Доклады Академии наук СССР
1970. Том 195, № 1

УДК 517.948:513.88

МАТЕМАТИКА

Я. Д. МАМЕДОВ, В. М. МУСАЕВ

К ТЕОРИИ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 4 V 1970)

Пусть E — некоторое банахово пространство. Через E_T обозначим пространство непрерывных абстрактных функций $x(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$ со значениями из E и с нормой

$$\|x(t)\| = \max_{0 \leqslant t \leqslant T} \|x(t)\|_E.$$

Через S и S_T обозначим шары соответственно из E и E_T с центрами в точке $x^{(0)}$ и радиусами r.

Пусть $F(t, x, y_t)$ — нелинейный оператор Вольтерра при фиксированном x (т. е. при фиксированном t он действует из E_t в E), а при фиксированном t и y_t — «обычный» нелинейный оператор (т. е. оператор, действующий в E).

Статья посвящена исследованию решений уравнения

$$x(t) = x^{(0)} + F[t, x(t), x_t] \tag{1}$$

в E_T.

Примером уравнения (1) может служить, например, следующее интегральное уравнение типа Урысона — Вольтерра

$$x(t, s) = \Phi\left\{t, s; \int_0^T K_1[t, s, \sigma, x(t, \sigma)]\, d\sigma, \int_0^t K_2[t, s; \tau, x(\tau, s)]\, d\tau\right\}. \tag{2}$$

В случае, когда $F(t, x, y_t)$ не зависит от x, уравнение (1) впервые исследовано А. Н. Тихоновым [1]. (Дальнейшие исследования таких уравнений рассматривались, например, в работах [2–5].) А в случае, когда оператор $F(t, x, y_t)$ зависит лишь от x, уравнение (1) есть «обычное» нелинейное операторное уравнение, для решения которого известны довольно много принципов неподвижных точек и приближенных методов. Уравнение (1) в общем виде изучается впервые.

Через $\varphi(t, u_t)$ обозначим скалярный оператор Вольтерра, действующий из $Ш_T^+$ в $(0, \infty)$ при фиксированном $t \in [0, T]$, где

$$Ш_T^+ = \{0 \leqslant u(t) \in C[0, T];\ \max_{0 \leqslant t \leqslant T} u(t) \leqslant 2r\}.$$

Ниже всюду будем предполагать, что если монотонная, ограниченная последовательность $u^{(n)}(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$ точечно сходится к $u(t)$, то

$$\lim_{n \to \infty} \varphi(t, u_t^{(n)}) = \varphi(t, u_t).$$

1. Сначала предположим, что при любой фиксированной абстрактной функции $\xi(t) \in S_T$ операторное уравнение

$$x(t) = x^{(0)} + F[t, x(t), \xi_t] \tag{3}$$

имеет единственное решение $x(t) \in S_T$ и его можно найти.

Для приближенного решения уравнения (1) последовательные приближения построим следующим образом:

$$x^{(0)}(t) = x^{(0)}, \tag{4}$$

$$x^{(n)}(t) = x^{(0)} + F[t, x^{(n)}(t), x_t^{(n-1)}] \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Теорема 1. *Пусть оператор $F(t, x, y_t)$ определен на топологическом произведении $R = [0, T] \times S \times S_T$, непрерывен, ограничен и удовлетворяет условию*

$$\|F(t, \tilde{x}, \tilde{y}_t) - F(t, x, y_t)\| \leqslant L\|\tilde{x} - x\| + \varphi(t, \|\tilde{y}_t - y_t\|) \quad (0 \leqslant L < 1),$$

где оператор Вольтерра $\varphi(t, u_t)$ $(0 \leqslant t \leqslant T,\ u \in Ш_T{}^+)$ не убывает по второму аргументу, уравнение

$$u(t) = \frac{1}{1-L}\varphi(t, u_t) \tag{5}$$

имеет лишь нулевое решение и

$$M = \max\left\{\max_R \|F(t, x, y_t)\|,\quad \frac{1}{1-L}\max_{0\leqslant t\leqslant T}\varphi(t, 2r)\right\} \leqslant 2r. \tag{6}$$

Тогда существует единственное решение уравнения (1) и оно является пределом последовательных приближений (3), причем скорость сходимости определяется формулой

$$\|x^{(n)}(t) - x(t)\| \leqslant \varepsilon^{(n)}(t),$$

где $\{\varepsilon^{(n)}(t)\}$ определяется из равенства

$$\varepsilon^{(0)}(t) = M,$$

$$\varepsilon^{(n)}(t) = \frac{1}{1-L}\varphi(t, \varepsilon_t^{(n-1)}) \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Теперь для приближенного решения уравнения (1) приближения построим следующим образом:

$$x^{(n)}(t) = x^{(0)} \quad (0 \leqslant t \leqslant T/n),$$

$$x^{(n)}(t) = x^{(0)} + F[t - T/n, x^{(n)}(t), x_{t-T/n}^{(n)}] \quad (T/n \leqslant t \leqslant T), \tag{7}$$
$$F[0, x(0), x_0] = 0 \quad (x \in S_T).$$

Теорема 2. *Пусть оператор $F(t, x, y_t)$ определен на топологическом произведении R, непрерывен, ограничен и удовлетворяет условию*

$$\|F(t) + \Delta t, \tilde{x}, \tilde{y}_{t+\Delta t}) - F(t, x, y_t)\| \leqslant C|\Delta t| + L\|x - \tilde{x}\| + \varphi(t, \|\tilde{y}_t - y_t\|),$$
$$(0 \leqslant L < 1, \quad 0 \leqslant t, \quad t + \Delta t \leqslant T),$$

где оператор Вольтерра $\varphi(t, u_t)$ $(0 \leqslant t \leqslant T,\ u \in Ш_T{}^+)$ не убывает по u_t, уравнение (5) имеет лишь нулевое решение и

а) *при любом фиксированном $\delta \in [0, CT/(1-L)]$ уравнение*

$$u(t) = \delta + \frac{1}{1-L}\varphi(t, u_t)$$

имеет единственное решение из $Ш_T{}^+$.

Тогда существует единственное решение уравнения (1) и оно является пределом приближений (7), причем скорость сходимости определяется формулой

$$\|x^{(n)}(t) - x(t) \leqslant \varepsilon^{(n)}(t),$$

где $\varepsilon^{(n)}(t)$ *являются решениями уравнений*

$$u(t) = \frac{CT}{(1-L)n} + \frac{1}{1-L}\varphi(t, u_t).$$

2. Теперь допустим, что мы не можем найти решение уравнения (3), но предположим, что при любой фиксированной абстрактной функции $\xi \in S_T$ уравнение Вольтерра

$$x(t) = x^{(0)} + F(t, \xi(t), x_t) \tag{8}$$

имеет единственное решение $x(t) \in S_T$ и его можно найти.

В этом случае последовательные приближения построим следующим образом:

$$x^{(0)}(t) = x^{(0)},$$

$$x^{(n)}(t) = x^{(0)} + F[t, x^{(n-1)}(t), x_t^{(n)}] \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{9}$$

Теорема 3. *Пусть оператор $F(t, x, y_t)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1 лишь с той разницей, что условие (6) заменяется условием.*

При любой фиксированной функции $\alpha(t) \in Ш_T^+$ скалярное уравнение

$$u(t) = L\alpha(t) + \varphi(t, u_t)$$

имеет единственное решение $u(t) \in Ш_T^+$ и его можно найти.

Тогда уравнение (1) имеет единственное решение и оно является пределом последовательных приближений (9); причем скорость сходимости определяется формулой

$$\|x^{(n)}(t) - x(t)\| \leqslant \varepsilon^{(n)}(t),$$

где $\varepsilon^{(n)}(t)$ являются решениями уравнений

$$\varepsilon^{(0)}(t) = 2rL + \varphi(t, \varepsilon_t^{(0)}),$$

$$\varepsilon^{(n)}(t) = L\varepsilon^{(n-1)}(t) + \varphi(t, \varepsilon_t^{(n)}) \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

3. В предыдущих параграфах мы предполагали, что можем найти решение уравнения (3) или (8). Если это невозможно, то и для нахождения решений этих уравнений можно применить какой-нибудь приближенный метод. Например, в этом случае последовательные приближения для приближенного решения уравнения (1) можно построить равенствами

$$x^{(0)}(t) = x^{(0)}, \tag{10}$$

$$x^{(n)}(t) = x^{(0)} + F[t, x^{(n-1)}(t), x_t^{(n-1)}] \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

или

$$x^{(n)}(t) = x^{(0)} \quad (0 \leqslant t \leqslant T/n), \quad x^{(0)}(t) = x^{(0)},$$

$$x^{(n)}(t) = x^{(0)} + F[t - T/n, x^{(n-1)}(t), x_{t-T/n}^{(n)}] \quad (T/n < t \leqslant T), \tag{11}$$

$$F[0, x(0), x_0] = 0 \quad (x \in S_T).$$

Теорема 4. *Пусть оператор $F(t, x, y_t)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1. Пусть, кроме того, выполнено условие*

$$\max_R \|F(t, x, y_t)\| \leqslant r. \tag{12}$$

Тогда уравнение (1) имеет единственное решение и оно является пределом последовательных приближений (10), причем скорость сходимости определяется по формуле

$$\|x^{(n)}(t) - x(t)\| \leqslant \varepsilon^{(n)}(t),$$

где $\varepsilon^{(n)}(t)$ определяется из равенств

$$\varepsilon^{(0)}(t) = M,$$

$$\varepsilon^{(n)}(t) = L\varepsilon^{(n-1)}(t) + \varphi[t, \varepsilon_t^{(n-1)}] \quad (n = 1, 2, \ldots), \ \varepsilon^{(n)}(t) = M.$$

Теорема 5. *Пусть оператор $F[t, x, y_t]$ удовлетворяет всем условиям теоремы 2 лишь с той разницей, что условие* а) *заменяется условием*

б) *при любом фиксированном $\delta \in [0, CT]$ и при любой фиксированной функции $\alpha(t) \in Ш_T^+$ скалярное уравнение*

$$u(t) = \delta + L\alpha(t) + \varphi(t, u_t)$$

имеет единственное решение $u(t) \in Ш_T^+$ и его можно найти.

Пусть, кроме того, выполнено условие (12).

Тогда уравнение (1) *имеет единственное решение и это решение является пределом последовательных приближений* (11), *причем скорость сходимости определяется по формуле*

$$\|x^{(n)}(t) - x(t)\| \leqslant \varepsilon^{(n)}(t),$$

где $\varepsilon^{(n)}(t)$ являются решениями уравнений

$$\varepsilon^{(0)}(t) = 2rL + \varphi(t, \varepsilon_t^{(0)}) + CT,$$
$$\varepsilon^{(n)}(t) = L\varepsilon^{(n-1)}(t) + CT/n + \varphi(t, \varepsilon_t^{(n)}).$$

Доказательства всех вышеприведенных теорем основаны на теоремах о вольтерровских операторных неравенствах (см., например, ([3])) и проводятся «методом мажорант» ([7]).

4. Заметим, что последовательности $\varepsilon^{(n)}(t)$, фигурирующие в вышеприведенных теоремах, равномерно сходятся к нулю.

Также заметим, что во всех вышеприведенных теоремах можно положить, например,

$$\varphi(t, u_t) \equiv \int_0^t L_0(s)\, u(s)\, ds,$$

где $L_0 = \int_0^t L_0(s)\, ds$ подчинен некоторым условиям. Причем в этом случае можно записать явное выражение для $\varepsilon^{(n)}(t)$.

Наконец, заметим, что полученные общие теоремы по стандартной схеме можно применять к исследованию уравнения (2).

Поступило
7 II 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Н. Тихонов, Бюллетень Моск. унив., № 1, секция А, в. 8 (1938). [2] Я. Д. Мамедов, Сибирск. матем. журн., 5, № 6 (1964). [3] З. М. Кваниш, Тр. семинара по теории дифференц. уравнений с отклоняющимся аргументом, 4, Унив. дружбы народов им. П. Лумумбы, М., 1967. [4] В. М. Мусаев, Кандидатская диссертация, Баку, 1967. [5] З. Б. Цалюк, Тр. семинара по теории дифференц. уравнений с отклоняющимся аргументом, 7, Унив. дружбы народов им. П. Лумумбы, М., 1969. [6] М. А. Красносельский, Я. Д. Мамедов, Научн. докл. высш. школы, сер. физ.-мат. наук, № 2 (1959). [7] Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, Функц. анализ в нормированных пространствах, М., 1969.