

УДК 517.43+513.881

Э. АБДУКАДЫРОВ

# О ФУНКЦИИ ГРИНА УРАВНЕНИЯ ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ С ОПЕРАТОРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 21 IV 1970)

1. Пусть  $H$  — сепарабельное пространство Гильберта. Рассмотрим множество всех измеримых по Бохнеру функций  $f(x)$  ( $-\infty < x < \infty$ ) со значениями из  $H$ , для которых 
$$\int_{-\infty}^{\infty} \|f(x)\|_H^2 dx < \infty.$$
 Это множество функций образует новое гильбертово пространство  $H_1$  (также сепарабельное), если скалярное произведение в нем определить равенством

$$(f(x), g(x))_{H_1} = \int_{-\infty}^{\infty} (f(x), g(x))_H dx.$$

Пусть  $P(x)$  и  $Q(x)$  ( $-\infty < x < \infty$ ) — семейства операторов в  $H$ . Рассмотрим в пространстве  $H_1$  дифференциальное выражение

$$l(y) = -(P(x)y')' + Q(x)y, \quad (1)$$

определенное на некотором множестве функций  $D \subset H_1$  (производные понимаются в сильном смысле).

Можно показать, что при некоторых ограничениях на семействе операторов  $P(x)$  и  $Q(x)$  дифференциальное выражение  $l$  может быть продолжено до самосопряженного оператора  $\bar{L}$  в  $H_1$ .

В работе Б. М. Левитана <sup>(1)</sup> была исследована операторная функция Грина оператора  $\bar{L}$  при  $P(x) \equiv E$ ,  $E$  — единичный оператор в пространстве  $H$ . Основной целью настоящей заметки является изучение операторной функции Грина оператора  $\bar{L}$  при  $P(x) \neq E$ .

2. Перечислим основные ограничения на операторы  $P(x)$  и  $Q(x)$ , при которых нам удалось изучить операторную функцию Грина оператора  $\bar{L}$ :

1) Для всех  $x$  ( $-\infty < x < \infty$ ) и всех  $f \in H$

$$m(f, f)_H \leq (P(x)f, f)_H \leq M(f, f)_H,$$

где  $m$  и  $M$  — постоянные положительные числа.

2) Операторная функция  $P(x)$  ( $-\infty < x < \infty$ ) всюду равномерно дифференцируема.

3) Операторы  $Q(x)$  для почти всех  $x$  самосопряжены в  $H$ , причем для всех (почти всех)  $x$  существует общее всюду плотное в  $H$  множество  $D\{Q(x)\}$ , на котором  $Q(x)$  определены и симметричны\*.

4) Операторы  $Q(x)$  равномерно снизу ограничены, т. е. существует такое постоянное число  $d < \infty$ , что для почти всех  $x$  и всех  $f \in D\{Q(x)\}$

$$(Q(x)f, f)_H \geq -d(f, f)_H.$$

5) Существуют постоянные числа  $A > 0$ ,  $0 < a < 3/2$  такие, что для всех  $x$  и  $|x - \xi| \leq 1$  справедливо неравенство

$$\|[Q(\xi) - Q(x)]Q^{-a}(x)\|_H < A|x - \xi|.$$

6) Для  $|x - \xi| > 1$

$$\|K(\xi) \exp\{-1/2|x - \xi|\omega\}\|_H < B,$$

где  $\omega = \{K(x) + \mu P^{-1}(x)\}^{1/2}$ ,  $K(x) = P^{-1/2}(x)Q(x)P^{-1/2}(x)$ ,  $B$  — постоянное число.

\* Таким образом, мы допускаем, что операторы  $Q(x)$  могут быть неограниченными в  $H$ .



7) Для всех  $x$  и  $\xi$  из  $(-\infty, \infty)$

$$\|Q(x)P^{\pm 1/2}(x)Q^{-1}(x)\|_H < B_1, \quad \|Q(\xi)P^{-1/2}(x)P^{1/2}(\xi)Q^{-1}(\xi)\|_H < B_2,$$

где  $B_1, B_2$  — постоянные числа.

Предположим, что  $Q(x)$  для почти всех  $x$  является обратным к вполне непрерывному оператору. Тогда  $K(x)$  тоже для почти всех  $x$  является обратным к вполне непрерывному оператору. Обозначим через  $\beta_1(x) \leq \beta_2(x) \leq \beta_3(x) \leq \dots$  собственные значения оператора  $K(x)$ , относительно которых мы будем предполагать, что они измеримые функции. Не нарушая общности, можно предполагать, что  $\beta_1(x) \geq 1$ .

8) Ряд  $\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i^{-1/2}(x)$  сходится и его сумма  $F(x)$  есть функция класса  $L_1(-\infty, \infty)$ , т. е.  $\int_{-\infty}^{\infty} F(x) dx < \infty$ .

3. При выполнении условий 1), 3) и 4) существует самосопряженное расширение по Фридрихсону оператора  $l$ . Обозначим его через  $L$ . Оператор  $L$  в  $H_1$  снизу ограничен тем же числом  $d$ . Поэтому, если  $\mu > d$ , то существует обратный оператор  $(L + \mu E)^{-1} = R_\mu$ . Имеет место следующая

Теорема 1. Если выполнены условия 1)–8), то оператор  $R_\mu$  для всех  $\mu > d$  является интегральным оператором с операторным ядром  $G(x, \eta; \mu)$ , которое есть операторная функция в  $H$ , зависящая от двух переменных  $x$  и  $\eta$  ( $-\infty < x, \eta < \infty$ ) и параметра  $\mu$ , и удовлетворяет следующим условиям:

а)  $G(x, \eta; \mu)$  сильно непрерывна по переменным  $(x, \eta)$ ;

б) существует сильная производная  $\partial G / \partial \eta$ , причем

$$\frac{\partial G}{\partial \eta}(x, x+0; \mu) - \frac{\partial G}{\partial \eta}(x, x-0; \mu) = -P^{-1}(x),$$

равенство понимается в смысле равенства (0.5) работы (1);

$$\text{с) } -(G_\eta' P(\eta))'_\eta + G\{Q(\eta) + \mu E\} = 0,$$

равенство понимается в смысле равенства пункта с) работы (1);

$$\text{д) } G^*(x, \eta; \mu) = G(\eta, x; \mu).$$

Здесь звездочкой обозначен оператор сопряжения в  $H$ .

4. Теорема доказывается по методу работы (1) с использованием некоторых результатов из (2) и нижеследующих лемм.

Положим

$$g(x, \eta; \mu) = {}^{1/2}P^{-1/2}(x)\omega^{-1}e^{-|x-\eta|\omega}P^{-1/2}(x)$$

и рассмотрим интегральное уравнение

$$\begin{aligned} G(x, \eta; \mu) &= g(x, \eta; \mu) - \int_{-\infty}^{\infty} g(x, \xi; \mu) [Q(\xi) - Q(x)] G(\xi, \eta; \mu) d\xi + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} \left[ {}^{1/2}P^{-1/2}(x)\omega \exp(-|x-\xi|\omega) P^{-1/2}(x) (P(\xi) - P(x)) + g'_\xi(x, \xi; \mu) P'(\xi) \right] \times \\ &\times G(\xi, \eta; \mu) d\xi \equiv g(x, \eta; \mu) - NG. \end{aligned} \quad (2)$$

Рассмотрим банаховы пространства  $X_1, X_2, X_3^{(p)}$  ( $p \geq 1$ ),  $X_1^{(s)}, X_2^{(s)}, X_4^{(s)}$  ( $s \geq 0$ ), элементами которых являются операторные функции  $A(x, s)$  в  $H$  ( $-\infty < x, s < \infty$ ) (определения этих пространств даны в работе (1)).

Лемма 1. Если операторные функции  $P(x)$  и  $Q(x)$  удовлетворяют условиям 1)–7), то для достаточно больших  $\mu$  ( $\mu > \mu_0$ ) оператор  $N$  является сжимающим оператором в пространствах  $X_1, X_2, X_1^{(s)}, X_2^{(s)}$  и  $X_4^{(s)}$ .



Во всех рассмотренных выше пространствах Банаха уравнение (2) имеет единственное решение, которое может быть получено с помощью итераций, если только операторная функция  $g(x, \eta; \mu)$  принадлежит соответствующему пространству. Легко проверить, что  $g(x, \eta; \mu) \in X_3 \equiv X_3^{(1)}$ . Поэтому  $G(x, \eta; \mu)$  для достаточно больших  $\mu$  ( $\mu > \mu_0$ ) также принадлежит  $X_3$ , если только операторные функции  $P(x)$  и  $Q(x)$  удовлетворяют условиям 1)–7). Если сверх этих условий имеет еще место условие 8), то  $g(x, \eta; \mu) \in X_2$ , и, следовательно,  $G(x, \eta; \mu)$  для достаточно больших  $\mu$  ( $\mu > \mu_0$ ) также есть элемент пространства  $X_2$ .

**Лемма 2.** Пусть операторные функции  $P(x)$  и  $Q(x)$  удовлетворяют условиям 1), 3), 4), 6) и 7) и условию: для  $|x - \eta| \leq 1$

$$\|Q^{-1/2}(x)Q^{1/2}(\eta)\|_H \leq C,$$

где  $C$  — постоянное число.

Тогда операторная функция  $g(x, \eta; \mu)$  принадлежит пространству  $X_4^{(1/2)}$ , т. е.

$$\sup_{-\infty < x < \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \|g(x, \eta; \mu) Q^{1/2}(\eta)\|_H d\eta < \infty.$$

Если  $Q(x)$  удовлетворяет еще условиям 2), 5), то  $G(x, \eta; \mu)$  для достаточно больших  $\mu > \mu_0$  также принадлежит пространству  $X_4^{(1/2)}$ .

**Лемма 3.** Пусть операторные функции  $P(x)$  и  $Q(x)$  удовлетворяют условиям 1), 3), 4), 6) и 7) и условию: для  $|x - \eta| \leq 1$

$$\|Q^{1/2}(x)Q^{-1/2}(\eta)\|_H \leq C.$$

Тогда операторная функция  $\partial^2 g / \partial \eta^2$  ( $\eta \neq x$ )  $\in X_4^{(-1/2)}$ , т. е.

$$\sup_{-\infty < x < \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\| \frac{\partial^2 g}{\partial \eta^2} Q^{-1/2}(\eta) \right\|_H d\eta < \infty.$$

Пусть теперь  $\mu' \in (d, \mu_0]$ . Рассмотрим интегральное уравнение

$$G(x, \eta; \mu') = G(x, \eta; \mu) + (\mu - \mu') \int_{-\infty}^{\infty} G(x, s; \mu) G(s, \eta; \mu') ds, \quad (3)$$

где  $G(x, s; \mu)$  — построенная выше операторная функция Грина оператора  $L$  для  $\mu > \mu_0$ . В силу предыдущего

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \|G(x, s; \mu)\|_2^2 ds \right\} dx < \infty. \quad (4)$$

Здесь  $\|G(x, s; \mu)\|_2$  — норма Гильберта — Шмидта оператора  $G(x, s; \mu)$  в  $H$  при фиксированных  $(x, s; \mu)$ . В силу (4) (см. (1, 3)) интегральный оператор

$$Af = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, s; \mu) f(s) ds, \quad f(s) \in H_1$$

вполне непрерывен в  $H_1$ . Так как  $\mu - \mu'$  есть резольвентная точка оператора  $A$  (см. (4)), то интегральное уравнение (3) имеет единственное решение  $G(x, \eta; \mu')$ . Разбивая интегральный оператор в (3) на конечномерный и интегральный оператор, норма которого достаточно мала, можно показать, что оператор  $G(x, \eta; \mu')$  равномерно ограничен в  $H$ . В силу свойств операторной функции Грина  $G(x, \eta; \mu)$  можно доказать, что  $G(x, \eta; \mu')$  является (единственной) операторной функцией Грина оператора  $L$  для  $\mu' \in (d, \mu_0)$ .

5. Аналогичные результаты могут быть получены в случае полупрямой  $(0, \infty)$ . Пусть операторные функции  $P(x)$  и  $Q(x)$  определены на полупрямой  $(0, \infty)$  и удовлетворяют условиям 1)–8). Рассмотрим оператор

$$l(y) = -(P(x)y')' + Q(x)y, \quad (0 < x < \infty) \quad (5)$$



и присоединим к нему граничные условия в нуле

$$y'(0) = hy(0), \quad (6)$$

где  $h$  — постоянный самосопряженный оператор в  $H$  (возможно, и неотраженный).

Покажем, как строится аналог функции  $g(x, \eta; \mu)$ . Положим

$$K(x) = P^{-1/2}(x) Q(x) P^{-1/2}(x), \quad \omega = \{K(x) + \mu P^{-1}(x)\}^{1/2}, \\ X(\eta) = P^{-1/2}(x) [\operatorname{ch} \omega \eta + h \omega^{-1} \operatorname{sh} \omega \eta] P^{-1/2}(x) \quad (0 < x, \eta < \infty).$$

Тогда

$$g(x, \eta; \mu) = \begin{cases} X(\eta) P^{1/2}(x) (\omega + h)^{-1} e^{-\omega x} P^{-1/2}(x) & \text{при } \eta \leq x, \\ P^{-1/2}(x) e^{-\omega \eta} (\omega + h)^{-1} P^{1/2}(x) X(x) & \text{при } \eta > x. \end{cases}$$

Легко проверить, что функция  $g(x, \eta; \mu)$  удовлетворяет условиям:

$$P(x) \frac{\partial^2 g}{\partial \eta^2} = \{Q(x) + \mu E\} g, \quad \left( \frac{\partial g}{\partial \eta} - hg \right)_{\eta=0} = 0, \\ \frac{\partial g}{\partial \eta} \Big|_{\eta=x+0} - \frac{\partial g}{\partial \eta} \Big|_{\eta=x-0} = -P^{-1}(x).$$

Построив функцию  $g(x, \eta; \mu)$ , можно составить интегральное уравнение, аналогичное уравнению (2) (пределами интегрирования будут теперь 0 и  $\infty$ ), и доказать затем существование операторной функции  $G(x, \eta; \mu)$ , которая является ядром оператора  $(L + \mu E)^{-1}$ , где  $L$  — расширение по Фридрихсу оператора (5) + (6).

Аналогично исследуется операторная функция Грина на конечном интервале. Отметим, что задача подобного типа была рассмотрена в работах (4, 5).

6. В качестве примера рассмотрим задачу на собственные значения для оператора вида

$$-\sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} u(x) \right) + q(x) u(x) = \lambda u(x), \quad (7)$$

$$u|_{\Gamma} = 0 \quad (8)$$

в цилиндрической области

$$\Pi = \Pi((x_2, x_3) \in \Omega; -\infty < x_1 < \infty), \quad x = (x_1, x_2, x_3),$$

$\Omega$  — плоская односвязная область,  $(x_2, x_3)$  — плоскости,  $\Gamma$  — граница цилиндра  $\Pi$ . Коэффициенты  $a_i(x)$  — положительные, равномерно ограниченные функции на  $\Pi$ ,  $q(x) \rightarrow +\infty$  при  $|x| \rightarrow +\infty$  (другим методом, для более общих областей, аналогичная задача при  $a_i(x) \equiv 1$  ( $i = 1, 2, 3$ ) изучена в работе А. Г. Рамма (6)). Равенство (7) можно переписать в операторной форме (в данном случае  $H \equiv L_2(\Omega)$ ,  $H_1 \equiv L_2(\Omega, -\infty < x_1 < \infty)$ )

$$-\frac{d}{dx_1} \left( P(x_1) \frac{du}{dx_1} \right) + \{Q(x_1) - \lambda E\} u = 0,$$

где

$$Q(x_1) u \equiv -\frac{\partial}{\partial x_2} \left( a_2(x) \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) - \frac{\partial}{\partial x_3} \left( a_3(x) \frac{\partial u}{\partial x_3} \right) + q(x) u, \quad P(x_1) \equiv a_1(x) E.$$

Применяя изложенные выше результаты к этому случаю, можно изучить свойства функции Грина задачи (7) + (8) и вывести асимптотическую формулу для числа собственных значений этой задачи.

В заключение выражаю глубокую благодарность Б. М. Левитану за постановку задачи и большое внимание к работе.

Московский государственный университет  
им. М. В. Ломоносова

Поступило  
17 IV 1970

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> Б. М. Левитан, Матем. сборн. 76, № 2, 239 (1968). <sup>2</sup> С. Г. Крейн, Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве, «Наука», 1967. <sup>3</sup> Г. И. Лаптев, Дифференциальные уравнения, 2, № 9, 1151 (1966). <sup>4</sup> Г. И. Лаптев, Литовск. матем. сборн., 8, № 1, 87 (1968). <sup>5</sup> С. Г. Крейн, Г. И. Лаптев, Дифференциальные уравнения, 2, № 7, 919 (1966). <sup>6</sup> А. Г. Рамма, ДАН, 183, № 4, 780 (1968).