Доклады Академии наук СССР
1970. Том 192, № 3

УДК 517.941 МАТЕМАТИКА

А. Б. КУРЖАНСКИЙ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИГРЫ СБЛИЖЕНИЯ ПРИ ОГРАНИЧЕННЫХ ФАЗОВЫХ КООРДИНАТАХ

(Представлено академиком Н. Н. Красовским 17 XI 1969)

В соответствии с подходом ([1], [2]) рассматриваются формализованные и аппроксимативные решения дифференциальных игр сближения ([3]) при ограниченных координатах и при наличии запаздываний в системе.

1. Программное сближение. На промежутке $[t_\alpha, \vartheta]$ задана n-мерная управляемая система

$$dx / dt = A(t)x + B(t)u - C(t)v \tag{1}$$

с непрерывными матричными коэффициентами и соответственно с r- и q-мерными управлениями u, v 1-го и 2-го игроков. Заданы ограничения $u(t) \in U(t)$, $v(t) \in V(t)$, $\{x\}_k \in X_k(t)$, где при каждом t $U(t)$, $V(t)$, $X_k(t)$ суть выпуклые компакты в E_r, E_q, E_k, непрерывные по t; $\{x\}_k$ есть k-вектор $\{x_1, \ldots, x_k\}$. где x_j — координаты x. Пусть M — заданное ограниченное выпуклое множество в пространстве E_m избранных координат x_{j_s}, $s = 1, \ldots, m$, $\{x\}_m = \{x_{j_1}, \ldots, x_{j_m}\}$ и $r[\{x\}_m, M]$ есть эвклидово расстояние от $\{x\}_m$ до M.

Задача 1 (о программном сближении). По заданной начальной позиции t_α, $x_\alpha = x(t_\alpha)$ найти управления $u^0(t)$, $v^0(t)$, доставляющие в силу (1) условие

$$\varepsilon^0[x_\alpha, t_\alpha] = \varepsilon(u_0, v_0) = \max_{v \in V} \min_{u \in U} \varepsilon(u, v) = \max_{v \in V} \min_{u \in U} r[\{x(\vartheta)\}_m, M].$$

Задача 1* (сопряженная). Среди распределений первого порядка вида $\{\lambda = l_\alpha \delta(t - t_\alpha) + l_\beta \delta(t - t_\beta) - l(t)\} = \{\lambda\}$ ($l_\alpha = \{l_{\alpha j}\}$, $l_\beta = \{l_{\beta j}\}$, $l(t) = \{l_j(t)\}$, $j = 1, \ldots, n$; $l_{\beta j} = 0$, если $j \neq j_s$; $l(t) \equiv 0$, если $j > k$) и таких, что соответствующее решение $s_\lambda(t)$ сопряженного уравнения в распределениях $ds / dt = -sA + \lambda$ сосредоточено ([4]) на $[t_\alpha, \vartheta]$, найти оптимальное λ^0, доставляющее максимум функционалу

$$\Psi(\lambda^0) = \max_{l,\, l_\beta} \Psi[l, l_\beta] = \max_{l,\, l_\beta} \{\rho^{(2)}_{t_\alpha}[sC] - \rho^{(1)}[sB] -$$

$$- \int_{t_\alpha}^{t_\beta} \gamma_x[\{d\Lambda\}_k] - l_\alpha x_\alpha - \gamma_M[\{l_\cdot\}_m]\} \tag{2}$$

при условии

$$\|l_\beta\|^2 = \sum_{j=1}^{n} l_{\beta j}^2 = 1.$$

Здесь $l(t) = d\Lambda(t) / dt$ (в обобщенном смысле), $\rho^{(1)}_{t_\alpha}[h]$, $\rho^{(2)}_{t_\alpha}[h]$ — опорные функционалы множеств $\{u(t)\} \subset U(t)$ и $\{v(t)\} \subset V(t)$, $t_\alpha \leqslant t \leqslant \vartheta$; $\gamma_x[p]$, $\gamma_M[p]$ — опорные функции множеств — X_k и M. Обозначим $s_\lambda(t)|_{\lambda=\lambda^0} = s^0(t)$, $\lambda^0 = l_\alpha{}^0 \delta(t - t_\alpha) + l_\beta{}^0 \delta(t - t_\beta) - l^0(t)$, $d\Lambda^0 / dt = l^0(t)$.

Теорема 1. *Решения $\varepsilon^0[x, t]$, $u^0(t)$, $v^0(t)$, $x^0(t)$ задачи 1 удовлетворяют соответственно условию $\varepsilon^0[x, t] = \Psi[l^0, l_\beta{}^0]$ и принципу максимума* *для управлений и траектории*

$$s^0(t)B(t)u^0(t) = \max_{u\in U(t)} s^0(t)B(t)u, \quad s^0(t)C(t)v^0(t) = \max_{v\in V(t)} s^0(t)C(t)v; \qquad (3)$$

$$\int_{t_\alpha}^{\vartheta} d\Lambda^0(t)x^0(t) = -\max_p \int_{t_\alpha}^{\vartheta} d\Lambda^0(t)p(t), \qquad (4)$$

где max *берется по всем* k*-векторным функциям* $p(t)$, *удовлетворяющим включению* $p(t) \in -X_k(t)$.

2. Дифференциальная игра сближения. Для системы (1) рассмотрим дифференциальную игру, где платой примем $\chi[\vartheta] = r[\{x(\vartheta)\}_m, M]$. Пусть $X(t) = \{x\colon \{x\}_k \subset X_k(t)\}$, $T = [t_\alpha, \vartheta]$.

Предположение 1. Можно указать $\delta > 0$ такое, что для любого $(n+1)$-вектора $\{x, t\}$ из $D = X \times T$ множество $\{u(\xi)\}$ управлений $u(\xi) \subset U(\xi)$, сохраняющих при $t \leqslant \xi \leqslant t + \delta$ включение $x(\xi) \in X(\xi)$, каким бы ни было $v(\xi) \in V(\xi)$, непусто.

Запишем $D = D_i \cup D_s \cup D_n$, где $D_i = \operatorname{int} X \times T$, $D_s \cup D_n = \partial X \times T$. Допустимой стратегией $\mathscr{U}(x, t)$ $(\mathscr{V}(x, t))$ для позиции $\{x, t\}$ назовем многозначную функцию $\mathscr{U}(x, t) \subset U(t)$ $(\mathscr{V}(x, t) \subset V(t))$ со значениями в выпуклом компакте, полунепрерывную сверху по включению в $D_i \cup D_n$ (в D). Пусть в области D_s $\mathscr{U}(x, t)$ совпадает со множеством векторов $\{u = u(t)\}$, отвечающих функциям $\{u(\xi)\}$ из предположения 1 и в области D_n $\mathscr{U}(x, t) \subset \{u = u(t)\}$. Подставляя пару допустимых стратегий в (1), получим уравнение в контингенциях ([5]) или обобщенную динамическую систему ([6])

$$dx/dt \in A(t)x + B(t)\mathscr{U}(x, t) - C(t)\mathscr{V}(x, t). \qquad (5)$$

Множество $\{x(t)\}$ решений (5) (т. е. абсолютно непрерывных функций, удовлетворяющих почти всюду включению (5)) непусто, каждое решение $x(t)$ удовлетворяет всюду включению $x(t) \in X(t)$ и порождается в силу (1) парой измеримых функций $u(t) \in \mathscr{U}(x, t)$, $v(t) \in \mathscr{V}(x, t)$. Пусть $\sigma[u, v, t, x] = (\chi[x(\vartheta)] \,/\, u(t), v(t), t, x)$.

Задача 2. Найти оптимальные игровые стратегии, обеспечивающие условие

$$\sigma^0 = \min_{\mathscr{U}} \max_{v(t)} \inf_{\{x(t)\}} \sigma[\mathscr{U}, v, t, x] = \max_{\mathscr{V}} \min_{u(t)} \sup_{\{x(t)\}} \sigma[u, \mathscr{V}, t, x]. \qquad (6)$$

Предположение 2. Для каждой позиции $\{x, t\} \in D$ соответствующая задача 1*, рассматриваемая на $[t, \vartheta]$, имеет единственное решение — экстремальное распределение λ^0. Функция $\Lambda^0(t)$ не содержит сингулярной составляющей.

Условие для $\Lambda^0(t)$ обсуждается в ([7]). Предположение 2 заведомо выполнено, если $B(t) \equiv C(t)$ и множества $X_k(t)$ равномерно выпуклы равностепенно по t.

Теорема 2. *Пусть выполнены предположения* 1, 2. *Тогда существуют оптимальные стратегии* $\mathscr{U}^0(x, t)$, $\mathscr{V}^0(x, t)$, *решающие задачу* 2.

При $\{x, t\} \subset D_i \cup D_n$ $\mathscr{U}^0(x, t)$, $\mathscr{V}^0(x, t)$ совпадают со множествами векторов u, v, удовлетворяющих в момент t принципу максимума (3) задачи 1 для $\{x, t\}$ и $[t, \vartheta]$. Здесь D_n совпадает со множеством векторов $(\{x, t\}\colon x \in \partial X)$, для которых в указанной задаче 1 имеем $s^0(t)B(t) \neq 0$. Тогда замкнутая область D_s есть дополнение $D_i \cup D_n$ до D. В D_s $\mathscr{U}^0(x, t)$ определяется как допустимая стратегия и $\mathscr{V}^0(x, t)$ определяется так же, как и в $D_i \cup D_n$. Доказательство теоремы 2 опирается, в частности, на свойство слабой непрерывности определяемого на $D \subset E_{n+1}$ оператора $(\lambda^0(\xi) \,/\, x, t)$, $t \leqslant \xi \leqslant \vartheta$, из E_n в $D'[t, \vartheta]$ и вытекающей отсюда допустимости стратегий $\mathscr{U}^0(x, t)$, $\mathscr{V}^0(x, t)$. В условиях теоремы 2 функция $\varepsilon^0[x, t]$ в области $\varepsilon^0[x, t] > 0$ дифференцируема справа вдоль реализующегося движения $x[t]$, причем

$$(d\varepsilon^0[x, t]/dt)_{+0} = \partial(\rho_t^{(2)}[s^0C] - \rho_t^{(1)}[s^0B])/\partial t - d(s^0(t)x[t])/dt +$$
$$+ \max_{x\in -X(t)} l^0(t)x = s^0(t)[B(t)(u^0(t) - u(t)) - C(t)(v^0(t) - v(t))].$$

Решение задачи 2 может быть реализовано в аппроксимативных стратегиях. Действительно, разбивая $[t_\alpha, \vartheta]$ на N равных частей $\{t_\alpha = t_0, \ldots, t_N = \vartheta\}$, $t_{i+1} - t_i = \Delta$, можем, опираясь на задачу 1, определить на каждом шаге $t_i \leqslant t < t_{i+1}$ управление $u_\Delta[t] = u[x_\Delta[t_i], t_i] \in \mathscr{U}_\zeta^0(x_\Delta[t_i], t_i)$, где $x_\Delta[t]$ — решение (1) при $u = u_\Delta[t]$, $\mathscr{U}_\zeta$ — эвклидова ζ-окрестность $\mathscr{U}$, $\zeta(\Delta) \to 0$ $(\Delta \to 0)$.

Теорема 3. *Пусть выполнены предположения* 1, 2. *Тогда, каковы бы ни были числа* $\delta > 0$, $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ *и реализация* $v(\xi) \subset V(\xi)$, *для каждой ограниченной области* $G(t) \subset X(t) \subset E_n$ *можно указать число* Δ_0 *и управление* u_Δ *такие, что при* $\Delta \leqslant \Delta_0$ *справедливы неравенства* $\sigma[u_\Delta{}^0[\xi], v(\xi), t, x] - \sigma^0 \leqslant \delta$, $r[x_\Delta{}^0[\xi], X(\xi)] \leqslant \delta_1$, $r[u_\Delta{}^0[\xi], U(\xi)] \leqslant \delta_2$, $t \leqslant \xi \leqslant \vartheta$, *какова бы ни была начальная позиция* $\{x, t\}$, *где* $x \in G(t)$, $t_\alpha \leqslant t \leqslant \vartheta$.

Аналогичным образом аппроксимируется стратегия $\mathscr{V}^0(x, t)$ при любой реализации $u(\xi) \subset U(\xi)$, строятся аппроксимативные решения и стратегии задачи 2 о седловой точке соответствующей игры.

3. Игровое сближение систем с запаздыванием. На промежутке $[t_\alpha, \vartheta]$ рассмотрим две n-мерные системы с постоянными запаздываниями и непрерывными матричными коэффициентами

$$dy / dt = A(t)y + A_h(t)y(t-h) + B(t)u,$$
$$dz / dt = C(t)z + C_\tau(t)z(t-\tau) + D(t)v, \tag{7}$$

управляемые соответственно r- и q-векторными функциями $u(t) \in U(t)$, $v(t) \in V(t)$ при условии $\{y\}_k \in Y_k(t)$, $\{z\}_l \in Z_l(t)$, где $\{z\}_l = \{z_{r_1}, \ldots, z_{r_s}, \ldots, z_{r_l}\}$ и $Y_k(t)$, $Z_l(t)$ — выпуклые компакты в E_k, E_l, непрерывные по t. Здесь решение программной задачи о нахождении по заданной позиции $\{y_{t_\alpha}(\zeta), z_{t_\alpha}(\eta), t\}$, $-h \leqslant \zeta \leqslant 0$, $-\tau \leqslant \eta \leqslant 0$, $y_t(\zeta) = y(t+\zeta) \in C[-h, 0]$, $z_t(\eta) = z(t+\eta) \in C[-\tau, 0]$ управлений $u^0(t)$, $v^0(t)$, доставляющих условие

$$\omega^0[y_{t_\alpha}(\zeta), z_{t_\alpha}(\eta), t_\alpha] = \omega(u^0, v^0) = \max_{v \in V} \min_{u \in U} \omega(u, v) =$$
$$= \max_{v \in V} \min_{u \in U} \|\{y(\vartheta) - z(\vartheta)\}_m\|,$$

приводит к принципу максимума

$$s_u^0(t)B(t)u^0(t) = \max_{u \in U(t)} s_u^0(t)B(t)u, \quad s_v^0(t)D(t)v^0(t) = \max_{v \in V(t)} s_v^0(t)D(t)v, \tag{8}$$

где $s_u{}^0(t)$, $s_v{}^0(t)$ — сосредоточенные на $[t_\alpha, \vartheta]$ решения сопряженных систем в распределениях

$$ds_u(t) / dt = -s_u(t)A(t) - s_u(t+h)A_h(t+h) + \lambda_u(t),$$
$$ds_v(t) / dt = -s_v(t)C(t) - s_v(t+\tau)C_\tau(t+\tau) + \lambda_v(t), \tag{9}$$

порожденные распределениями $\lambda_u{}^0$, $\lambda_v{}^0 \in \{\lambda\}$, оптимизирующими функционал

$$\omega[y_{t_\alpha}(\zeta), z_{t_\alpha}(\eta), t_\alpha] = \max_{\lambda_u, \lambda_v} \{\rho_{t_\alpha}^{(2)}[s_v D] - \rho_{t_\alpha}^{(1)}[s_u B] + l_{\alpha v} z_\alpha - l_{\alpha u} y_\alpha +$$
$$+ \int_{-\tau}^{0} s_v(\eta+\tau+t_\alpha) C_\tau(\eta+\tau+t_\alpha) z_{t_\alpha}(\eta)\, d\eta - \int_{-h}^{0} s_u(\zeta+h+t_\alpha) A_h(\zeta+h+$$
$$+ t_\alpha) y_{t_\alpha}(\zeta)\, d\zeta + \int_{t_\alpha}^{\vartheta} \gamma_y[\{d\Lambda_v\}_l] - \int_{t_\alpha}^{\vartheta} \gamma_z[\{d\Lambda_u\}_k], \quad l_{\alpha u} = l_{\beta v} = l_{\beta},$$
$$\|l_\beta\| = 1; \quad l_{uj}(t) \equiv 0,\ j \geqslant k; \quad l_{vj}(t) \equiv 0,\ j \neq r_s; \quad l_{\beta j} = 0,\ j \neq j_s. \tag{10}$$

Переходя к дифференциальной игре с платой $\chi[y(\vartheta), z(\vartheta)] = \|\{y(\vartheta) - z(\vartheta)\}_m\|$, под допустимыми стратегиями игроков понимаем многозначные функционалы $\mathcal{U}(y_t(\zeta), t) = \mathcal{U}(\cdot, t) \subset U(t)$, $\mathcal{V}(z_t(\eta), t) = \mathcal{V}(\cdot, t) \subset V(t)$ со значениями в выпуклых компактах, полунепрерывные сверху по включению по $\{y_t(\zeta), t\}$ и $\{z_t(\eta), t\}$ соответственно в областях $\{y(t), t\} \in D_i^{(1)} = \text{int } Y \times T$, $\{z(t), t\} \in D_i^{(2)} = \text{int } Z \times T$. В областях $\{y(t), t\} \in D_n^{(1)} \cup D_s^{(1)} = \partial Y \times T$, $\{z(t), t\} \in D_n^{(2)} \cup D_s^{(2)} = \partial Z \times T$ стратегии определяются по той же схеме, что и в п. 2, исходя из принципа максимума (8), с учетом предположений, аналогичных 1, но имеющих место теперь уже для каждой из систем (7). Случай, когда выполняются указанные предположения, когда для каждой позиции $\{y_t(\zeta), z_t(\eta), t\}$ распределения $\lambda_u{}^0$, $\lambda_v{}^0$ задачи (10) на $[t, \vartheta]$ единственны и $\Lambda_u{}^0$, $\Lambda_v{}^0$ не содержат сингулярных составляющих, назовем регулярным. Подставляя допустимую стратегию $\mathcal{U}(\cdot, t)$ в (7), получим для первого игрока уравнение в контингенциях с запаздыванием

$$dy(t) / dt \in A(t)y(t) + A_h(t)y(t-h) + B(t)\mathcal{U}(y_t(\zeta), t),$$

множество $\{y(t)\}$ решений которого непусто, причем всюду $y(t) \in Y(t)$ и каждое $y(t)$ реализуется измеримой функцией $u(t) \in \mathcal{U}(\cdot, t)$. Такой же вывод справедлив и для решений $\{z(t)\}$ уравнения в контингенциях для второго игрока.

Теорема 4. *В регулярном случае игры сближения систем* (7) *существуют оптимальные стратегии* $\mathcal{U}^0(\cdot, t)$, $\mathcal{V}^0(\cdot, t)$, *доставляющие условие*

$$\chi^0 = \min_{\mathcal{U}} \max_{v(t)} \inf_{\{y(t)\}} \chi[\mathcal{U}, v, t, \cdot] = \max_{\mathcal{V}} \min_{u(t)} \sup_{\{z(t)\}} \chi[u, \mathcal{V}, t, \cdot],$$

где $\chi[u, v, t, \cdot] = (\|\{y(\vartheta) - z(\vartheta)\}_m\| \,/\, u(t), v(t), t, y_t(\zeta), z_t(\eta))$.

Построение стратегий $\mathcal{U}^0$, $\mathcal{V}^0$ здесь аналогично п. 2. Аналогичным образом формулируются и теоремы об аппроксимативном решении игровой задачи сближения систем (7).

Примечание 1. Методы пп. 1—3 оказываются эффективными при рассмотрении игровой задачи сближения систем (7) с платой

$$\chi = \max_{\xi}(\|y(\vartheta+\xi) - z(\vartheta+\xi)\|_m), \quad -\tau = -h \leqslant \xi \leqslant 0.$$

Свердловское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
1 XI 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Н. Красовский, Дифференциальн. уравн., 5, № 3, 407 (1969). [2] Н. Н. Красовский, ПММ, 32, № 5, 793 (1968). [3] Р. Айзекс, Дифференциальные игры, М., 1967. [4] Г. Е. Шилов, Математический анализ, Второй специальный курс, М., 1965. [5] S. T. Zaremba, Bull. Sci. Math. (2) 60, 139 (1936). [6] E. Roxin, J. Diff. Equations, 1, № 2, 188 (1965). [7] А. Б. Куржанский, Ю. С. Осипов, ПММ, 33, № 4, 705 (1969).