Доклады Академии наук СССР
1970. Том 195, № 1

УДК 519.44 *МАТЕМАТИКА*

Л. А. ШЕМЕТКОВ

О СУЩЕСТВОВАНИИ П-ДОПОЛНЕНИЙ К НОРМАЛЬНЫМ ПОДГРУППАМ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

(Представлено академиком В. М. Глушковым 6 IV 1970)

В обзорном докладе на Эдинбургском математическом конгрессе [1] Виландт обратил внимание на важность исключения условия коммутативности нормальной подгруппы в следующей теореме Гашюца [2]: *нормальная абелева подгруппа K группы G обладает дополнением в G, если для любого простого p существует дополнение к $G_p \cap K$ в G_p.* В настоящей работе, продолжая наши исследования по теории дополнений [3], мы получаем решение этого вопроса (теорема 2).

Мы рассматриваем только конечные группы. Обозначения: Π — некоторое множество простых чисел; G — конечная группа порядка $|G|$; $O^{\Pi}(G)$ — подгруппа группы G, порожденная всеми теми элементами из G, порядки которых не делятся на числа из Π; G_p — одна из силовских p-подгрупп группы G, p — простое.

Скажем, что подгруппа K группы G обладает Π-дополнением H в G, если $HK = G$ и $|H \cap K|$ не делится на числа из Π; подгруппу H с этим *свойством будем называть* Π-дополнением к (для) K в G. Если Π — множество всех простых чисел, то Π-дополнение превращается в обычное дополнение.

Теорема 1. *Нормальная подгруппа K группы G обладает* Π*-дополнением в G, если при любом $p \in \Pi$ подгруппа $G_p \cap K$ абелева и дополняема в G_p.*

Прежде чем приступить к доказательству теоремы 1, отметим некоторые ее приложения.

Теорема 2. *Нормальная подгруппа K группы G обладает дополнением в G, если для любого простого делителя p индекса $|G: K|$ подгруппа $G_p \cap K$ абелева и дополняема в G_p.*

Доказательство. Пусть Π — множество всех простых делителей индекса $|G: K|$ подгруппы K. По теореме 1, существует Π-дополнение H к подгрупке K в G. Так как $|H \cap K|$ не делится на числа из Π, а $H / H \cap K$ является Π-группой, то существует дополнение к $H \cap K$ в H, являющееся искомым дополнением для K.

Теорема 2 содержит в себе как теорему Гашюца, как и теорему Шура — Цассенхауза о существовании дополнения к холловской нормальной подгруппе. Следующая теорема также обобщает результат Гашюца.

Теорема 3. *Нормальная подгруппа K группы G обладает дополнением в G, если при любом простом p силовская p-подгруппа из K абелева и дополняема в ее содержащей силовской p-подгруппе из G.*

Теорема 4. *Нормальная подгруппа K группы G обладает* Π*-дополнением в G, если при любом $p \in \Pi$ силовская p-подгруппа из K абелева и $O^p(K) = K$.*

Доказательство. Пусть P — силовская p-подгруппа группы G, $p \in \Pi$. Согласно одной теореме Гашюца ([5], стр. 426), $P \cap K$ обладает дополнением в P. Остается применить теорему 1.

При $K = O^{\Pi}(G)$ из теоремы 4 получается результат, дающий ответ на вопрос, поставленный в [3] (см. также [4], задача 3.59).

Теорема 5. *Если при любом $p \in \Pi$ силовская p-подгруппа из $O^{\Pi}(G)$ абелева, то $O^{\Pi}(G)$ обладает дополнением в G.*

Расширением группы G называют группу Γ, содержащую нормальную подгруппу N, изоморфную G. Расширение Γ расщепляемо, если N имеет дополнение в Γ. Если Γ / N есть Π-группа, то Γ называется расширением G с помощью Π-группы.

Теорема 6. *Пусть группа G совпадает со своим коммутантом и имеет абелеву силовскую p-подгруппу для любого $p \in \Pi$. Тогда любое расширение группы G с помощью Π-группы расщепляемо.*

Приступим к доказательству теоремы 1. Предположим, что существуют группы, для которых теорема 1 не выполняется. Выберем среди них группу G, имеющую наименьший порядок. Таким образом, найдется такое множество Π простых чисел и такая нормальная подгруппа K группы G, что не существует ни одного Π-дополнения для K в G. Множество Π не пусто, так как в случае пустого Π искомым Π-дополнением может служить сама G. По этой же причине Π содержит по крайней мере один простой делитель порядка K. Для удобства будем считать, что каждое число из Π делит порядок G.

Возьмем теперь такое подмножество ω множества Π, для которого выполняются следующие условия: 1) не существует ни одного ω-дополнения к подгруппе K в G; 2) подгруппа K обладает ω_1-дополнением в G для любого нетривиального подмножества ω_1 множества ω. Множество ω, очевидно, не пусто и содержит по крайней мере один простой делитель $|K|$. Пусть p — некоторый элемент из ω, делящий $|K|$. Обозначим через τ множество, полученное из ω удалением элемента p. Тогда K обладает τ-дополнением H в группе G.

Так как $HK = G$, то в H найдется подгруппа M такая, что $MK = G$, но $M_1K \neq G$ для любой нетривиальной подгруппы M_1 из M (такую подгруппу M мы назвали в работе [3] добавлением к K в G). Нетрудно заметить, что $M \cap K$ лежит в подгруппе Фраттини группы M, а потому нильпотентна. Так как $M \cap K$ входит в $H \cap K$, то $|M \cap K|$ не делится на числа из τ, т. е. M является τ-дополнением к K в G. Заметим еще, что p делит $|M \cap K|$, так как K не обладает ω-дополнениями.

В дальнейшем изложении M_p обозначает некоторую (фиксированную) силовскую p-подгруппу из M, а G_p — ту из силовских p-подгрупп группы G, которая содержит M_p. Очевидно, $P = G_p \cap K$ является силовской p-подгруппой в K. Кроме того, $G_p = M_pP$, так как $|MK: M_pP|$ не делится на p. Обозначим через P_1 пересечение $M_p \cap (M \cap K) = M_p \cap K = M_p \cap G_p \cap K = M_p \cap P$. Ясно, что P_1 — силовская p-подгруппа из $M \cap K$. Порядок $M \cap K$ делится на p, поэтому P_1 отлична от единицы. Рассмотрим нормализатор N подгруппы P_1 в группе G. Будем различать два случая.

Первый случай. $N \neq G$. Подгруппа N содержит M, так как $M \cap K$ нильпотентна и нормальна в M. Так как P по условию абелева, то и P входит в N. Таким образом, $G_p = M_pP$ входит в N, причем P, являясь силовской в K и в $N \cap K$, по условию обладает дополнением в G_p. Пусть $q \in \omega$, $q \neq p$. Возьмем силовскую q-подгруппу N_q из N, содержащую силовскую q-подгруппу M_q из M. Тогда $N_q = M_qQ$, где $Q = N_q \cap K = N_q \cap (N \cap K)$ — силовская q-подгруппа из $N \cap K$. Пересечение $M_q \cap Q$ равно единице, так как $M_q \cap Q$ содержится в подгруппе $M \cap K$, порядок которой не делится на q. Итак, мы видим, что для N, $N \cap K$ и множества ω все условия выполняются. Поэтому, ввиду $|N| < |G|$, $N \cap K$ обладает ω-дополнением S в N. Из $S(N \cap K) = N$ следует $SK = G$, так как $MK = G$ и $N \supseteq M$. Порядок $S \cap K$ не делится на числа из ω, так как $S \cap (N \cap K) = (S \cap K) \cap N = S \cap K$. Следовательно, S — ω-дополнение к K в G. Пришли к противоречию.

Второй случай. $N = G$, т. е. подгруппа P_1 является нормальной в G. Обозначим через R произведение всех тех нормальных подгрупп группы K, каждая из которых не имеет композиционных факторов порядка p. Очевидно, подгруппа R является характеристикой в K и также не имеет композиционных факторов порядка p. Так как силовская p-подгруппа P из K по условию абелева, то применяя теорему 3.3 работы ([6]) и теорему Ф. Холла и Г. Хигмэна (([5]), стр. 691), видим, что PR / R является нормальной силовской p-подгруппой группы K / R. По условию $G_p = P\overline{P}$, $P \cap \overline{P} = 1$. Так как $G_p \cap R = P \cap R$ есть силовская подгруппа в R, то $\overline{P} \cap R = 1$, а значит, $PR / R \cap \overline{P}R / R = R / R$. Таким образом, $\overline{P}R / R$ является дополнением к PR / R в G_pR / R. По теореме Гашюца (([5]), стр. 121), существует дополнение U / R к подгруппе PR / R в группе MPR / R.

Пусть $q \in \omega$, $q \neq p$. Так как $|M \cap PR|$ не делится на q, то силовская q-подгруппа Q из MPR представима в виде $Q = M_qQ_1$, где Q_1 — силовская q-подгруппа из R, пересекающаяся с M_q по единице. Но силовские q-подгруппы из MPR и U имеют одинаковые порядки, а значит, $Q^x \subseteq U$ для некоторого $x \in MPR$. Таким образом, силовская q-подгруппа из R имеет дополнение в ее содержащей силовской q-подгруппе из U. Далее, $O^p(R) = R$, так как R не имеет по построению композиционных факторов порядка p. Поэтому по теореме Гашюца (([2]), стр. 426) силовская p-подгруппа из R имеет дополнение в ее содержащей силовской p-подгруппе из U. Итак, условие теоремы для множества ω, группы U и ее нормальной подгруппы R выполняются. Так как $|U| < |G|$, то для U теорема верна. Значит, R обладает ω-дополнением L в группе U. Подгруппа L будет ω-дополнением к K в G. Действительно, из трех равенств $LR = U$, $UPR = MPR$, $MK = G$ вытекает $LK = G$. Кроме того нетрудно заметить, что при любом $q \in \omega$ порядок силовской q-подгруппы из L равен порядку силовской q-подгруппы фактор-группы G / K. Поэтому $|L \cap K|$ не делится на числа из ω. Снова пришли к противоречию.

Теорема 1 доказана.

Гомельская лаборатория
Института математики
Академии наук БССР

Поступило
3 III 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Международн. матем. конгресс в Эдинбурге 1958 г., (обзорные доклады), М., 1962. [2] W. Gaschütz, J. reine und angew. Math., 190, 93 (1952). [3] Л. А. Шеметков, ДАН, 178, № 3, 559 (1968). [4] Коуровская тетрадь (нерешенные задачи теории групп), Новосибирск, 1969. [5] B. Huppert, Endliche Gruppen. I, Berlin — Heidelberg — N. Y., 1967. [6] B. Huppert, Acta scient. math. Szeged, 22, № 1—2, 46 (1961).