

А. Ф. ЛАВРИК

О МОМЕНТАХ ЧИСЛА КЛАССОВ ЧИСТО КОРЕННЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ ОТРИЦАТЕЛЬНОГО ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 22 VII 1970)

В статье будет показано, что на основе идей И. М. Виноградова ⁽¹⁾ в асимптотическом выражении

$$\sum_{1 \leq D \leq N} h^k(-D) = r(k) N^{(k+2)/2} [1 + O(N^{-\theta})], \quad (1)$$

где $h(-D)$ — число классов чисто коренных квадратичных форм отрицательного определителя $-D$, получается более сильное понижение в остатке в сравнении с теми, что были получены до сих пор, в том числе и при помощи квазиримановой гипотезы для L -функций Дирихле.

1. Асимптотика сумм (1) изучалась в ⁽²⁾ сочетанием элементарного и аналитического методов и затем в ⁽³⁻⁷⁾ при помощи метода, существо которого составляли теоремы о плотности нулей L -функций Дирихле. Последним достижением (см. ⁽⁸⁾) на этом пути было

$$\theta < 1/2(\sqrt{129} - 9) \approx 0,18,$$

и, если бы удалось доказать плотностную гипотезу Бомбьерри ⁽⁸⁾

$$\sum_{D \leq X} \sum_{\chi_D} I(\alpha, T, \chi_D) \ll X^{s(1-\alpha)+\varepsilon} T^{1+\varepsilon},$$

где $I(\alpha, T, \chi_D)$ означает число нулей $L(\sigma + it, \chi_D)$ в прямоугольнике $\alpha \leq \sigma \leq 1$, $|t| \leq T$ с $\alpha \geq 1/2$, $T \geq 2$, ε — сколь угодно малым, но фиксированным, то отсюда (см. ⁽⁹⁾) следовало бы, что

$$\theta = 1/5 + \varepsilon. \quad (2)$$

В связи с этим несколько неожиданным было обнаруженное автором при участии М. Б. Барбана усиление элементарной части метода в ⁽²⁾, которое приводило к оценке (2) без каких-либо гипотез. В дальнейшем, за счет более рационального использования идей и оценок И. М. Виноградова ⁽¹⁾, удалось полностью заменить аналитическую часть элементарной, что предельно упростило метод доказательства и позволило еще улучшить оценку для θ .

Именно, справедливо

Утверждение. В соотношении (1) имеем

$$\theta = 1/4 - \left(2 + \frac{k^2}{2}\right) \frac{\ln \ln N}{\ln N}. \quad (3)$$

Мы будем рассматривать более общую задачу о моментах $h(-D)$ в примитивных арифметических прогрессиях растущей разности и покажем, что имеет место

Теорема 1. Равномерно относительно $N, d, 0 \leq l \leq d, (l, d) = 1$

$$\sum_{\substack{1 \leq D \leq N \\ D \equiv l \pmod{d}}} h^k(-D) = \frac{2^{k+1} r_k(d, l)}{\pi^k (k+2)} \frac{N^{1/2(k+2)}}{d} [1 + O(N^{-1/4} d^{1/4+\varepsilon} \ln^4 N)],$$

$$r_k(d, l) = \prod_{p \nmid d} \left[1 - \left(\frac{-l}{p} \right) \frac{1}{p} \right]^{-k} \sum_{\substack{n=1 \\ (n, 2d)=1}}^{\infty} \frac{\varphi(n) \tau_k(n^2)}{n^3},$$

где $\varphi(n)$ — функция Эйлера, $\tau_k(m)$ — функция делителей, p — простое число, ε — любое > 0 , $A = 2 + k^2/2$.

Эта формула доставляет асимптотику суммы при

$$d \leq N^{1/2 - \varepsilon_1}, \quad \varepsilon_1 > \varepsilon,$$

и при $l = 0, d = 1$ она дает соотношение (1) с оценкой (3). Пусть $\chi_{\frac{-D}{n}}(n)$ означает символ Якоби $\left(\frac{-D}{n} \right)$ или нуль, смотря по тому, взаимно просты или нет числа $2D$ и n ; $\nu \neq m^2$ — знак того, что ν не является квадратом целого числа, D, D', D'' — числа прогрессии $dm + l$, где $0 \leq l \leq d, (l, d) = 1$.

Известная формула Гаусса

$$h(-D) = \frac{2}{\pi} \sqrt{D} L(1, \chi_D), \quad L(1, \chi_D) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_D(n) n^{-1} \quad (4)$$

и преобразование по Абелю сводят нашу задачу к асимптотическому выражению суммы k -х степеней $L(1, \chi_D)$, так что нам достаточно показать только, что

$$\sum_{1 \leq D \leq N} L^k(1, \chi_D) = r_k(d, l) \frac{N}{d} [1 + O(N^{-1/4} d^{1/2 + \varepsilon} \ln^A N)]. \quad (5)$$

Эта последняя задача, в свою очередь, сводится к получению оценок (7). Если

$$\Sigma \equiv \sum_{\substack{1 \leq n \leq x \\ n \neq m^2, (n, 2d)=1}} \left| \sum_{1 \leq D \leq N} \chi_D(n) \right|^2, \quad (6)$$

тогда при $\varepsilon > 0$ имеем

$$\Sigma \ll \min \left[x^2 \ln^2 x; \frac{N^3}{d^2} \ln^2 N + \frac{x N^{1+\varepsilon}}{d} \right]. \quad (7)$$

Действительно, известно (1), что независимо от значений X, Y :

$$a) \left| \sum_{x < D < Y} \chi_D(n) \right| \ll \sqrt{n} \ln n; \quad b) \left| \sum_{x < n < Y} \left(\frac{\Delta}{n} \right) \right| \ll \sqrt{\Delta} \ln \Delta, \quad (8)$$

лишь бы только в а) n , а в б) Δ не были квадратами. Поэтому первая оценка в (7) следует из оценки а) ввиду того, что замена здесь D на $D = d\Delta + l$ при $(d, n) = 1$ не меняет эту оценку. Для того чтобы получить следующие оценки (7), используем свойство мультипликативности символов Якоби и вещественность внутренней суммы в (6).

$$\begin{aligned} \Sigma &\leq \sum_{1 \leq D' \leq N} \sum_{1 \leq D'' \leq N} \left| \sum_{1 \leq n \leq x} \left(\frac{D'D''}{n} \right) \right| \leq \\ &\leq x \sum_{\substack{1 \leq D' \leq N \\ D'D''=m^2}} \sum_{\substack{1 \leq D'' \leq N \\ D'D''=m^2}} 1 + \sum_{\substack{1 \leq D' \leq N \\ D'D'' \neq m^2}} \sum_{\substack{1 \leq D'' \leq N \\ D'D'' \neq m^2}} \left| \sum_{1 \leq n \leq x} \left(\frac{D'D''}{n} \right) \right|. \end{aligned}$$

Первая двойная сумма здесь

$$\leq \sum_{\substack{m^2 \leq N^2 \\ m^2 \equiv l^2 \pmod{d}}} \tau(m^2) \ll N^\varepsilon \sum_{\substack{m \leq N \\ m^2 \equiv l^2 \pmod{d}}} 1 \ll \frac{N^{1+\varepsilon}}{d},$$

а вторая, ввиду оценки б) из (8),

$$\ll \left(\sum_{1 \leq D \leq N} \sqrt{D} \ln D \right)^2 \ll \frac{N^3}{d^2} \ln^2 N,$$

что и доказывает вторую часть оценки (7).

Далее, для $D \leq N$, целого $k \geq 2$ из (4) и (8) получаем

$$L^k(1, \chi_D) = \prod_{dl} \sum_{1 \leq n \leq N^k} \frac{\tau_k^*(n) \chi_{Dd^2}(n)}{n} + O\left(\frac{V\bar{D}\tau(d) \ln^{k+1}N}{N}\right),$$

$$\prod_{dl} = \prod_{p/d} \left[1 - \left(\frac{-l}{p}\right) \frac{1}{p}\right]^{-k};$$

$\tau_k^*(m)$ отличается от $\tau_k(m)$ лишь тем, что каждый из k сомножителей m должен быть $\leq N$.

Следовательно,

$$\sum_{1 \leq D \leq N} L^k(1, \chi_D) = \prod_{dl} \sum_{\substack{1 \leq n \leq N^{k/2} \\ (n, 2d)=1}} \frac{\tau_k^*(n^2)}{n^2} \sum_{\substack{1 \leq D \leq N \\ (D, n)=1}} 1 +$$

$$+ O\left(\prod_{dl} \sum_{\substack{1 \leq n \leq N^k \\ n \neq m^2, (n, 2d)=1}} \frac{\tau_k(n)}{n} \left| \sum_{1 \leq D \leq N} \chi_D(n) \right| \right) + O(\sqrt{N} \ln^4 N). \quad (9)$$

Теперь, принимая во внимание, что

$$\tau_k^*(m) = \tau_k(m) \quad \text{при } m \leq N, \quad \tau_k(m) \tau(m) \leq k \tau_{k+1}(m),$$

$$\sum_{\substack{1 \leq D \leq N \\ (D, n)=1}} = 1 \frac{\varphi(n)N}{nd} + O(\tau(n)),$$

получаем

$$\sum_{\substack{1 \leq n \leq N^{k/2} \\ (n, 2d)=1}} \frac{\tau_k^*(n^2)}{n^2} \sum_{\substack{1 \leq D \leq N \\ (D, n)=1}} 1 = \frac{N}{d} \sum_{\substack{n=1 \\ (n, 2d)=1}}^{\infty} \frac{\varphi(n) \tau_k(n^2)}{n^3} + O(\sqrt{N} \ln^4 N). \quad (10)$$

Нам остается оценить последнюю сумму в (9). Очевидно, что она

$$\leq \left(\sum_{1 \leq n \leq N^k} \frac{\tau_k^2(n)}{n} \right)^{1/2} \left(\sum_{\substack{1 \leq n \leq N^k \\ n \neq m^2, (n, 2d)=1}} \frac{1}{n} \left| \sum_{1 \leq D \leq N} \chi_D(n) \right|^2 \right)^{1/2}. \quad (11)$$

Первая сумма здесь оценивается как $\ll (\ln N)^{k/2}$, а вторая, обозначим ее через Σ^* , расписывается по Абелю в следующем виде:

$$\Sigma^* = \int_1^{N^k} \sum_{\substack{1 \leq n \leq x \\ n \neq m^2, (n, 2d)=1}} \left| \sum_{1 \leq D \leq N} \chi_D(n) \right|^2 \frac{dx}{x^2} + N^{-k} \sum_{\substack{1 \leq n \leq N^k \\ n \neq m^2, (n, 2d)=1}} \left| \sum_{1 \leq D \leq N} \chi_D(n) \right|^2. \quad (12)$$

Теперь непосредственное применение оценок (7) при $M = N^{3/2}/d$ дает

$$\Sigma^* \ll \left\{ \int_1^M \ln^2 x dx + \frac{N^3}{d^2} \ln^2 N \int_M^{N^k} \frac{dx}{x^2} + \frac{N^{1+\varepsilon}}{d} \int_M^{N^k} \frac{dx}{x} + \frac{N^{3-k}}{d^2} \ln^2 N \right\} \ll$$

$$\ll \frac{N^{3/2}}{d} \ln^2 N. \quad (13)$$

Соединяя результаты (9) — (13), получим формулу (5). А из (5) и (4) следует теорема 1.

2. Изложенный выше метод основан на оценке двойной суммы с вещественным характером. Причем в данном случае мы имели дело с простейшей из такого рода сумм — суммирование проводилось по гладким последовательностям $dm + l$ и n . В противном случае этот прием не приводит к цели. Однако его можно дополнить идеей равномерности в сред-

всем числовым последовательностям ⁽⁹⁾, и тогда он хорошо работает в общем случае ⁽¹⁰⁾. В частности, соединяя теорему 1 из ⁽⁹⁾ с результатом А. И. Виноградова ⁽¹¹⁾ о распределении в среднем простых чисел в коротких отрезках арифметических прогрессий, нетрудно получить теорему о моментах $h(-p)$ на простых числах $p \equiv l \pmod{d}$.

Заметим, что если $p \equiv 3 \pmod{4}$, то $h(-p)$ будет равно разности между числом квадратичных вычетов и невычетов $\pmod{p}$ среди чисел $1, 2, \dots, \frac{1}{2}(p-1)$. Так получается, например,

Теорема 2.

$$\sum_{\substack{p \leq N \\ p \equiv l \pmod{d}}} h^k(p) = \frac{2^k}{\pi^k (k+2)} \pi(N) N^{1/2k} \sum_{\substack{n=1 \\ (n,2)=1}}^{\infty} \frac{\tau_k(n^2)}{n^2} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{\ln^c N}\right) \right\},$$

где $\pi(N)$ — число простых чисел $\leq N$, c — произвольная постоянная.

Ташкентский институт
инженеров железнодорожного транспорта

Поступило
17 VII 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ И. М. Виноградов, Избр. Тр., Изд. АН СССР, 1952. ² А. Ф. Лаврик, Изв. АН УзССР, сер. физ.-матем., 1 (1959). ³ М. Б. Барбан, Изв. АН СССР, сер. матем., 26, 4 (1962). ⁴ М. Б. Барбан, Г. Гордовер, ДАН, 167, № 2 (1966). ⁵ М. Б. Барбан, УМН, 21, в. 1, 127 (1966). ⁶ М. Б. Барбан, ДАН, 172, № 5 (1967). ⁷ D. Wolke, J. Number Theory, 1, № 4 (1969). ⁸ E. Bombieri, Collectanea Math., publ. dell'inst. mat. dell'univ. di Milano, № 281, 1 (1965); рус. пер. Математика, 10, 5 (1966). ⁹ А. Ф. Лаврик, ДАН, 186, № 1 (1969). ¹⁰ А. Ф. Лаврик, ДАН, 190, № 6 (1970). ¹¹ А. И. Виноградов, Изв. АН СССР, сер. матем., 29, 4 (1965).