

В. А. ПЕРЕПЕЛИЦА

О ДВУХ ЗАДАЧАХ ИЗ ТЕОРИИ ГРАФОВ

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 24 III 1970)

1. Задача нахождения минимального гамильтонова контура со взвешенными дугами. Контур называется гамильтоновым, если он проходит через все вершины графа, притом только по одному разу ⁽¹⁾. Пусть в ориентированном графе $G(U)$ с n вершинами и множеством дуг U каждой дуге $u_{ij} \in U$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, приписан вес ρ_{ij} , где ρ_{ij} — натуральные числа из отрезка $[1, r]$. Для фиксированных n и r множество всех таких графов $G(U)$ без петель обозначим через $\mathcal{A}_{n, r}$. Требуется на $G(U)$ выделить гамильтонов контур K такой, чтобы его вес $\sum_{u_{ij} \in K} \rho_{ij}$ был минимальным.

Если n невелико, то указанный минимальный гамильтонов контур K можно находить с помощью алгоритмов решения задачи коммивояжера ^(2, 3) *. В ⁽³⁾ алгоритм использует память $\sim n2^n$ ячеек и затрачивает операций $\sim n^2 2^n$, в ⁽²⁾ эти величины имеют порядок соответственно n и 4^n . В настоящей работе предлагается достаточно простой алгоритм $\mathcal{A}_\Phi$, который при выполнении определенных ограничений на r «почти всегда» позволяет выделить на $G(U)$ минимальный гамильтонов контур. Устанавливается также, что «почти все» ориентированные (неориентированные) графы содержат гамильтоновы контуры (циклы).

Опишем алгоритм $\mathcal{A}_\Phi$; через Φ обозначим произвольную, растущую функцию от n , $\frac{\partial}{\partial n} \Phi > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi = \infty$. Полагаем, что в $G(U)$ вершины перенумерованы числами $i = 1, 2, \dots, n$; $V^+(V^-)$ обозначает множество четных (нечетных) вершин в $G(U)$; $V_s^\Delta = V^\Delta \setminus V(L_{s-1})$, $\Delta \in \{+, -\}$, где $V(L_{s-1})$ — множество вершин, принадлежащих пути $L_{s-1} = [i_1, i_2, \dots, i_s]$ длины $s-1$; $L_0 = i_1$. Алгоритм $\mathcal{A}_\Phi$ состоит из $n-1$ шагов, перенумерованных числами $s = 1, 2, \dots, n-1$, и разбивается на два этапа: 1 и 2.

Этап 1 состоит из 2μ шагов, где $\mu = \left\lfloor \frac{n}{2} \left(1 - \frac{1}{\Phi}\right) \right\rfloor$. На первом шаге $\mathcal{A}_\Phi$ фиксирует вершину $i_1 = 1$ и ищет первую по порядку вершину $i_2 \in V^-$, $i_2 \neq i_1$, для которой в $G(U)$ содержится такая дуга $u_{i_1 i_2}$, что $\rho_{i_1 i_2} = \min_{i \in V_1^-} \rho_{i_1 i}$.

Путь $L_1 = u_{i_1 i_2}$ длины 1 считается построенным. Пусть на шаге $s-1$ выделен путь L_{s-1} длины $s-1$, который начинается с вершины $i_1 = 1$ и заканчивается вершиной i_s . Если $s \leq \mu-1$ ($\mu \leq s \leq 2\mu$), то на шаге s выбирается первая по порядку дуга $u_{i_s i_{s+1}}$ такая, что $i_{s+1} \in V_s^-$ и $\rho_{i_s i_{s+1}} = \min_{i \in V_s^-} \rho_{i_s i}$ ($i_{s+1} \in V_s^+$ и $\rho_{i_s i_{s+1}} = \min_{i \in V_s^+} \rho_{i_s i}$). После этого $u_{i_s i_{s+1}}$

присоединяется к L_{s-1} : путь L_s длины s построен, следует переход к $(s+1)$ -му шагу. Если ни для одной из указанных вершин i_{s+1} в $G(U)$ не существует никакой дуги $u_{i_s i_{s+1}}$, то $\mathcal{A}_\Phi$ прекращает работу на s -м шаге. Результатом этапа 1 является путь $L_{2\mu}$, который начинается с вершины i_1 и заканчивается вершиной $i_{2\mu+1}$.

* Сформулированную задачу можно решать известным методом «ветвей и границ» ⁽⁴⁾, для которого, однако, нет оценок.

Этап 2 начинается с шага $s = 2\mu + 1$, на котором $\mathcal{A}_\varphi$ ищет такую вершину $i_{2\mu+2} \in (V \setminus V(L_{2\mu}))$, что существует пара дуг $u_{i_{2\mu+1}i_{2\mu+2}}, u_{i_{2\mu+2}i_s}$ с весом $(\rho_{i_{2\mu+1}i_{2\mu+2}} + \rho_{i_{2\mu+2}i_s}) = \min_{i \in (V \setminus V(L_{2\mu}))} (\rho_{i_{2\mu+1}i} + \rho_{ii})$. Указанная пара дуг

замыкает $L_{2\mu}$ в контур $K_{2\mu+2}$ длины $2\mu + 2$. Пусть на $(s - 1)$ -м шаге этапа 2, $2\mu + 2 \leq s \leq n - 1$, выделен элементарный контур K_s , состоящий из s дуг u_{ikjk} , $k = 1, 2, \dots, s$, и пусть i_s — первая по порядку вершина, не принадлежащая K_s . Тогда на s -м шаге $\mathcal{A}_\varphi$ ищет первую по порядку дугу $u_{ikjk} \in K_s$ такую, что выполняются условия: в $G(U)$ существует пара дуг u_{ikis}, u_{isjk} и величина $(\rho_{ikis} + \rho_{isjk} - \rho_{ikjk})$ минимальна. После чего пара u_{ikis}, u_{isjk} присоединяется к контуру K_s , а дуга u_{ikjk} вычеркивается из K_s : элементарный контур K_{s+1} построен, следует переход к $(s + 1)$ -му шагу. На s -м шаге этапа 2 $\mathcal{A}_\varphi$ заканчивает свою работу в двух случаях: либо когда для вершины i_s в $G(U)$ не найдется никакой пары дуг u_{ikis}, u_{isjk} , либо при $s = n$, поскольку K_n является гамильтоновым контуром.

Нетрудно видеть, что для всякого графа $G(U) \in \mathfrak{A}_{n,r}$ алгоритм $\mathcal{A}_\varphi$ использует порядка n^2 ячеек памяти и порядка n^2 операций. Все рассматриваемые ниже модификации $\mathcal{A}_\varphi$ ($\mathcal{A}^{(n)}$, $\mathcal{A}_\varphi^*$ и $\mathcal{A}(W)$) имеют такую же эффективность.

Будем считать, что величина r , вообще говоря, является функцией от n : $r = r(n)$; причем, всегда $r(n) \geq 1$. Мощность любого множества E обозначим через $|E|$; $|\mathfrak{A}_{n,r}| = ([r])^{n^2-n}$. Пусть дана последовательность $\mathfrak{A}_{n,r}$, $n = 1, 2, \dots$, где $r = r(n)$, и пусть $\mathfrak{A}_{n,r}^{(\omega)}$ обозначает множество всех графов $G(U) \in \mathfrak{A}_{n,r}$, обладающих некоторым свойством ω_n . Будем говорить, что почти все графы $G(U)$ из $\mathfrak{A}_{n,r}$ обладают свойством ω_n , если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\mathfrak{A}_{n,r}^{(\omega)}|}{|\mathfrak{A}_{n,r}|} = 1.$$

Теорема 1. Для произвольной функции $r(n)$ $\mathcal{A}_\varphi$ находит гамильтонов контур для почти всех графов $G(U) \in \mathfrak{A}_{n,r}$.

Следствие 1. Для любого $r = r(n)$ почти все графы из $\mathfrak{A}_{n,r}$ обладают гамильтоновыми контурами.

Следствие 2. Почти все графы $G(U) \in \mathfrak{A}_{n,r}$ сильно связны. Пусть $c_1 = 1/\sqrt{2}$; $c_2 = \sqrt{2}$.

Теорема 2. Если $r \leq c_1 \sqrt{n/\ln n}$, то для почти всех графов $G(U) \in \mathfrak{A}_{n,r}$ $\mathcal{A}_\varphi$ находит минимальный гамильтонов контур.

Пусть $\mathcal{A}_\varphi$ выделяет в $G(U) \in \mathfrak{A}_{n,r}$ некоторый гамильтонов контур K_n , вес которого обозначим $\sigma_\varphi = \sum_{ij \in K_n} \rho_{ij}$. Вес минимального гамильтонова

контура, содержащегося в $G(U)$, обозначим через σ . Если существует последовательность ε_n , $n = 1, 2, \dots$, $\varepsilon_n \geq 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$, для которой свой-

ство $\sigma_\varphi \leq (1 + \varepsilon_n)\sigma$ выполняется для почти всех графов $G(U) \in \mathfrak{A}_{n,r}$, то будем говорить, что $\mathcal{A}_\varphi$ почти всегда приводит к асимптотически точному решению. Обозначим через $\mathcal{A}^{(n)}$ такой алгоритм $\mathcal{A}_\varphi$, в котором

$$\mu = \left\lfloor \frac{n}{2} - \varphi_n \right\rfloor, \text{ где } \varphi_n \text{ — растущая функция от } n, \varphi_n \leq \ln \ln n; \quad \frac{\partial}{\partial n} \varphi_n > 0.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \infty.$$

Теорема 3. Если $r \leq \frac{n}{\ln n \varphi_n}$, то алгоритм $\mathcal{A}^{(n)}$ почти всегда приводит к асимптотически точному решению.

Нашу задачу рассмотрим в следующей вероятностной постановке. Пусть в ориентированном n -вершинном графе G для каждой пары вершин i, j ; $i, j = 1, 2, \dots, n$, дуга u_{ij} появляется с вероятностью $1 - q$, $0 \leq q < 1$, независимо от других дуг.

Теорема 4. Если $q \leq 1 - c_2 \sqrt{\ln n / n}$, то с вероятностью $P \geq 1 - \delta$, $\delta \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, алгоритм $\mathcal{A}_\Phi$ выделяет в G гамильтонов контур.

Условимся через G_n обозначать такой граф G , в котором, если содержится дуга u_{ij} , то ей с (условной) вероятностью p_v приписывается вес

$\rho_{ij} = v$, $v = 1, 2, \dots, r$; $\sum_{v=1}^r p_v = 1$. Вообще говоря, величины q и p_v , $1 \leq v \leq r$, являются функциями от n : $q = q(n)$ и $p_v = p_v(n)$. Интегральную функцию распределения обозначим $F_v = \sum_{t=1}^v p_t$; $F_0 = 0$. Граф вида G_n условимся называть вероятностным.

Теорема 5. Если $p_1 \geq c_2 \sqrt{\ln n / n}$, то с вероятностью $P \geq 1 - \delta_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$, алгоритм $\mathcal{A}_\Phi$ выделяет в G_n минимальный гамильтонов контур.

Введем следующие обозначения: параметр α пробегает значения

$2, 3, \dots, 2r$; $p_\alpha^* = \sum_{v=1}^{\alpha-1} p_v p_{\alpha-v}$, если $\alpha \leq r+1$, и

$$p_\alpha^* = \sum_{t=0}^{2r-\alpha} p_{\alpha-r+t}, \quad p_{r-t}^*, \text{ если } r+2 \leq \alpha \leq 2r; \quad \Phi_\alpha = \sum_{v=2}^{\alpha} p_v^*;$$

$$\Phi_1 = 0; \quad Q = 2q(1-q) + q^2;$$

$$f(\Phi; p_1, \dots, p_r) = 2 \sum_{v=1}^{r-1} \frac{(1 - (1-q)F_v)^{n/2\varphi}}{(1-q)F_v} + 2 \sum_{\alpha=2}^{2r-1} \frac{(1 - (1-Q)\Phi_\alpha)^{1/\varphi}}{(1-Q)\Phi_\alpha} + \\ + \sum_{\alpha=2}^{2r-1} (1 - (1-Q)\Phi_\alpha)^{n/2\varphi};$$

$\psi(n)$ — произвольная, растущая с n функция,

$$\frac{\partial}{\partial n} \psi(n) > 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \psi(n) = \infty.$$

Теорема 6. Если в условиях теоремы 4 $r \leq \frac{n}{\ln \psi(n)}$ и распределение вероятностей для весов ρ_{ij} удовлетворяет неравенству $f(\Phi; p_1, \dots, p_r) \leq n / \psi(n)$, то примененный к графу G_n алгоритм $\mathcal{A}_\Phi$ приводит с вероятностью $P \geq 1 - \delta_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$, к асимптотически точному решению.

Сформулированные выше результаты справедливы также для случая, когда веса ρ_{ij} принимают целочисленные значения из отрезка $[r_1, r_2]$, где r_1 ограничено снизу положительной константой, $r = r_2 - r_1$.

Пусть $\mathcal{A}_{n,r}$ означает множество всех неориентированных n -вершинных графов $G(\bar{U})$, у которых ребрам $\bar{u}_{ij} \in \bar{U}$ приписаны веса ρ_{ij} , ρ_{ij} — натуральные числа из $[1, r]$, и пусть $\tilde{G}_n$ обозначает неориентированный вероятностный n -вершинный граф со взвешенными ребрами. Алгоритм $\mathcal{A}_\Phi$ годится для выделения минимальных гамильтоновых циклов на $\tilde{G}(\bar{U}) \in \mathcal{A}_{n,r}$ и на $\tilde{G}_n$. В этом случае справедливы все сформулированные выше теоремы 1 ÷ 6 и следствия 1 и 2, с той лишь разницей, что константы c_1 и c_2 заменяются соответственно на константы $\tilde{c}_1 = 1/2$ и $\tilde{c}_2 = 2$, а обозначения $G(U)$,

$\mathfrak{A}_n, r, G_n$ и термин «контур» заменяются соответственно на обозначения $\tilde{G}(\tilde{U})$, $\tilde{\mathfrak{A}}_{n, r}, \tilde{G}_n$ и термин «цикл».

Обозначим через $\mathcal{A}_\Phi^*$ такой алгоритм $\mathcal{A}_\Phi$, который «пропускает» $(2\mu + 1)$ -й шаг, т. е. не замыкает путь $L_{2\mu}$ в контур $K_{2\mu+2}$. Тогда алгоритм $\mathcal{A}_\Phi^*$ будет находить минимальный (т. е. имеющий минимальный вес) гамильтонов путь на ориентированных графах со взвешенными дугами и минимальную гамильтонову цепь на неориентированных графах со взвешенными ребрами. Относительно минимальных гамильтоновых путей и цепей имеют место утверждения, аналогичные теоремам 1 ÷ 6.

II. Задача о минимальном покрытии графа ребрами. Покрытием графа $\tilde{G}(\tilde{U})$ называется такое множество ребер $W \subset \tilde{U}$, что каждая вершина из $\tilde{G}(\tilde{U})$ инцидентна хотя бы одному ребру из W ⁽¹⁾. Из аналога следствия 1 для неориентированных графов следует, что для произвольной функции $r(n)$ доля графов $\tilde{G}(\tilde{U}) \in \tilde{\mathfrak{A}}_{n, r}$, обладающих покрытием, стремится к 1 с ростом n .

Будем рассматривать множество $\tilde{\mathfrak{A}}_{n, 1}$ всех n -вершинных неориентированных графов без петель, у которых ребра не имеют весов или, что то же самое, $\rho_{ij} = 1$ для всякого $\tilde{u}_{ij} \in \tilde{U}$. Покрытие W с наименьшим числом $|W|$ ребер называется минимальным (для $\tilde{G}(\tilde{U}) \in \tilde{\mathfrak{A}}_{n, 1}$) и обозначается $m(\tilde{G}(\tilde{U}))$. В работе ⁽⁵⁾ приводится алгоритм построения асимптотически минимального покрытия и доказывается, что для почти всех $\tilde{G}(\tilde{U}) \in \tilde{\mathfrak{A}}_{n, 1}$ $\tilde{m}(\tilde{G}(\tilde{U})) \leq \frac{n+1}{2} + \log n$. Этот результат можно усилить.

Теорема 7. Для почти всех $\tilde{G}(\tilde{U}) \in \tilde{\mathfrak{A}}_{n, 1}$ число ребер в минимальном покрытии равно $[(n+1)/2]$.

Пусть $\mathcal{A}(W)$ обозначает алгоритм, который сначала работает как $\mathcal{A}_\Phi$, а после выделения гамильтонова цикла (контура) вычеркивает в нем каждое второе (считая по порядку) ребро (дугу).

Теорема 8. Для почти всех $\tilde{G}(\tilde{U}) \in \tilde{\mathfrak{A}}_{n, 1}$ алгоритм $\mathcal{A}(W)$ находит минимальное покрытие.

Пусть $\mathfrak{N}$ обозначает множество всех неизоморфных n -вершинных неориентированных графов без петель (ребра не взвешены). В ⁽⁵⁾ теорема 4 утверждает, что для почти всех неизоморфных графов $G \in \mathfrak{N}$ величина $m(G) \sim n/2$. Этот результат можно усилить.

Теорема 9. Для почти всех графов из $\mathfrak{N}$ число ребер в минимальном покрытии равно $[(n+1)/2]$.

Теорема 10. Почти все графы из $\mathfrak{N}$ обладают гамильтоновыми циклами.

Утверждения, аналогичные теоремам 7 и 8, имеют место также для ориентированных графов. В ⁽⁴⁾, стр. 42 формулируется так называемая взвешенная задача о покрытии. Решение этой задачи заключается в минимизации суммы весов ребер (дуг), входящих в покрытие, и его можно получить с помощью алгоритма $\mathcal{A}(W)$. Если взвешенную задачу о покрытии рассматривать применительно к графам со взвешенными ребрами (дугами), то относительно алгоритма справедливы утверждения, аналогичные теоремам 2 ÷ 6.

В заключение автор выражает благодарность Н. И. Глебову и В. К. Леонтьеву за ценные советы и внимание к работе.

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
19 III 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ К. Берж, Теория графов и ее применения, М., 1962. ² В. К. Коробков, Р. Е. Кричевский, Сборн. Математические модели и методы оптимального планирования, Новосибирск, 1966, стр. 10. ³ М. Хелд, Р. М. Карп, Кибернетический сборник, 9, 202 (1961). ⁴ А. А. Корбут, Ю. Ю. Финкельштейн, Дискретное программирование, «Наука», М., 1969. ⁵ Р. Г. Нигматуллин, Проблемы кибернетики, 21, 241 (1969).