Доклады Академии наук СССР
1970. Том 194, № 3

УДК 517.54 МАТЕМАТИКА

О. В. ТИТОВ

О КВАЗИКОНФОРМНЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЯХ ЭВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 13 III 1970)

Пусть f: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ — отображение класса C^∞ n-мерного эвклидова пространства $\mathbf{R}^n$ в себя, заданное n координатными функциями $f_1(x), \ldots, f_n(x)$, где $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Отображение f называется квазиконформным, если всюду выполнено неравенство

$$\left(\sum_{i,j=1}\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|^2\right)^{1/2} \leqslant C\,|J_f|^{1/n}, \tag{1}$$

где C — некоторая константа, а J_f — якобиан отображения f.

Комбинируя две теоремы Лиувилля, можно доказать следующее предложение: любое отличное от постоянного квазиконформное отображение f: $\mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n}$, которое в то же время голоморфно в комплексном пространстве $\mathbf{C}^n$, при $n > 1$ является невырожденным линейным преобразованием.

В настоящей заметке изучается более общий класс квазиконформных отображений f: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, являющихся градиентами гармонических функций. Такие отображения мы будем называть гармоническими.

Теорема. *Гармоническое квазиконформное отображение f: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, не сводящееся к постоянному, есть невырожденное линейное.*

Лемма 1. *Если квазиконформное отображение f: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ задается аналитическими функциями $f_i(x)$ $(i = 1, 2, 3)$ и отлично от постоянного, то оно — гомеоморфизм. Якобиан J_f не может, следовательно, принимать значений разных знаков.*

Пусть S — множество нулей J_f. S, как аналитическое множество, является объединением конечного числа многообразий класса C^∞ (см. ([1])). В силу неравенства (1) отображение f переводит каждую связную компоненту S в точку. В работах ([2], [3]) показано, что полный прообраз точки при квазиконформном отображении f при любом $\alpha > 0$ имеет нулевую α-меру Хаусдорфа. Следовательно, каждая связная компонента S состоит из одной точки, т. е. S является объединением конечного числа точек. Множество B_f точек ветвления отображения f принадлежит S и, следовательно, тоже конечно.

Покажем, что $B_f = \phi$. Если B_f не пусто, любую точку $x \in B_f$ окружим такой окрестностью U, что она не содержит других точек B_f. Известно (см. ([2], [3])), что $f(U)$ является некоторой окрестностью точки $f(x)$. С одной стороны, фундаментальная группа $\pi_1(f(U) \setminus f(x))$ тривиальна, с другой стороны, в $f(U)$ заведомо имеются точки, отличные от $f(x)$, прообраз которых состоит более чем из одной точки, что указывает на нетривиальность $\pi_1(f(U) \setminus f(x))$. Противоречие доказывает, что $B_f = \phi$.

Таким образом, отображение f локально гомеоморфно, а тогда, по теореме В. А. Зорича ([4]), оно гомеоморфно и глобально. Наконец, хорошо известно, что при этих условиях $f(\mathbf{R}^3) = \mathbf{R}^3$ (см. ([5]) или ([6])). Лемма доказана.

Далее легко показать, что все функции $f_i(x)$ $(i = 1, 2, 3)$ в формулировке теоремы являются полиномами. Действительно, рассмотрим отображение $h = \sigma f \sigma$, где $\sigma(x) = x|x|^{-2}$ — инверсия. Так как $f(\infty) = \infty$, то $h(0) = 0$, и, в силу многомерного аналога теоремы Мори ([7]) существуют такие константы C_1 и C_2, что в некоторой окрестности нуля

$$|h(x)| > C_1|x|^{C_2}.$$

Возвращаясь к отображению f, получим, что при достаточно большом $|x|$

$$|f(x)| < \frac{1}{C_1}|x|^{C_2}.$$

Это неравенство и подавно справедливо, если в нем $|f(x)|$ заменить на $|f_i(x)|$ $(i = 1, 2, 3)$. Так как все f_i — гармонические функции, то из полученных неравенств следует, что они — полиномы.

Из неравенства (1) также легко вытекает, что все степени полиномов f_i одинаковы. Общее значение этих степеней обозначим через m. Мы можем написать

$$f_i = p_i + q_i \quad (i = 1, 2, 3),$$

где p_i — однородные полиномы степени m, а степени q_i строго меньше m. Очевидно, что отображение p: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, задаваемое координатными функциями p_i $(i = 1, 2, 3)$, гармоническое.

Лемма 2. *Пусть f: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ — квазиконформный гомеоморфизм, причем $f(0) = 0$. Обозначим через $m(R)$ и $M(R)$ соответственно минимум и максимум $|f(x)|$ на сфере $|x| = R$. Тогда существует константа C, зависящая лишь от f и такая, что*

$$M(R) \leqslant Cm(R). \tag{2}$$

Доказательство легко следует из оценки, данной Герингом в ([8]) для модуля кольца.

Лемма 3. *Пусть f: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ — гомеоморфизм, задаваемый полиномами, и $f(0) = 0$. Возьмем некоторый луч l, идущий из начала координат 0, и точку $x \in l$ такую, что $|x| = r$. Если $s_l(r)$ — длина образа отрезка $[0, x]$ при отображении f, то существует константа $C(l)$, зависящая, может быть, от l, такая, что для любого $r > 1$*

$$s_l(r) \leqslant C(l)\,|f(x)|. \tag{3}$$

Доказательство элементарно.

Без ограничения общности мы можем считать, что для исходного отображения f $J_f \geqslant 0$ и $f(0) = 0$. Пусть $J_f|_l$ — сужение якобиана J_f на некоторый луч l, исходящий из начала координат. Тогда, в обозначениях леммы 3, $J_f|_l$ является полиномом степени k_l от r.

Число k_l не зависит от l. Действительно, для лучей l_j $(j = 1, 2)$ таких, что $k_{l_1} < k_{l_2}$, возьмем точки x_j, лежащие на l_j на расстоянии $r > 1$ от начала координат $(j = 1, 2)$. Используя (2) и (3), получаем

$$s_{l_1}(r) \geqslant m(r) \geqslant CM(r) \geqslant C\,|f(x_2)| \geqslant \frac{C}{C(l_2)}\,s_{l_2}(r).$$

Но

$$s_{l_j}(r) = \int_0^r \mu_{l_j}(t)\,dt \quad (j = 1, 2),$$

где $\mu_l(t)$ — коэффициенты локального растяжения в соответствующих направлениях. Из геометрического определения квазиконформности следует существование констант C_1 и C_2 таких, что

$$C_1(J_f|_{l_j})^{1/3} \leqslant \mu_{l_j} \leqslant C_2(J_f|_{l_j})^{1/3} \quad (j = 1, 2).$$

Отсюда $k_{l_1} \geqslant k_{l_2}$, что противоречит неравенству $k_{l_1} < k_{l_2}$.

Обозначим через k общее значение k_i и покажем, что $k = 3(m-1)$. На сфере $|x| = 1$ существует точка x такая, что $p(x) \neq 0$. Легко найти константы $M_1(x)$ и $M_2(x)$ такие, что при $r > 1$

$$M_1(x) r^m \leqslant |f(rx)| \leqslant M_2(x) r^m. \tag{4}$$

Если l — луч, задаваемый вектором x, то, используя (3) и (4), получим

$$\int_0^r (J_f|_l)^{1/3} dt \geqslant \frac{1}{C_2} |f(rx)| \geqslant \frac{M_1(x)}{C_2} r^m = \frac{m M_1(x)}{C_2} \int_0^r [t^{3(m-1)}]^{1/3} dt.$$

Отсюда следует, что $k \geqslant 3(m-1)$. Аналогично доказывается, что $k \leqslant 3(m-1)$.

Покажем, что всюду на единичной сфере якобиан J_p отображения p, заданного выше однородными составляющими старшей степени полиномов f_i $(i = 1, 2, 3)$, не обращается в нуль. В самом деле, если бы в некоторой точке x, $|x| = 1$, было $J_p(x) = 0$, то

$$\lim_{r\to\infty} \frac{J_f(rx)}{r^{3(m-1)}} = \lim_{r\to\infty} \det \left(\frac{\partial p_i/\partial x_j|_{rx} + \partial q_i/\partial x_j|_{rx}}{r^{m-1}} \right) = \lim_{r\to\infty} \det \left(\frac{\partial p_i}{\partial x_j}\bigg|_x + \frac{\partial q_i/\partial x_j|_{rx}}{r^{m-1}} \right) = 0,$$

а это противоречит равенству $k = 3(m-1)$.

Ввиду компактности единичной сферы существует некоторая константа C такая, что при $|x| = 1$

$$\left(\sum_{i,j=1}^{3} \left| \frac{\partial p_i}{\partial x_j} \right|^2 \right)^{1/2} \leqslant C |J_p|^{1/3}. \tag{5}$$

Так как справа и слева в (5) стоят однородные функции степени $m-1$, то это неравенство справедливо всюду в $\mathbf{R}^3$, т. е. p квазиконформно.

По лемме 1 отображение p гомеоморфно, но, согласно результату [9] Г. Леви, якобиан гармонического гомеоморфизма в $\mathbf{R}^3$ не обращается в 0. Это возможно лишь тогда, когда степень однородности J_p равна нулю, т. е. $m = 1$. Теорема доказана.

Замечание. Все приведенные результаты, кроме теоремы Леви [9], справедливы и для n-мерного $(n \geqslant 3)$ случая. Вопрос о необращении в нуль якобиана гармонического гомеоморфизма в $\mathbf{R}^n$ $(n > 3)$ остается открытым.

Автор выражает благодарность Б. В. Шабату за постановку вопроса и большую помощь в работе.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
7 III 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Р. Том, Сборн. Особенности дифференцируемых отображений, 1968. [2] Ю. Г. Решетняк, Сибирск. матем. журн., 9, № 2 (1968). [3] Ю. Г. Решетняк, Там же, 8, № 3 (1967). [4] В. А. Зорич, Матем. сборн., 74 (116), № 3 (1967). [5] Б. В. Шабат, ДАН, 132, № 5 (1960). [6] Ch. Loewner, J. Math. Mech., 8 (1959). [7] P. Caraman, Homeomorfisme cvasiconforme n-dimensionale, Bucuresti, 1968. [8] F. W. Gehring, Trans. Am. Math. Soc., 101, № 3 (1961). [9] H. Levy, Ann. Math., 88, № 3 (1968).