Доклады Академии наук СССР
1971. Том 197, № 1

УДК 523.57

АСТРОНОМИЯ

Б. А. ТРУБНИКОВ

ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СЛИПАЮЩИХСЯ МЕТЕОРОВ

(Представлено академиком М. А. Леонтовичем 16 VII 1970)

В ряде космогонических гипотез (Лапласа, Шмидта и др.) предполагается, что процесс слипания частиц космической пыли играл основную роль в образовании планет Солнечной системы (см. например ([1])).

В настоящей работе предложено кинетическое уравнение и гидродинамическая модель, которые, по-видимому, могут качественно описывать подобный процесс.

1. Считая вначале массы частиц дискретными $m_k = km_1$, запишем кинетическое уравнение для функции распределения частиц k-го сорта

$$\frac{d}{dt} f_k = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla + \mathbf{g}\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}\right) f_k = C_k, \quad \int f_k d\mathbf{v} = n_k, \tag{1}$$

где член C_k описывает слипания. При объединении двух частиц с массами $m' = im_1$, $m'' = jm_1$ и скоростями $\mathbf{v}'$, $\mathbf{v}''$ образуется составная частица с массой $m = m' + m''$ и скоростью $\mathbf{v} = (m'\mathbf{v}' + m''\mathbf{v}'') / m$, причем

$$v_x' = v_x + \frac{m''}{m} u_x, \quad v_x'' = v_x - \frac{m'}{m} u_x, \quad m'v_x'^2 + m''v_x''^2 = mv_x^2 + \frac{m'm''}{m} u_x^2, \tag{2}$$

и аналогично для y, z-компонент. Здесь $\mathbf{u} = \mathbf{v}' - \mathbf{v}''$, а якобиан перехода к переменным $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}$ равен единице $(d\mathbf{v}'d\mathbf{v}'' = d\mathbf{v}\, d\mathbf{u})$. Число слипаний в 1 см^3 за 1 сек. равно

$$dS_{ij} = \int dn_i dn_j |\mathbf{u}| \sigma_{ij} = \int f_i(\mathbf{v}') f_j(\mathbf{v}'') |\mathbf{u}| \sigma_{ij} d\mathbf{v}'\, d\mathbf{v}'', \tag{3}$$

и нетрудно убедиться, что с учетом соотношений (2)

$$C_k = \frac{1}{d\mathbf{v}}\left({}^1/_2 \sum_{i+j=k} dS_{ij} - \sum_{i=1}^{\infty} dS_{ik}\right) = -f_k(\mathbf{v}) \sum_{i=1}^{\infty} \int f_i(\mathbf{v}+\mathbf{u}) |\mathbf{u}| \sigma_{ik} d\mathbf{u} +$$
$$+ {}^1/_2 \sum_{i+j=k} \int f_i\left(\mathbf{v} + \frac{m_j}{m_k}\mathbf{u}\right) f_j\left(\mathbf{v} - \frac{m_i}{m_k}\mathbf{u}\right) |\mathbf{u}| \sigma_{ij} d\mathbf{u}. \tag{4}$$

При непрерывном спектре масс следует ввести $\varphi_m(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) = f_k / m_1$ и заменить суммы интегралами $\sum_i \to \left(\frac{1}{m_1}\right)\int dm,$ после чего получим кинетическое уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla + \mathbf{g}\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}\right)\varphi_m = S_m(\varphi) = -\varphi_m(\mathbf{v}) \int_0^{\infty} dm' \int \varphi_{m'}(\mathbf{v} + \mathbf{u}) |\mathbf{u}| \sigma_{m, m'} d\mathbf{u} +$$
$$+ {}^1/_2 \int_0^m dm' \int \varphi_{m'}\left(\mathbf{v} + \frac{m - m'}{m}\mathbf{u}\right) \varphi_{m-m'}\left(\mathbf{v} - \frac{m'}{m}\mathbf{u}\right) |\mathbf{u}| \sigma_{m', m-m'} d\mathbf{u}. \tag{5}$$

Для шарообразных частиц сечение слипания можно было бы считать равным $\sigma_{ik}^0 = \pi(r_i + r_k)^2 \sim (m_i^{1/3} + m_k^{1/3})^2$, однако столкновения с большой относительной скоростью могут приводить не к слипанию, а к дроблению частиц. Это обстоятельство можно качественно учесть, полагая, что σ падает с ростом $|\mathbf{u}|$. Наиболее простая модель получается, если принять зависимость

$$\sigma_{m,\, m'} = A_{m,\, m'} \,/\, |\mathbf{u}|, \qquad A_{m,\, m'} = (m + m')\,\xi. \tag{6}$$

Возрастание такого σ при уменьшении $|\mathbf{u}|$ может качественно учитывать гравитационное притяжение частиц.

2. В однородном случае при отсутствии силы тяжести $(\mathbf{g} = 0,\ \partial / \partial \mathbf{r} = 0)$ решениями системы (1), (4), (6) могут являться максвелловские распределения

$$f_k = n_k(t)\, \mu_k(\mathbf{v}), \qquad \mu_k(\mathbf{v}) = (m_k / 2\pi T)^{3/2} \exp\left(-m_k v^2 / 2T\right), \tag{7}$$

подстановка которых в (1) — (4) приводит к уравнениям Смолуховского [2], описывающим коагуляцию

$$\frac{d}{dt}\, n_k = {}^1/_2 \sum_{i+j=k} n_i n_j A_{ij} - n_k \sum_{i=1}^{\infty} n_i A_{ik}, \tag{8}$$

или после подстановки $\varphi_m = \nu_m(t)\, \mu_m(\mathbf{v})$ в (5)

$$\frac{\partial}{\partial t}\, \nu_m = {}^1/_2 \int_0^m \nu_{m'} \nu_{m-m'} A_{m',\, m-m'} dm' - \nu_m \int_0^{\infty} \nu_{m'} A_{m,\, m'} dm'. \tag{9}$$

Зависимость $A_{m,\, m'} = (m + m')\,\xi$ для коэффициента слипания частиц космической пыли была предложена Софроновым [3], который исследовал при этом ряд частных решений уравнения (9) и качественно установил асимптотическую зависимость $\nu_m (t \to \infty) \sim m^{-3/2}$, которая находится в удовлетворительном согласии со спектром масс малых тел Солнечной системы — комет, метеоритов, астероидов. В работе автора [4] найдено общее решение уравнения (9) в явном виде:

$$\nu_m = \frac{\rho f / m}{1 - f} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\sigma}^{+i\infty+\sigma} dp \exp\left\{ mp + m \frac{1-f}{\rho} \left[L_0(p) - n(0) \right] \right\}, \tag{10}$$

где

$$f = e^{-\xi \rho t}, \quad n(t) = \int_0^{\infty} \nu_m dm, \quad \rho = \int_0^{\infty} m \nu_m dm, \quad L_0(p) = \int_0^{\infty} e^{-mp} \nu_m(0)\, dm. \tag{11}$$

При $t \gg 1 / \xi\rho$ из (10) получается асимптотический спектр

$$\nu_{m \gg \langle m \rangle_0} \approx \frac{n(t)}{\sqrt{2\pi \langle m^2 \rangle_0}} \left(\frac{\langle m \rangle_0}{m} \right)^{3/2} \exp\left(-m \frac{f^2 \langle m \rangle_0}{2 \langle m^2 \rangle_0} \right) \sim m^{-3/2}, \tag{12}$$

который определяется заданием средней и среднеквадратичной масс $\langle m^k \rangle_0 = \int_0^{\infty} m^k \nu_m(0)\, dm$ при $t = 0$, так что зависимость $\nu_m (t \to \infty) \sim m^{-3/2}$ имеет весьма общий характер при условии $A_{m,\, m'} = (m + m')\,\xi$.

3. В неоднородном случае наибольший интерес представляет эффект оседания пылевого облака, который может быть рассмотрен с помощью квазигидродинамических уравнений, получающихся из (5):

$$\partial\rho / \partial t + \operatorname{div} \rho\mathbf{u} = 0, \qquad \rho\left(\partial\mathbf{u} / \partial t + (\mathbf{u}\nabla)\,\mathbf{u}\right) = -\nabla \cdot \hat{p} + \rho\mathbf{g}. \tag{13}$$

Здесь $\rho = \int_0^{\infty} dm\, m \int \varphi_m d\mathbf{v}$ — плотность массы, $\mathbf{u} = (1/\rho) \int_0^{\infty} dm\, m \int \mathbf{v} \varphi_m\, d\mathbf{v}$ — среднемассовая скорость, а $\hat{p}_{\alpha\beta} = \int_0^{\infty} dm\, m \int (v - u)_\alpha (v - u)_\beta \varphi_m d\mathbf{v}$ — тензор давления, для которого, в свою очередь, из (5) получим

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}\nabla \right) p_{\alpha\beta} + p_{\alpha\beta} \operatorname{div}\mathbf{u} + p_{\alpha\gamma} \nabla_\gamma u_\beta + p_{\beta\gamma} \nabla_\gamma u_\alpha = -\nabla_\gamma q_{\gamma\alpha\beta} + C_{\alpha\beta}, \tag{14}$$

где $q_{\alpha\beta\gamma} = \int\limits_0^\infty dm\, m \int (v-u)_\alpha (v-u)_\beta (v-u)_\gamma \varphi_m d\mathbf{v}$ — тензор тепловых потоков, а $C_{\alpha\beta}$ — член со столкновениями, равный

$$C_{\alpha\beta} = \int\limits_0^\infty dm\, m \int v_\alpha v_\beta S_m(\varphi)\, d\mathbf{v} = \iint\limits_0^\infty dm\, dm' \iint d\mathbf{v} d\mathbf{v}' \varphi_m(\mathbf{v})\, \varphi_{m'}(\mathbf{v}') \times$$
$$\times |\mathbf{v} - \mathbf{v}'|\, \sigma_{m,m'} \left\{ \frac{1/2}{m+m'} (mv + m'v')_\alpha (mv + m'v')_\beta - mv_\alpha v_\beta \right\} \qquad (15)$$

и принимающий особенно простой вид

$$C_{\alpha\beta} = -\xi \rho \hat{p}_{\alpha\beta} \qquad (16)$$

для модели (6). Ограничиваясь рассмотрением распределений $\varphi_m(\mathbf{v})$, у которых все третьи моменты равны нулю $q_{\alpha\beta\gamma} = 0$, получим замкнутую систему (13), (14), (16), сходную с обычными уравнениями гидродинамики. Аналогичная модель с $q_{\alpha\beta\gamma} = 0$ успешно используется, например, в теории бесстолкновительной высокотемпературной плазмы ([5]).

4. Используя полученные уравнения, рассмотрим эволюцию невращающегося сферического облака, в котором из соображений симметрии очевидно имеем

$$\mathbf{u} = (\mathbf{r}/r) u, \quad p_{\alpha\beta} = r_\alpha r_\beta r^{-2} p_\parallel + (\delta_{\alpha\beta} - r_\alpha r_\beta r^{-2}) p_\perp, \qquad (17)$$

и тогда систему (13), (14) можно записать в виде

$$\frac{d}{dt} \ln(\rho r^2) = -\frac{\partial u}{\partial r}, \quad \rho \frac{d}{dt} u = \rho g + 2\frac{p_\perp - p_\parallel}{r} - \frac{\partial p_\parallel}{\partial r},$$
$$\frac{d}{dt} \ln(r^2 p_\perp / \rho) = \frac{d}{dt} \ln(p_\parallel / \rho^3 r^4) = -\xi\rho, \qquad (18)$$

где $d/dt = \partial/\partial t + u\, \partial/\partial r$. Отсюда следует $p_\parallel = \mathrm{const}\, p_\perp \rho^2 r^6$, и в типичном случае при малых ρ радиальным давлением $p_\parallel$ можно пренебречь по сравнению с величиной $p_\perp$, соответствующей круговому движению частиц вокруг Солнца. Пренебрегая в уравнении движения также инерционным членом $\rho\dot{u}$, получим $p_\perp / \rho = -rg/2 = GM_\odot / 2r$ и из уравнения для $p_\perp$ находим скорость оседания $u = -\xi r \rho(r, t)$, подставляя которую в уравнение непрерывности, получим

$$\frac{\partial}{\xi\, \partial t} \rho = \frac{\partial}{r^2 \partial r} (r^3 \rho^2). \qquad (19)$$

Зная распределение плотности $\rho(r, 0) = \rho_0(r)$ при $t = 0$, можно представить общее решение (19) в виде

$$\rho(r, t) = [1 + 3\xi t \rho(r, t)]\, \rho_0(r[1 + 3\xi t \rho(r, t)]^{2/3}). \qquad (20)$$

В частности, при $\rho_0(r) \sim r^{-3/2}$ плотность $\rho(r, t)$ не меняется во времени и в системе существует стационарный поток вещества вниз по радиусу за счет запасов массы на периферии. Для степенной зависимости $\rho_0(r) \sim r^{-q}$ получим нарастание плотности во времени при $q < 3/2$, например,

$$\rho(r, t) = \rho_0 / (1 - 3\xi t \rho_0) \ \text{при}\ \rho_0(r) = \mathrm{const} \quad (q = 0); \qquad (21)$$

и убывание при $q > 3/2$, например,

$$\rho(r, t) = \rho_0(r) \left[\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 3\xi t \rho_0(r)} \right]^{-1} \ \text{при}\ \rho_0(r) \sim r^{-3} \quad (q = 3). \qquad (22)$$

При $t \to \infty$ из общего решения (20) следует асимптотика $\rho(r, t) \approx f(t) r^{-3/2}$.

Автор весьма признателен академику М. А. Леонтовичу за дискуссии по данной работе.

Институт атомной энергии
им. И. В. Курчатова
Москва

Поступило
1 VII 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. С. Сафронов, Эволюция допланетного облака и образование Земли и планет, «Наука», 1969. [2] М. Смолуховский, Сборн. Броуновское движение, 1936, стр. 403. [3] В. С. Сафронов, ДАН, 147, 64 (1962). [4] Б. А. Трубников, ДАН, 196, № 6 (1971). [5] G. Chew, M. Goldberger, F. Low, Proc. Roy. Soc., 236, 112 (1956).