

М. Е. ФУРМАН

**О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА БЫСТРОГО ПЕРЕМНОЖЕНИЯ МАТРИЦ
В ЗАДАЧЕ НАХОЖДЕНИЯ ТРАНЗИТИВНОГО ЗАМЫКАНИЯ ГРАФА**

(Представлено академиком И. Г. Петровским 10 III 1970)

Данный алгоритм позволяет находить транзитивное замыкание графа за $cn^{\log_2 n} \lg n$ * действий, что асимптотически лучше ранее известной оценки $cn^3 / \lg n$ (1).

Лемма. Логические матрицы $n \times n$ можно перемножить за $cn^{\log_2 n}$ действий.

Действительно, будем считать эти матрицы арифметическими, состоящими из нулей и единиц, и перемножим их по методу (2) за $cn^{\log_2 n}$ действий. Затем, за cn^2 действий просмотрим элементы произведения, и каждый отличный от нуля элемент заменим единицей. Очевидно, что при этом мы получим логическое произведение матриц.

Теорема. Транзитивное замыкание графа порядка n можно получить за $cn^{\log_2 n} \lg n$ действий.

Доказательство. Пусть A_0 — матрица соответствия данного графа. Матрицу соответствия транзитивного замыкания будем получать следующими итерациями: $A_{n+1} = A_n \vee A_n^2$.

На одну итерацию потребуется $cn^{\log_2 n}$ действий, а итераций потребуется $\lg K$, где K — максимальное расстояние между двумя вершинами (диаметр исходного графа), так как каждая итерация уменьшает диаметр графа вдвое. Но $K \leq n$; таким образом, нам потребовалось менее чем $cn^{\log_2 n} \lg n$ действий. Этот метод выгоднее метода (1), значения n порядка 10^{19} **. Однако, если будут получены лучшие оценки для числа действий, необходимого для перемножения матриц, то данный алгоритм станет выгодным и для реальных n .

Московский государственный педагогический институт
им. В. И. Ленина

Поступило
4 III 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ В. Л. Арлазаров, Е. А. Диниц, М. А. Кронрод, И. А. Фараджев. ДАН, 194, № 3 (1970). V. Strassen, Numerische Math., 13, № 4, 354 (1969).

* $\lg x$ — ближайшее сверху целое к $\log_2 x$; n — число вершин графа.

** При равных константах, входящих множителями в оценку числа действий.