 нашлись две кривые $\mathscr{K}_1$ и $\mathscr{K}_2$, ограниченно отклоняющиеся друг от друга, причем:* а) *$\mathscr{K}_1$ и $\mathscr{K}_2$ касаются абсолюта; всякие две такие кривые имеют не более чем нулевой порядок касания с абсолютом;* б) *$\mathscr{K}_1$ и $\mathscr{K}_2$ имеют бесконечный порядок касания с абсолютом.*

Доказательство. Случай а). Необходимость. Пусть порядок касания K_1 с K_2 равен нулю. Пусть $u_1 \in K_1$, $u_2 \in K_2$. Если обозначить через β угол u_1ou_2 и через ψ_1 и ψ_2 — углы u_1ou и u_2ou соответственно, то $\lim \beta / \psi_i = 0$; $\beta / \psi_i^{1+\alpha} \not\to 0$, $i = 1, 2$; $\alpha > 0$. Построим на проектирующем конусе oK_1 кривую $\mathscr{K}_1$ с уравнением $1 - r_1 = \beta$. Тогда $(1 - r_1) / \psi_1 =$ $= \beta / \psi_1 \to 0$ и $(1 - r_1) / \psi_1^{1+\alpha} \not\to 0$, что означает нулевой порядок касания K_1 с абсолютом. Точно так же на oK_2 построим кривую $\mathscr{K}_2$ с уравнением $1 - r_2 = \beta$ (т. е. положим $r_1 = r_2 = r = 1 - \beta$, где $r = \operatorname{th} \rho / 2$). Расстояние между соответствующими точками на $\mathscr{K}_1$ и $\mathscr{K}_2$ обозначим через d. Тогда $\operatorname{sh} \frac{d}{2} = \operatorname{sh} \rho \sin \frac{\beta}{2} = \frac{2r}{1+r} \frac{\sin \beta/2}{1-r} \to \frac{1}{2}$ при $u_{1,2} \to u$.

Предположим теперь, что найдутся $\overline{\mathscr{K}}_1 \subset oK_1$ и $\overline{\mathscr{K}}_2 \subset oK_2$, ограниченно отклоняющиеся друг от друга, причем хотя бы одна из них имеет более чем нулевой порядок касания с абсолютом. Тогда из замечания пункта 1 следует, что и вторая кривая будет иметь тот же порядок; обозначим его через α_0. Пусть ограниченность расстояния между $\overline{\mathscr{K}}_1$ и $\overline{\mathscr{K}}_2$ достигается при соответствии $x_1 \leftrightarrow x_2$ ($x_1 \in \overline{\mathscr{K}}_1$, $x_2 \in \overline{\mathscr{K}}_2$). Из треугольника ox_1x_2 имеем $\beta^2 \leqslant c(1 - r_1)(1 - r_2)$, $c = \mathrm{const}$. Рассмотрим отношение $\beta/\psi_1^{1+\alpha}$, где $0 < \alpha < \alpha_0$. Тогда $\frac{\beta^2}{\psi_1^{(1+\alpha)2}} \leqslant \frac{c(1-r_1)(1-r_2)}{\psi_1^{2(1+\alpha)}} = c \frac{1-r_1}{\psi_1^{1+\alpha}} \frac{1-r_2}{\psi_1^{1+\alpha}}$.
Так как ψ_1 и ψ_2 — эквивалентные бесконечно малые (см. (¹)), то оба последних множителя стремятся к нулю. Поэтому $\beta/\psi_1^{1+\alpha} \to 0$ и, значит, порядок касания K_1 с K_2 не меньше чем α_0.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Вместо требуемого предложения приведем формулировку эквивалентного ему предложения. Если K_1 и K_2 имеют в точке $u \in S^{n-1}$ касание конечного (или более чем конечного) порядка, то на проектирующих конусах oK_1 и oK_2 можно найти кривые $\mathscr{K}_1$ и $\mathscr{K}_2$, имеющие конечный порядок касания с абсолютом и ограниченно отклоняющиеся друг от друга. Доказательство этого факта вполне аналогично предыдущему доказательству.

С л у ч а й б). Н е о б х о д и м о с т ь. Так же как в предыдущем случае, строим кривые $\mathscr{K}_i$, $1 - r_i = \beta$, $i = 1, 2$, которые, очевидно, имеют бесконечный порядок касания с абсолютом.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть на oK_1 и oK_2 найдутся кривые $\mathscr{K}_1$ и $\mathscr{K}_2$ на ограниченном расстоянии друг от друга, порядок касания каждой из которых с абсолютом бесконечен. Приняв, как и выше, $x_1 \leftrightarrow x_2$ за соответствие между этими кривыми и рассмотрев треугольник ox_1x_2, получим, как и раньше, $\beta^2 \leqslant c(1 - r_1)(1 - r_2)$, причем $(1 - r_1) / \psi_1^N \to 0$ и $(1 - r_2) / / \psi_2^N \to 0$ для любого N, большего или равного единице. В таком случае $\beta^2 / \psi_1^{2N} \leqslant c(1 - r_1)(1 - r_2) / \psi_1^{2N} \to 0$, что и требовалось.

Т е о р е м а 2. *Нулевой порядок касания кривых K_1 и K_2, лежащих на абсолюте, инвариантен относительно эквиморфизмов пространства H^n.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим образы кривых K_1 и K_2 при эквиморфизме f через K_1' и K_2'. Предположим, что порядок касания K_1' с K_2' конечен (или бесконечен). Тогда на проектирующих конусах $o'K_1'$ и $o'K_2'$ найдутся кривые $\mathscr{K}_1'$ и $\mathscr{K}_2'$, ограниченно отклоняющиеся друг от друга и имеющие конечный порядок касания с абсолютом. В таком случае эквиморфизм f^{-1} переводит $\mathscr{K}_1'$ и $\mathscr{K}_2'$ в кривые $\widetilde{\mathscr{K}}_1$ и $\widetilde{\mathscr{K}}_2$ с конечным (с ненулевым) порядком касания с абсолютом. Проектируя ортогонально кривые $\widetilde{\mathscr{K}}_1$ и $\widetilde{\mathscr{K}}_2$ на конусы oK_1 и oK_2 соответственно, получим кривые $\mathscr{K}_1$ и $\mathscr{K}_2$, лежащие на ограниченном расстоянии от $\widetilde{\mathscr{K}}_1$ и $\widetilde{\mathscr{K}}_2$ и, следовательно, имеющие не менее чем конечный порядок касания с абсолютом. Если расстояние между $\mathscr{K}_1$ и $\mathscr{K}_2$ ограничено, то кривые K_1 и K_2 не могли бы иметь касание нулевого порядка; если же не ограничено, то $\mathscr{K}_1'$ и $\mathscr{K}_2'$ также не могли бы лежать на конечном расстоянии друг от друга. Теорема доказана.

3. Т е о р е м а 3. *Бесконечный порядок касания с абсолютом кривой K, ведущей в бесконечно удаленную точку u, есть инвариант эквиморфизмов пространства H^n.*

Д о к а з а т е л ь с т в о опирается на несколько другие соображения, чем доказательство теоремы 1

Т е о р е м а 4. *Бесконечный порядок касания кривых K_1 и K_2, лежащих на абсолюте, инвариантен относительно эквиморфизмов H^n.*

Д о к а з а т е л ь с т в о: Обозначим образы кривых K_1 и K_2 через K_1' и K_2'. Вследствие леммы пункта 1 на проектирующих конусах oK_1 и oK_2 найдутся кривые $\mathscr{K}_1$ и $\mathscr{K}_2$, ограниченно отклоняющиеся друг от друга и имеющие бесконечный порядок касания с абсолютом. Это значит, что проекции их образов $\mathscr{K}_1'$ и $\mathscr{K}_2'$ на проектирующие конусы $o'K_1'$ и $o'K_2'$ ограниченно отклоняются друг от друга и тоже касаются абсолюта с бесконечным порядком касания. Из упомянутой уже леммы следует, что порядок касания кривых K_1' и K_2' бесконечен, что и требовалось.

Из предыдущих теорем вытекает справедливость следующей теоремы.

Т е о р е м а 5. *Конечный порядок касания кривой с абсолютом, а также конечный порядок касания двух кривых, лежащих на абсолюте, остается конечным для их образов при эквиморфизмах пространства, т. е. конечность порядка касания инвариантна относительно эквиморфизмов простанства H^n.*

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР
Москва

Поступило
16 X 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. А. Е ф р е м о в и ч, В. И. П у п к о, ДАН, 160, № 1 (1965). [2] В. А. Е ф р е м о в и ч, Е. С. Т и х о м и р о в а, ДАН, 152, № 5 (1963).