Доклады Академии наук СССР
1970. Том 195, № 3

УДК 519.3

МАТЕМАТИКА

Ф. П. ВАСИЛЬЕВ, Р. П. ИВАНОВ (Болгария)

НЕКОТОРЫЕ ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ПРИ НАЛИЧИИ ФАЗОВЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 15 IV 1970)

1. Постановка задачи. Пусть U — заданное подмножество топологического линейного пространства Z, элементы $u \in U$ будем называть управлением. Пусть t — время, t_0 — известный начальный момент времени. Пусть при каждом $t \geqslant t_0$ задано множество $\Omega[t_0, t]$ функций $x(\tau)$, определенных при $t_0 \leqslant \tau \leqslant t$ и принимающих свои значения из заданного банахова пространства B, что $\Omega[t_0, t] \subset \Omega[t_0, t']$ при всех $t_0 \leqslant t' < t$. Функцию $x(\tau) \in \Omega[t_0, t]$ назовем возможной траекторией. Пусть при всех $t \geqslant t_0$ задано отображение, ставящее каждому $u \in U$ в соответствие возможную траекторию $x(\tau, u) \in \Omega[t_0, t]$. Пусть $G(t)$, $t \geqslant t_0$ — заданные множества из B и $I_\alpha(x(\tau), u, t)$ $(\alpha \in A$ — известное множество индексов) — функционалы, определенные на топологическом произведении $\Omega[t_0, t] \times U \times [t \geqslant t_0]$. Скажем, что траектория $x(\tau, u) \in \Omega[t_0, t]$ удовлетворяет фазовым ограничениям, если $x(\tau, u) \in G(\tau)$ при $t_0 \leqslant \tau \leqslant t$, $I_\alpha(x(\tau, u), u, t) \leqslant 0$ $(\alpha \in A)$, и такую траекторию назовем допустимой на $t_0 \leqslant \tau \leqslant t$. Подмножество тех $u \in U$, для которых соответствующая траектория $x(\tau, u)$ допустима на $t_0 \leqslant \tau \leqslant t$, обозначим через $U(t)$, множество тех $x \in B$, для которых существует $u \in U(t)$, что $x(t, u) = x$, обозначим через $X(t)$. Наконец, пусть $Y(t)$, $t \geqslant t_0$, заданные множества из B. Задача быстродействия заключается в отыскании таких T^* и $u^* \in U(T^*)$, что $x(T^*, u^*) \in U(T^*)$, причем для других T и $u \in U(T)$, для которых $x(T, u) \in Y(T)$, справедливо неравенство $T \geqslant T^*$. Такой момент T^* и управление $u^* \in U(T^*)$ назовем оптимальными.

Всюду ниже будем предполагать выполненными следующие условия, которые назовем условиями А: 1) множество U выпукло и бикомпактно в топологии пространства Z; 2) $x(\tau, \alpha u + (1-\alpha)v) \equiv \alpha x(\tau, u) + (1-\alpha)x(\tau, v)$, $t_0 \leqslant \tau \leqslant t$ при всех $u, v \in U$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ и $t \geqslant t_0$; 3) для любой сети $\{u_\lambda\} \subset U$, сходящейся к u в Z ((1), стр. 29), сеть $\{x(\tau, u_\lambda)\} \in B$ сходится к $x(\tau, u)$ в слабой топологии B при всех $\tau \geqslant t_0$; 4) множества $G(t)$, $t \geqslant t_0$ выпуклы и замкнуты в B; 5) функционалы $J_\alpha(x(\tau), u, t)$ выпуклы по совокупности $(x(\tau), u) \in \Omega[t_0, t] \times U$ и $J_\alpha(x(\tau, u), u, t)$ полунепрерывны снизу по $u \in U$ ((1), стр. 27); 6) множества $Y(t)$, $t \geqslant t_0$ выпуклы и слабо бикомпактны в B при всех $t \geqslant t_0$.

При описании и исследовании сходимости приводимых ниже методов решения задачи быстродействия нам понадобятся более жесткие условия, которые назовем условиями В: 1) выполнены условия А; 2) $\sup\limits_{u \in U} \|x(t + \Delta t, u) - x(t, u)\|_B \to 0$ при $\Delta t \to 0$; 3) для любой последовательности t_k, $t_k \leqslant t$, $t_k \to t$ и любых $x_k \in G(t_k)$, что $\|x - x_k\|_B \to 0$ $(k \to \infty)$, имеет место $x \in G(t)$; 4) если $I_\alpha(x(\tau, u), u, t) \leqslant 0$, то $I_\alpha(x(\tau, u), u, t') \leqslant 0$ при всех $t_0 \leqslant t' < t$, а также $\lim\limits_{\Delta \to +0} I_\alpha(x(\tau, u), u, t - \Delta t) \geqslant I_\alpha(x(\tau, u), u, t)$ $(\alpha \in A)$; 5) $\sup\limits_{y \in Y(t)} \min\limits_{z \in Y(\tau)} \|y - z\| \to 0$ при $\tau \to t - 0$ и $\sup\limits_{z \in Y(\tau)} \min\limits_{y \in Y(t)} \|y - z\| \to 0$ при $\tau \to t$.

2. Критерии управляемости и оптимальности. При

изучении задачи быстродействия важную роль играет функционал

$$M(c,t)=\min_{x\in X(t)}\min_{y\in Y(t)}(c,x-y)=\min_{u\in U(t)}(c,x(t,u))-\max_{y\in Y(t)}(c,y),$$

где $c\in B^*$ — сопряженное к B пространство, (c,z) — значение линейного функционала c на элементе $z\in B$. При выполнении условий A множество $X(t)$ выпукло, слабо бикомпактно в B и, следовательно, $M(c,t)$ определен при всех $c\in B^*$, $t\geqslant t_0$.

Определение. Систему $\{x(t,u)\}$ назовем $U(T)$-управляемой, если существует такое $u\in U(T)$, что $x(T,u)\in Y(T)$, в противном случае система $U(T)$-неуправляема.

Теорема 1. *Если выполнены условия* А, *то* 1) *система* $\{x(t,u)\}$ $U(T)$*-управляема тогда и только тогда, когда* $M(c,T)=\min_{x\in X(T)}(c,x)-\max_{y\in Y(T)}(c,y)$ *при всех* $c\in B^*$; 2) T^* *оптимально тогда и только тогда, когда* $M(c,t)\leqslant 0$ *при всех* $c\in B^*$ *и для любого* $t_0\leqslant t<T^*$ *существует такое* $c_t\in B^*$, *что* $M(c_t,t)>0$.

Лемма 1. *Пусть выполнены условия* А. *Тогда при любом* $t\geqslant t_0$ *функционал* $M(c,t)$: 1) *вогнут по* c; 2) $M(\alpha c,t)=\alpha M(c,t)$, $\alpha=\mathrm{const}\geqslant 0$; 3) *удовлетворяет условию Липшица по* c *в норме* B^*; 4) *полунепрерывен сверху по* c *в* B*-топологии пространства* B^*.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия* В. *Тогда*: 1) $M(c,t)$ *при любом фиксированном* $c\in B^*$ *полунепрерывен снизу по* t *и непрерывен слева по* t; 2) *если при этом система* $\{x(t,u)\}$ $U(T)$*-управляема и* $M(c,s)>0$ *при некоторых* $c\in B^*$, $t_0\leqslant s<T$, *то найдется момент времени* t, $s<t\leqslant T$, *что* $M(c,t)=0$, $M(c,\tau)>0$ *при* $s\leqslant\tau<t$.

3. Метод I. Для описания этого метода введем функционал $\rho(t)=\max_{\|c\|\leqslant 1}M(c,t)$. Из леммы 1 и бикомпактности единичного шара из B^* в B-топологии B^* (теорема Алаоглу ([2]), стр. 459) следует, что $\rho(t)$ определен при всех $t\geqslant t_0$.

Теорема 2. *Если выполнены условия* А, *то* 1) *система* $\{x(t,u)\}$ $U(T)$*-управляема тогда и только тогда, когда* $\rho(T)=0$; 2) T^* *оптимально тогда и только тогда, когда* $\rho(T^*)=0$, $\rho(t)>0$ *при* $t_0\leqslant t<T^*$.

Лемма 3. *Если выполнены условия* В, *то* $\rho(t)$ *полунепрерывна снизу при* $t\geqslant t_0$ *и непрерывна слева при* $t>t_0$.

Опишем метод I в предположении, что выполнено условие В и система $\{x(t,u)\}$ $U(T)$-управляема. Зададим некоторую последовательность $\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\delta_k\geqslant 0$, $\delta_k\to 0$ $(k\to\infty)$, постоянную $R>0$ и непрерывную функцию $\alpha(\rho)$, $\alpha(0)=0$ $0<\alpha(\rho)\leqslant R\rho$ при $\rho>0$. В качестве начального приближения возьмем t_0 и такое $c_0\in B^*$, $\|c_0\|\leqslant R$, $\alpha(\rho(t_0))\leqslant M(c_0,t_0)$ (естественно считать $\rho(t_0)>0$). Пусть k — 1-е приближение t_{k-1}, c_{k-1} известно и $t_0<t_1<\ldots<t_{k-1}<T$, $\rho(t)>0$ при $t_0\leqslant t\leqslant t_{k-1}$, $0<\alpha(\rho(t_{k-1}))\leqslant M(c_{k-1},t_{k-1})$, $\|c_{k-1}\|\leqslant R$. Тогда t_k определим из условий $t_{k-1}<t_k\leqslant T$, $M(c_{k-1},t_k)\leqslant\delta_k$, $M(c_{k-1},\tau)>0$ при $t_{k-1}\leqslant\tau<t_k$ (существование такого t следует из леммы 3). В силу выбора t_k, $\rho(t)>0$ при $t_{k-1}\leqslant t<t_k$. Далее c_k найдем из условий $\|c_k\|\leqslant R$, $\alpha(\rho(t_k))\leqslant M(c_k,t_k)$. Если $M(c_k,t_k)=0$, то $\alpha(\rho(t_k))=0$, $\rho(t_k)=0$ — время t_k оптимально, и процесс закончен. Если $M(c_k,t_k)>0$, то $\rho(t_k)>0$, и процесс продолжаем дальше. Если этот процесс не закончится за конечное число шагов, то из лемм 1—3 и теоремы 2 вытекает

Теорема 3. *Пусть выполнено условие* В *и система* $\{x(t,u)\}$ $U(T)$*-управляема. Тогда последовательность* t_k *сходится к оптимальному* T^*.

4. Метод II. Для описания метода II введем функционал $\varkappa(t)=\sup_{c\in\Pi(t)}M(c,t)$, где $\Pi(t)=\{c\colon c\in B^*,\ \max_{y\in Y(t)}(c,y)=-1\}$. Если выполнены условия А, $0\notin Y(t)$, $0\in X(t)$, то $\Pi(t)$ непусто и $\varkappa(t)>-\infty$, если же $0\in Y(t)$, то $\Pi(t)$ пусто и по определению полагаем $\varkappa(t)=-\infty$.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* А, *пусть* $0\in X(t)$ *при всех* $t\geqslant t_0$. *Тогда*: 1) *система* $\{x(t,u)\}$ $U(T)$*-управляема тогда и только тог-*

да, когда $\varkappa(T) \leqslant 0$; 2) T^* *оптимально тогда и только тогда, когда* $\varkappa(T^*) \leqslant 0$, $\varkappa(t) > 0$ *при* $t_0 \leqslant t < T^*$.

Лемма 4. *Если выполнены условия* B *и* $0 \in X(\tau)$ *при всех* τ *из достаточно малой окрестности* t, *то* $\varkappa(t)$ *полунепрерывна снизу в точке* t. *Если кроме того* $0 \notin Y(t)$ *и для некоторого* $\omega_t > 0$ *одно из множеств* $X(t) \cap [\omega_t Y(t)]^0$ *или* $[X(t)]^0 \cap [\omega_t Y(t)]$ * *непусто, то* $\varkappa(t)$ *непрерывна слева в точке* $t > t_0$.

Опишем метод II в предположении, что выполнено условие B, система $\{x(t, u)\}$ $U(T)$-управляема и $0 \in X(t)$ при всех $t_0 \leqslant t \leqslant T$. Пусть заданы последовательность $\delta_k \geqslant 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$, $\delta_k \to 0$ $(k \to \infty)$ и функция $\alpha(\varkappa)$, $\alpha(\varkappa) < \varkappa$ при всех $\varkappa$, $\alpha(\varkappa) > 0$ при $\varkappa > 0$. В качестве начального приближения возьмем t_0 и $c_0 \in \Pi(t_0)$, $M(c_0, t_0) \geqslant \alpha(\varkappa(t_0)) > 0$. Пусть известно $k-1$-е приближение t_{k-1}, $c_{k-1} \in \Pi(t_{k-1})$, $t_0 < t_1 < \ldots < t_{k-1} < T$, $\varkappa(t) > 0$ при $t_0 \leqslant t \leqslant t_{k-1}$, $0 < \alpha(\varkappa(t_{k-1})) \leqslant M(c_{k-1}, t_{k-1})$ $(k \geqslant 1)$. Тогда в силу леммы 3 найдется t_k, $t_{k-1} < t_k \leqslant T$, что $M(c_{k-1}, t_k) \leqslant \delta_k$, $M(c_{k-1}, t) > 0$ при $t_{k-1} \leqslant t < t_k$. Тогда $\varkappa(t) > 0$ при $t_{k-1} \leqslant t < t_k$. Возможно, что $0 \in Y(t_k)$, тогда t_k — оптимальное время и процесс закончен. Если же $0 \notin Y(t_k)$, то находим $c_k \in \Pi(t_k)$ из условия $\alpha(\varkappa(t_k)) \leqslant M(c_k, t_k)$. Если $M(c_k, t_k) \leqslant 0$, то $\varkappa(t_k) \leqslant 0$ и t_k оптимально, процесс закончен. Если $M(c_k, t_k) > 0$; то $\varkappa(t_k) > 0$ и процесс продолжаем дальше. Если этот процесс не закончится за конечное число шагов, то из леммы 4 и теоремы 4 вытекает

Теорема 5. *Пусть выполнены условия* B, *система* $\{x(t, u)\}$ $U(T)$-*управляема*, $0 \in X(t)$ *при* $t_0 \leqslant t \leqslant T$ *и пусть при некотором* $\omega_t > 0$ *одно из множеств* $X(t) \cap [\omega_t Y(t)]^0$ *или* $[X(t)]^0 \cap [\omega_t Y(t)]$ * *непусто при* $t_0 < t \leqslant T$. *Тогда последовательность* t_k $(k = 1, 2, \ldots)$, *полученная методом* II, *сходится к оптимальному* T^*.

На практике, видимо, вместо $\varkappa(t)$ удобнее работать с функционалом $\omega(t) = \inf_{c \in \Pi(t)} \max_{x \in X(t)} (-c, x)$. Так как $\varkappa(t) = 1 - \omega(t)$, то нетрудно изложить метод II и сформулировать теоремы 4, 5 и лемму 4 с использованием $\omega(t)$.

5. Приложения. Пример 1. Пусть процесс описывается системой

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad t \geqslant 0, \quad x(0) \in X_0,$$

где $x = (x^1, \ldots, x^n)$, $u = (u^1, \ldots, u^r)$, A и B — постоянные матрицы размерности $n \times n$ и $n \times r$ соответственно, X_0 — заданное множество эвклидова пространства E_n. Примем U: или $U_1 = \{u(t)\colon \operatorname{vrai\,sup}_{0 \leqslant t \leqslant T} |u^i(t)| \leqslant \alpha_i = \text{const}, \ i = 1, \ldots, r\}$, или $U_2 = \left\{u(t)\colon \int_0^T u^2(t)\,dt \leqslant \alpha = \text{const}\right\}$, или $U_3 = U_1 \cap U_2$. Требуется перевести за минимальное время систему из множества X_0 во множество $Y(t)$, соблюдая фазовые ограничения: $x(t) \in G(t)$, $t \geqslant 0$, $\int_0^T x^2(t)\,dt \leqslant \beta = \text{const}$; здесь $Y(t)$, $G(t)$ — заданные множества из E_n.

Теорема 6. *Пусть* 1) *система* $U(T)$-*управляема при некотором* $T < \infty$; 2) X_0 *выпукло, замкнуто, ограничено*; 3) $G(t)$ *выпукло, замкнуто и* $G(t-0) \subset G(t)$ *при всех* $t \geqslant 0$; 4) $Y(t)$ *выпукло, замкнуто, ограничено, непрерывно слева по Хаусдорфу и* $Y(t+0) \subset Y(t)$, $t \geqslant 0$. *Тогда последовательность* $\{t_k\}$ *из метода* I *сходится к оптимальному* T^*. *Если наряду с* 1)—4) *выполнены условия*: 5) *ранг матрицы* $\{B, AB, \ldots, A^{n-1}B\}$ *равен* n; 6) *для любого* $T > 0$ *существует шар* $K_T \subset E_n$ *с центром в нуле, что* $K_T \subset G(t)$ *при* $t_0 \leqslant t \leqslant T$, *то последовательность* $\{t_k\}$ *из метода* II *сходится к оптимальному* T^*.

* Здесь [ ]^0 означает внутренность множества.

Некоторые варианты методов I, II были изучены, например, в ([3–6]).

Пример 2. Пусть процесс описывается условиями:

$$x_t = x_{ss}, \quad x \equiv x(s,t), \quad (s,t) \in Q_T = \{0 \leqslant s \leqslant 1,\ 0 \leqslant t \leqslant T\},$$
$$x_s(0,t) = 0, \quad x_s(1,t) = \alpha[u(t) - x(1,t)],\ x(s,0) = 0,\ \alpha = \mathrm{const} > 0.$$

Из этих условий при каждом фиксированном $u = u(t) \in U(T) = \{u(t):\ u(t) \in L_2[0,T],\ \operatorname*{vrai\,sup}_{0 \leqslant t \leqslant T} |u(t)| \leqslant 1\}$ однозначно определяется $x = x(s,t,u)$ ([7]). Требуется за минимальное время T добиться выполнения $x(s,t,u) \in Y = \{y(s):\ y(s) \in L_2[0,1], \int\limits_0^1 |y(s) - y_0(s)|^2 ds \leqslant \delta^2\}$, $\delta = \mathrm{const} > 0$, $y_0(s)$ — заданная функция из $L_2[0,1]$. Здесь надо принять

$$M(c,t) = \min_{u \in U(T)} \min_{y \in Y} \int\limits_0^1 c(s)[x(s,t,u) - y(s)]\,ds,\ c(s) \in L_2[0,1].$$

Теорема 7. *Если при некотором $T < \infty$ система $U(T)$-управляема, то последовательность $\{t_k\}$, определяемая методом* I *или* II, *сходится к оптимальному T (метод* II *ср. с* ([8]), *стр.* 303, 380; *метод* I *см.* ([9])).

Пример 3. Пусть процесс описывается условиями:

$$x_{tt} = a^2 x_{ss} + u_0(s,t),\ x \equiv x(s,t),\ (s,t) \in Q_T \quad (a = \mathrm{const} > 0),$$
$$x(0,t) = x(1,t) = 0,\ x(s,0) = u_1(s),\ x_t(s,0) = u_2(s).$$

Из этих условий при каждом $u = (u_0, u_1, u_2) \in U = U_0 \times U_1 \times U_2$, $U_0 = \{u_0(s,t):\ \|u_0\|_{L_2(Q_T)} \leqslant \alpha_0\}$, $U_1 = \{u_1(s):\ \|u_1\|_{W_2^{(2)}[0,1]} \leqslant \alpha_1,\ u_1(0) = u_1(1) = 0\}$, $U_2 = \{u_2(s):\ \|u_2\|_{W_2^{(1)}[0,1]} \leqslant \alpha_2,\ u_2(0) = u_2(1) = 0\}$, $\alpha_i = \mathrm{const} \geqslant 0$, $i = 0,1,2$, однозначно определяется решение $x = x(s,t,u) \in W_2^{(2)}(Q_T)$ ([10]). Требуется за минимальное время T добиться выполнения $\int\limits_0^1 (|x(s,T,u) - \bar{y}_0(s)|^2 + |x_t(s,T,u) - \bar{y}_1(s)|^2)\,ds \leqslant \delta$, соблюдая фазовые ограничения $\beta_1 \int\limits_0^1 |x(s,T,u) - \bar{y}_2(s)|^2 ds + \beta_2 \int\limits_0^1 |x_t(s,t,u) - \bar{y}_3(s)|^2 ds \leqslant \beta_3$, здесь $\bar{y}_i(s) \in L_2[0,1]$ — заданные функции, $\delta = \mathrm{const} \geqslant 0$, $\beta_i = \mathrm{const} \geqslant 0$. Примем $c = (c_1(s), c_2(s))$, $\|c(s)\| = \|c\|_{L_2^{(2)}[0,1]} = \left(\int\limits_0^1 (|c_1(s)|^2 + |c_2(s)|^2)\,ds\right)^{1/2}$, $y = (y_1(s), y_2(s))$,

$$\bar{y} = (\bar{y}_0(s), \bar{y}_1(s)), \quad Y \equiv \{y:\ \|y - \bar{y}\|_{L_2^{(2)}[0,1]} \leqslant \delta\},$$

$$M(c,t) = \min_{u \in U(t)} \min_{y \in Y} \int\limits_0^1 (c_1(s)\,x(s,t,u) + c_2(s)\,x_t(s,t,u) - c_1(s)\,\bar{y}_1(s) - c_2(s)\,\bar{y}_2(s))\,ds.$$

Теорема 8. *Если при некотором $T < \infty$ система $U(T)$-управляема, то последовательность $\{t_k\}$ из метода* I *сходится к оптимальному T^*.*

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
13 IV 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Р. Эдвардс, Функциональный анализ, М., 1969. [2] Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц, Линейные операторы. Общая теория, ИЛ, 1962. [3] А. Б. Рабинович, Журн. вычисл. матем. и матем. физики, 6, № 3, 433 (1966). [3] T. Fujisawa, Y. Yasuda, SIAM J. Control, 5, № 4, 501 (1967). [5] Т. Г. Бабунашвили, ДАН, 155, № 2, 295 (1964). [6] Ф. П. Васильев, Р. П. Иванов, Журн. вычисл. матем. и матем. физики, 10, № 5, 1124 (1970). [7] Ю. В. Егоров, Журн. вычисл. матем. и матем. физики, 3, № 5, 887 (1963). [8] А. Г. Бутковский, Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами, «Наука», 1965. [9] Ф. П. Васильев, Журн. вычисл. матем. и матем. физики, 10, № 3 (1970). [10] О. А. Ладыженская, Смешанная задача для гиперболического уравнения, М., 1953.