

Ю. Б. ТУМАРКИН

О ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫХ ПРОСТРАНСТВАХ С БАЗИСОМ

(Представлено академиком Л. В. Канторозичем 26 V 1970)

1. В настоящее время теория базисных и минимальных систем в пространствах Банаха далеко продвинута и находит широкие применения при изучении топологических свойств пространства (см., например, обзор ⁽¹⁾). В более широких классах отделимых локально выпуклых пространств (л.в.п.) аналогичное исследование базисных систем наталкивается на разнообразные препятствия и, как видно из ряда недавних работ ⁽²⁻⁴⁾, вскрывает интересные линейно-топологические свойства л.в.п. В п.п. 2 и 4 настоящей заметки распространяется теория Джеймса базисов банаховых пространств (см. ⁽⁵⁾, гл. 4, §§ 3—4) на произвольные ω -полные (т. е. секвенциально полные) л.в.п. с базисами. В частности, известная теорема А. Пелчинского ⁽⁵⁾ о B -пространствах, не содержащих c_0 , так же, как и теорема В. Д. Мильмана ⁽⁶⁾, характеризующая пространства l_p ($1 \leq p < \infty$), имеет место в произвольных ω -полных л.в.п. Некоторые из результатов п.п. 2—3 для более узкого класса л.в.п. имеются в ⁽²⁾ и ⁽³⁾. В п. 5 приводится критерий устойчивости базисов в бочечных пространствах.

Ниже через $E(M)$ обозначается замкнутая линейная оболочка множества M , через $B(E)$ — множество всех ограниченных множеств пространства E , и $E_1 \simeq E_2$ означает изоморфизм пространств E_1 и E_2 . Последовательности $\{x_k\}_{k=1}^\infty \subset E_1$ и $\{y_k\}_{k=1}^\infty \subset E_2$ называются эквивалентными, если существует изоморфизм A пространств $E(\{x_k\})$ и $E(\{y_k\})$ такой, что $Ax_k = y_k$.

2. Пусть $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ — базис пространства E с сопряженной системой $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset E^*$, т. е. базис Шаудера. Определим линейные операторы $\{U_n\}_{n=1}^\infty$

формулой $U_n x = \sum_{k=1}^n f_k(x) x_k$ ($n = 1, 2, \dots$) и обозначим $E^\infty = (I - U_n)E$.

Нам потребуется следующий аналог теоремы Банаха — Штейнгауза (см. ⁽⁷⁾, стр. 180): *поточечно ограниченное семейство непрерывных линейных отображений из ω -полного л.в.п. E_1 в произвольное л.в.п. E_2 равномерно ограничено на каждом $M \in B(E_1)$. Непосредственным следствием этого является*

Лемма 1 (см. ⁽⁴⁾). *Если E ω -полно, то семейство $\{U_n\}$ равномерно ограничено на каждом $M \in B(E)$, т. е. $\{U_n M\} \in B(E)$ и $\left\{ \sum_{k=1}^n f_k(x_k) f_k \right\}_{n=1}^\infty \in B(E^*)$ для любого $f \in E^*$.*

Базис пространства E назовем *натягивающим* $*$, если для любых $M \in B(E)$ и $f \in E^*$ $\sup \{|f(x)| : x \in M \cap E^*\} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

Теорема 1. *Пусть E — ω -полное л.в.п. с базисом $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ и сопряженной системой $\{f_k\}_{k=1}^\infty$. Следующие условия эквивалентны:*

- 1) базис $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ натягивающий;
 - 2) система $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ сильно полна в E^* ;
 - 3) $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ — сильный базис в E^* .
- Доказательство.** Очевидно, что из 3) следует 2). Покажем, что из 1) следует 3). Пусть $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ — натягивающий базис, $f \in E^*$ и $M \in B(E)$.

* Наше определение следует классическому определению для пространств Банаха, принадлежащему Джеймсу (см. ⁽⁸⁾, стр. 119). В теореме 1 устанавливается эквивалентность этого определения с используемым в работах ⁽²⁾ и ⁽³⁾.

Положим $\sum_1^n f(x_k) f_k$ и $M_n = \{y: y = x - U_n x, x \in M, k \geq n\}$.
В силу леммы 1 $M_n \in B(E)$ при всех $n = 1, 2, \dots$. Кроме того,
 $\dots \supset M_n \supset M_{n+1} \supset \dots$ и, так как $M_n \subset M_1 \cap E^n$, $\sup \{|(f - \varphi_n)x|:$

$x \in M\} \leq \sup \{|f(x)|: x \in M_n\} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$. Таким образом, ряд $\sum_1^\infty f(x_k) f_k$
сильно сходится к f . Осталось установить, что из 2) следует 1). Если си-
стема $\{f_k\}_1^\infty$ сильно полна в E^* , то для любых $M \in B(E)$ и $f \in E^*$ сущест-
вует последовательность $\varphi_n = \sum_1^n a_{nk} f_k$ такая, что $\sup \{|(f - \varphi_n)x|:$
 $x \in M\} \rightarrow 0$, когда $n \rightarrow \infty$. Поскольку $\sup \{|(f - \varphi_n)x|: x \in M\} \geq$
 $\geq \sup \{|(f - \varphi_n)x|: x \in M \cap E^n\} = \sup \{|f(x)|: x \in M \cap E^n\}$, то базис
 $\{x_k\}$ натягивающий.

Базис $\{x_k\}_1^\infty$ пространства E называется ограничено полным,
если из ограниченности частичных сумм $\{y_n = \sum_1^n a_{nk} x_k\}$ следует $y_n \rightarrow$
 $\rightarrow x \in E$ при $n \rightarrow \infty$.

Заметим, что если E ω -полно, а $\{f_k\}_1^\infty$ — ограничено полный базис в
 $E((f_k)_1^\infty)$, то $\{x_k\}_1^\infty$ — натягивающий базис в E^* . Действительно, легко
видеть, что $\{f_k\}_1^\infty$ — сильный базис во всем E^* и, следовательно, $\{x_k\}_1^\infty$ —
натягивающий базис.

Теорема 2. Базис ω -полного л.в.п. E является одновременно натяги-
вающим и ограничено полным тогда и только тогда, когда E полуреф-
лексивно**.

Доказательство. Пусть E полурефлексивно. В силу теоремы
Хана — Банаха $\{f_k\}$ — полная в E^* система, т. е. $\{x_k\}$ — натягиваю-
щий базис. Пусть последовательность чисел $\{a_k\}_1^\infty$ такова, что
 $\{y_n = \sum_1^n a_k x_k\}_{n=1}^\infty \in B(E)$. Множество $S = \{y_p - y_q\}_{p>q=1}^\infty \in B(E)$. Для лю-
бого $f \in E^*$ и $n \geq m$ $|f(y_n - y_m)| \leq \sup \{|f(x)|: x \in S \cap E^m\} \rightarrow 0$,
 $m \rightarrow \infty$, так как $y_n - y_m \in S \cap E^m$, а базис $\{x_k\}_1^\infty$ натягивающий. Полу-
рефлексивное пространство слабо ω -полно ((¹), стр. 239), следовательно,
 $y_n \rightarrow x_0 \in E$ (слабо). Тогда $f_k(x_0) = a_k$ и $\sum_1^\infty a_k x_k = \sum_1^\infty f_k(x_0) x_k = x_0$.

В обратную сторону доказательство проводится так же, как в (²).

3. Нам потребуется следующая

Лемма 2. Пусть E_1 — бочечное пространство с базисом $\{x_k\}_1^\infty$ и со-
пряженной системой $\{f_k\}_1^\infty$, а пространство E_2 ω -полно. Если $\{y_k\}_1^\infty \subset E_2$
и $\{\sum_1^n f_k(x) y_k\}_{n=1}^\infty \in B(E_2)$ для всех $x \in E_1$, то ряд $\sum_1^\infty f_k(x) y_k$ сходится
при всех $x \in E_1$ и линейный оператор $A: E_1 \rightarrow E_2$, где $Ax = \sum_1^\infty f_k(x) y_k$,
непрерывен.

Для доказательства леммы достаточно заметить, что семейство опера-
торов $\{S_n: E_1 \rightarrow E_2\}_1^\infty$, где $S_n x = \sum_1^n f_k(x) y_k$, равносильно непрерывно.

* Двойственное утверждение для бочечных л.в.п. имеется в (³). Без дополни-
тельных ограничений двойственное утверждение не верно.

** Случай бочечных пространств разобран в (²).

Обозначим через E_η пространство E в сильнейшей локально выпуклой топологии η такой, что $B(E_\eta) = B(E)$. С каждым абсолютно выпуклым множеством $M \in B(E)$ мы будем ассоциировать нормированное пространство E_M , $E_M = \{x \in E: \lambda^{-1}x \in M \text{ при некотором } \lambda > 0\}$ и $\|x\|_M = \inf \{\lambda: \lambda^{-1}x \in M\}$. Если E ω -полно, а M замкнуто, то E_M — банахово пространство (см. (7), стр. 158 и 181). Пространство E_η есть индуктивный предел пространства E_M ; при этом семейство $\{M\}$ считается упорядоченным по включению (см. (7), стр. 181).

Теорема 3. Пусть последовательность $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ в ω -полном л.в.п. E такова, что при некотором $p \geq 1$ ряд $\sum a_k x_k$ сходится тогда и только тогда, когда $\sum |a_k|^p < \infty$. Тогда E содержит подпространство E_1 такое, что $(E_1)_\eta \simeq l_p$, и $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ эквивалентно естественному базису l_p после удаления некоторого конечного числа элементов.

Замечание. Для банаховых пространств эта теорема принадлежит В. Д. Мильману (6).

Доказательство теоремы. Обозначим D — единичный шар l_p и $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ — естественный базис в l_p . В силу леммы 2 линейный оператор $A: l_p \rightarrow E$, $Ae_k = x_k$ непрерывен, $AD \in B(E)$ и $\{x_k\}_{k=1}^\infty \subset AD$. Пусть $M \in B(E)$ и пространство E_M , ассоциированное с M , банахово. Если $AD \subset M$, то A непрерывен из $l_p \rightarrow E_M$. Обозначим E_1 замкнутую в E_M линейную оболочку $\{x_k\}$. С помощью леммы 2 нетрудно проверить выполнение условий теоремы В. Д. Мильмана (6), откуда $E_1 \simeq l_p$ и $\{x_k\}$ — естественный базис E_1 после удаления некоторого конечного числа элементов. Значит, $M \cap E_1$ поглощается множеством AD , что доказывает теорему.

Заметим, что при $p > 1$ подпространство E_1 секвенциально замкнуто в E .

4. В классе банаховых пространств многими интересными свойствами выделяются пространства, не содержащие c_0 -подпространств. В первую очередь это связано с теоремой А. Пелчинского (5), которая, как показано в теореме 4, имеет место в произвольном ω -полном л.в.п.

Теорема 4. Если последовательность $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ в ω -полном л.в.п. E такова, что для всех $f \in E^*$ ряд $\sum |f(x_k)|$ сходится, а ряд $\sum x_k$ сильно не сходится, то E содержит замкнутое подпространство $E_1 \simeq c_0$.*

Доказательство. Существует непрерывная на E полунорма $p(x)$ и последовательность чисел $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ такая, что $p\left(\sum_{k=1}^{n_k+1} x_k\right) \geq \varepsilon > 0$.

Полагая $\sum_{k=1}^{n_k+1} x_k = y_k$, для любого $f \in E^*$ получаем $f(y_k) \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$), а $p(y_k) \geq \varepsilon > 0$.[§]

С помощью теоремы Бессаги и Пелчинского (6) нетрудно показать, что из последовательности $\{y_n\}$ можно выделить равномерно минимальную последовательность $\{y_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ с сопряженной $\{f_k\}_1^\infty$ ($f_k(y_{n_j}) = \delta_{kj}$), т. е. такую, что $|f_k(x)| \leq \delta p(x)$ для некоторого $\delta > 0$ при всех $x \in E(\{y_{n_k}\}_{k=1}^\infty)_\infty$. Если $f \in E^*$ и последовательность чисел $a_k \rightarrow 0$, то $\sum |f(a_k y_{n_k})| < \infty$; значит, $\left\{\sum_{k=1}^m a_k y_{n_k}\right\}_{m=1}^\infty \in B(E)$.

Так как E ω -полно, то, в силу леммы 2, существует $C > 0$ такое, что

* Как нам стало известно, одновременно этот факт получен Д. Б. Димитровым (не опубликовано).

для любой $(a_k) \in c_0 : C \max |a_k| \geq p \left(\sum a_k y_{n_k} \right) \geq \frac{1}{\delta} \max |a_k|$. Итак, линейный оператор $A : c_0 \rightarrow E$, определенный на естественном базисе $\{e_k\}$ пространства c_0 формулой $Ae_k = y_{n_k}$ ($k = 1, 2, \dots$), непрерывен, распространяется на все c_0 и на своей области значений E_1 имеет непрерывный обратный. Так как c_0 — полное пространство, то E_1 замкнуто в E и $E_1 = E(\{y_{n_k}\}_{k=1}^\infty) \simeq c_0$.

Следствие. Если безусловный базис ω -полного пространства E не является ограниченно полным, то E содержит c_0 .

Для бочечных пространств это следствие и теоремы 5 и 6 установлены в (*). Однако для бочечных пространств не требуется переходить к η -топологии, как это сделано в нижеследующих теоремах. Для произвольных л.в.п. такой переход уже необходим.

Теорема 5. Если безусловный базис ω -полного пространства E не натягивающий, то E содержит подпространство E_1 такое, что $E_{1n} \simeq l_1$.

Доказательство близко к доказательству теоремы 4, но использует также теорему 3 при $p = 1$ и лемму 1.

Объединяя результаты теорем 4 и 5, получаем:

Теорема 6. Если ω -полное л.в.п. E с безусловным базисом не полурефлексивно, то оно содержит подпространство E_1 такое, что либо $E_1 \simeq c_0$, либо $E_{1n} \simeq l_1$.

Замечание. Во всех приведенных выше результатах (кроме леммы 2) можно ослабить требование ω -полноты пространства E , требуя только его локальную полноту *. Утверждение леммы 2 остается справедливым, если E_1 банахово, а E_2 локально полно.

5. В заключение приведем без доказательства одну теорему об устойчивости базиса Шаудера в бочечном пространстве, аналогичную критерию В. Д. Мильмана [19] для базисов банаховых пространств.

Теорема 7. Пусть $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ — базис Шаудера в ω -полном бочечном пространстве E с сопряженной системой $\{f_k\}_{k=1}^\infty$. Если ряд $\sum_{k=1}^\infty e_k f_k$ сходится слабо* безусловно в E^* , то для любого $M \in B(E)$ существует такое $\delta_0 > 0$, что при всех $\delta < \delta_0$ и $\{y_k\}_{k=1}^\infty \subset M$ последовательность $\{x_k + \delta e_k y_k\}_{k=1}^\infty$ есть базис E , эквивалентный $\{x_k\}_{k=1}^\infty$. Обратно, если для любого $M \in B(E)$ существует $\delta_0 > 0$ с указанными выше свойствами, то ряд $\sum_{k=1}^\infty e_k f_k$ слабо* безусловно сходится в E^* .

Автор пользуется случаем выразить свою благодарность В. Д. Мильману за руководство работой.

Поступило
19 V 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ В. Д. Мильман, УМН, 25, № 3, 113 (1970). ² J. R. Retherford, Math. Ann., 164, 280 (1966). ³ L. J. Weill, Pacific J. Math., 29, № 2 (1969). ⁴ В. Д. Мильман, Ю. Б. Тумаркин, ДАН, 184, № 2, 278 (1969). ⁵ Pełczyński, Bull. Akad. Polon. Sci., 5, № 8, 797 (1957). ⁶ В. Д. Мильман, ДАН, 162, № 1, 269 (1965). ⁷ Н. Бурбаки, Топологические векторные пространства, ИЛ, 1959. ⁸ М. Дэи, Нормированные линейные пространства, ИЛ, 1961. ⁹ C. Bessaga, A. Pełczyński, Studia Math., 17, 151 (1958). ¹⁰ В. Д. Мильман, Сибирск. матем. журн., 6, № 2, 398 (1965).

* Пространство E называется локально полным, если каждое $M \in B(E)$ содержится в некотором $N \in B(E)$ таком, что ассоциированное с N пространство E_N банахово.