

В. И. ПОЛЕЖАЕВ, М. П. ВЛАСЮК

О ЯЧЕЙКОВОЙ КОНВЕКЦИИ В БЕСКОНЕЧНО ДЛИННОМ ГОРИЗОНТАЛЬНОМ СЛОЕ ГАЗА, ПОДОГРЕВАЕМОМ СНИЗУ

(Представлено академиком Г. И. Петровым 19 V 1970)

1. Рассматривается течение и перенос тепла в бесконечно длинном горизонтальном слое газа высотой H , ограниченного твердыми поверхностями, в поле внешней массовой силы, создающей ускорение g (рис. 1). На нижней поверхности при $y=0$ поддерживается постоянной температура T_2 , на верхней — температура T_1 , причем $T_2 > T_1$. Таким образом, газ нагревается снизу и его гидростатическое равновесие в поле внешней силы

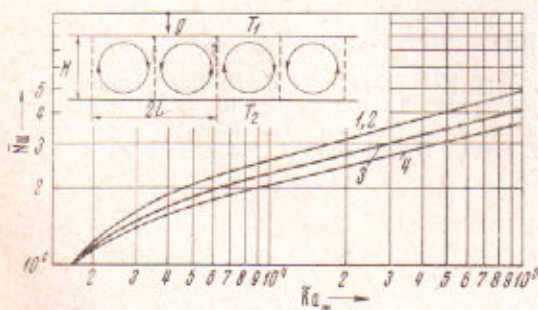


Рис. 1. Средняя теплопередача через слой в зависимости от числа Рэлея, определенного с поправкой на величину адиабатического градиента температуры. 1 — $\xi = 1,4$; $K = 0,04$; 2 — $\xi = 1,0$; $K = 0$; 3 — $\xi = 1,4$; $K = 0,2$; 4 — $\xi = 1,66$; $K = 0,33$

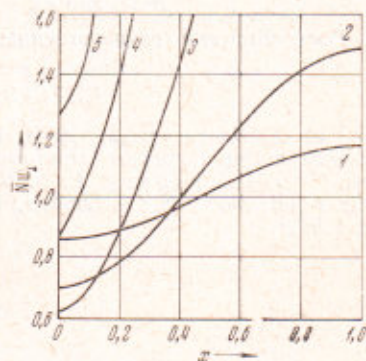


Рис. 2. Распределение местного числа Нуссельта на нижней стенке. 1 — $Ra_m = 1775$; 2 — $Ra_m = 1880$; 3 — $Ra_m = 3135$; 4 — $Ra_m = 10450$; 5 — $Ra_m = 52250$

может быть неустойчивым. Условия устойчивости газа, подогреваемого снизу, могут быть получены исходя из линеаризованных уравнений гидродинамики и переноса тепла. Возникновение конвекции в жидкостях определяется числом Рэлея и происходит при $Ra > Ra_{кр}$. В предположении периодичности возмущений, выводящих систему из состояния равновесия при линейном начальном профиле температуры, критическое число Рэлея $Ra_{кр}$ для слоя, ограниченного твердыми поверхностями, вычислено, исходя из линеаризованных уравнений Буссинеска, в работе (1) и равно 1708. Этому значению критического числа Рэлея соответствует в плоском случае длина волны возмущения $\lambda = L/H = 1,008$. Расчеты двумерной периодической ячейковой конвекции за порогом устойчивости при $L/H = 1$, исходя из нелинейных уравнений в приближении Буссинеска, выполнены в работах (2, 3, 15).

Вопрос о возникновении конвекции и об особенностях теплопередачи в газах за порогом устойчивости связан с анализом уравнений сжимаемого газа и значительно менее изучен. Необходимое условие возникновения конвекции в предположении адиабатического смещения частицы из состояния равновесия в пренебрежении вязкостью и теплопроводностью может быть получено из простых термодинамических соображений без

привлечения уравнений движения ⁽⁴⁾ и имеет вид $K < 1$, где K — отношение адиабатического градиента температуры к действительному градиенту.

Джефрисом ⁽⁵⁾ несколько расширена область применения уравнений Буссинеска за счет учета в уравнении переноса тепла работы сил сжатия. Условие возникновения конвекции в этом случае имеет вид $\tilde{Ra} > \tilde{Ra}_{кр}$, где

$$\tilde{Ra} = \frac{g\beta H^4}{\nu a} \left[\left(\frac{dT}{dy} \right) - \left(\frac{dT}{dy} \right)_{ад} \right] = Ra(1 - K).$$

Однако условия применимости этого приближения, в особенности для развитого движения за порогом устойчивости, мало изучены. В общем случае сжимаемого и вязкого газа возникновение конвекции определяется более сложным условием $Ra(K)$. Для случая конвекции в ячейке, ограниченной твердыми поверхностями при $L/H = 1$ зависимость $Ra(K)$ найдена в работе ⁽⁶⁾ путем численного решения полных уравнений Навье — Стокса сжимаемого газа.

2. Предполагая коэффициенты вязкости μ и теплопроводности k постоянными, запишем исходные уравнения в виде (обозначения общепринятые)

$$\rho(\partial V / \partial t + V \nabla V) = -\nabla P + \rho g + \mu \nabla^2 V + 1/3 \mu \nabla(\nabla V), \quad (1)$$

$$\partial \rho / \partial t + \nabla(\rho V) = 0, \quad (2)$$

$$\rho C_v(\partial T / \partial t + V \nabla T) + P \nabla V = k \nabla^2 T + \mu \Phi, \quad (3)$$

$$P = \rho R T. \quad (4)$$

Здесь Φ — диссипативная функция.

Будем считать поля течения, температуры и плотности двумерными, периодическими в направлении, нормальном к направлению силы g ; рассмотрим ячейку шириной L , равной половине периода, с граничными условиями симметрии на боковых поверхностях, условиями прилипания и заданными постоянными температурами на твердых поверхностях $y = 0, H$.

Нетрудно найти систему критериев подобия, определяющих течение и перенос тепла, которую запишем в виде ⁽⁶⁾

$$Ra, K, Pr, C_F, \kappa. \quad (5)$$

Здесь $Pr = \nu / a$ — критерий Прандтля, $\kappa = c_p / c_v$ — отношение теплоемкостей, $C_F = gH / \kappa R T_1$ — критерий весовой сжимаемости, который определяет изменение плотности в зависимости от высоты H и величины ускорения силы тяжести g в соответствии с уравнением гидростатики и уравнением состояния газа. Критерий устойчивости K является комбинацией критериев κ , C_F и отношения температур T_2 / T_1 и может быть записан:

$$K = (\kappa - 1) C_F / (T_2 / T_1 - 1). \quad (6)$$

Кроме того, в принятой постановке задачи параметром является также безразмерная длина волны конвективного движения L/H . Нас будут интересовать в дальнейшем стационарные решения задачи (1) — (4), которые будем получать путем установления при решении нестационарной задачи разностным методом ⁽⁷⁾. Возбуждение за порогом устойчивости конвективных движений, имеющих периодическую структуру, достигалось путем внесения в начальное поле неподвижного газа несимметричных возмущений для выделения стационарного решения с одним вихрем в ячейке $L/H = 1$. Дальнейшее исследование проводилось при изменении L/H и критериев подобия (5), исходя из этих начальных данных. В расчетах использовалась равномерная разностная сетка с числом узлов в расчетной области 21×21 и 31×31 . Отличие соответствующих средних чисел Нуссельта, вычисленных на этих сетках при $Ra \leq 10^5$, составляло не более 3%. Невязки в интегральных балансах тепла при $Ra < 5 \cdot 10^4$ на стац-

нарном режиме не превосходили 1%. В расчетах были фиксированы числа $Pr = 1$ и $C_p = 0,05$ *.

3. Результаты расчета среднего числа Нуссельта $\bar{Nu} = q_w H / k(T_2 - T_1)$ в зависимости от числа $\tilde{Ra}_m = Ra_m(1 - K)$, т. е. с поправкой на величину адиабатического градиента, для стационарных движений за порогом устойчивости при $L/H = 1$ приведены на рис. 1. Значение Ra_m определялось по величинам, взятым в средней по высоте точке слоя. Кривые 1-4 соответствуют различным значениям κ и T_2/T_1 и охватывают диапазон κ для одноатомных и трехатомных газов при сверхадиабатических градиентах температуры ($K = 0 \div 0,3$). Пересечение кривых с горизонтальной линией $\bar{Nu} = 1$ определяет критическое число Рэлея, которое в рассмотрен-

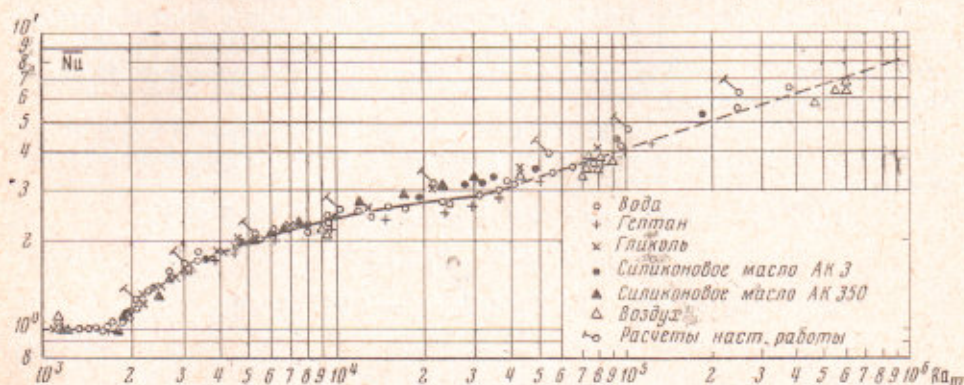


Рис. 3. Сопоставление результатов расчета средней теплопередачи через слой при $K = 0$ с опытными данными (^{9, 12, 14})

ном диапазоне критериев подобия (5) изменяется в пределах $(\tilde{Ra}_m)_{кр} = 1620 \div 1750$. При $K = 0$ значение $(\tilde{Ra}_m)_{кр}$ равно 1750, что согласуется с результатами опытов как с газами (⁸), так и с жидкостями (⁹) в пределах разброса этих опытных данных (в этих опытах значение K было не более 10^{-2}), однако, несколько выше значения числа $Ra_{кр} = 1708$, которое получается исходя из уравнений Буссинеска. При удалении от порога устойчивости средняя теплопередача (рис. 1) уже не определяется только числом $\tilde{Ra}$, а зависит и от других критериев подобия, характеризующих газ; в частности, теплопередача уменьшается при увеличении $K(\kappa)$.

4. При малых $Ra - Ra_{кр}$ тепловой поток от нагретой стенки на ее начальном участке вдоль течения выше, а вниз по течению — ниже, чем в том случае, когда конвекция полностью отсутствует и число $Nu_L = 1$ (рис. 2). Превышение потока тепла от нагретой стенки по всей ее поверхности, над потоком тепла, когда конвекция отсутствует, в действительности происходит только достаточно далеко от порога устойчивости и в диапазоне чисел Ra , где течение уже, по-видимому, турбулентно. Эта «неполнота смешения» является, по-видимому, общим свойством конвективных течений жидкостей и газов в замкнутых областях, подогреваемых снизу и сбоку (¹⁰), при малых числах Ra (или $Ra - Ra_{кр}$).

5. Опытные данные для теплопередачи через газовые слои имеются лишь для случая, когда градиент температуры намного больше адиабатического градиента и весовая сжимаемость практически отсутствует, т. е. в том случае, когда модели газа и жидкости эквивалентны. Однако, удовлетворительное согласование опытных данных с вычисленными, исходя из валиковой модели при соответствующих числах Ra , позволяет предполагать справедливость такой модели и в случаях, специфических для газа, в соответствующем диапазоне $\tilde{Ra}$.

* Это значение C_p соответствует не слишком глубоким слоям, в которых относительное изменение плотности в зависимости от давления составляет не более 5%.

Валиковая структура, согласно опытам, наблюдается в слоях жидкости и газа, заключенных между твердыми цилиндрическими дисками из хорошо проводящего материала ⁽¹¹⁾. Наиболее полные измерения средней теплопередачи в таких условиях выполнены Сильвестоном ⁽²⁾ * и Россби ⁽¹²⁾. В диапазоне $Ra_m \leq 5 \cdot 10^3$ результаты расчета хорошо согласуются с результатами измерений ^(9, 12, 14) и превышают их при дальнейшем увеличении числа Ra_m , причем относительная погрешность при числе $Ra_m = 10^5$ составляет около 15% (рис. 3). Это связано, по-видимому, с нарушением валиковой структуры течения вдали от порога устойчивости и переходом к турбулентному режиму течения. Аналогичный результат получен также в работах ^(2, 3) при сопоставлении результатов численных решений уравнений Буссинеска для ячейки $L/H = 1$ с данными Россби ⁽¹²⁾.

6. Диапазон применимости модели валиковой конвекции может быть несколько расширен, если учесть, что длина волны конвективных движений за порогом устойчивости изменяется. Применяемый метод анализа не позволяет ответить на вопрос, движения с какой длиной волны должны реализовываться, но дает возможность исследовать структуру течения и теплопередачу в ячейках в зависимости от длины волны. Эта зависимость для трех значений числа Рэлея за порогом устойчивости приведена на рис. 4. Пунктирными линиями отмечены значения числа Nu , соответствующие опытным данным. Отсюда видно, что максимальное значение средней теплопередачи при удалении от порога устойчивости смещается в сторону конвективных движений с меньшей длиной волны. Однако большинство авторов ^(9, 12, 13) отмечают, что в опытах длина волны за порогом устойчивости увеличивается. На рис. 4 видно, что вычисленные значения среднего числа Нуссельта при этом согласуются с измеренными вплоть до числа $Ra_m \approx 10^4$. Более подробное исследование структуры ячейковой конвекции содержится в работе ⁽¹⁶⁾.

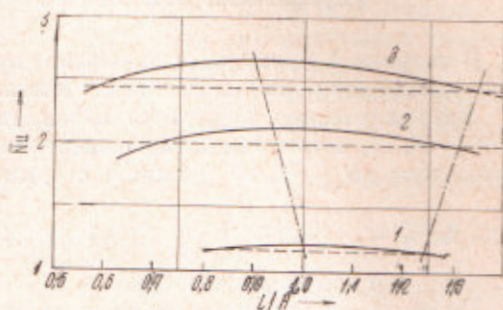


Рис. 4. Влияние длины волны конвективного движения на теплопередачу за порогом устойчивости. 1 — $Ra_m = 2090$; 2 — $Ra_m = 5225$; 3 — $Ra_m = 10450$

Институт прикладной математики
Академии наук СССР
Москва

Поступило
6 V 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ A. Pellow, R. V. Southwell, Proc. Roy. Soc., Ser. A, 176, 312 (1940).
² P. Schneek, G. Veronis, Phys. Fluids, 10, № 5, 927 (1967). ³ W. H. Plows, Phys. Fluids, 11, № 8, 1593 (1968). ⁴ K. Schwartschild, Göttingen, Nachrichten, 11 (1906). ⁵ H. Jeffreys, Proc. Camb. Phil. Soc., 26, 170 (1930).
⁶ В. И. Полежаев, Изв. АН СССР, Мех. жидкости и газа, № 6, 97 (1968).
⁷ В. И. Полежаев, Там же, № 2, 103 (1967). ⁸ H. A. Thompson, H. H. Sogin, J. Fluid Mech., 24, Part 3, 451 (1966). ⁹ P. L. Silveston, Forsch. Ing.-Wes., 24, H. 1, 2 (1958). ¹⁰ В. И. Полежаев, Изв. АН СССР, Мех. жидкости и газа, № 4 (1970). ¹¹ E. L. Koschmieder, Beitr. Phys. Atmos., 39, 1 (1966). ¹² H. T. Rossby, J. Fluid Mech., 36, Part 2, 309 (1969). ¹³ E. L. Koschmieder, J. Fluid Mech., 35, Part 3, 527 (1969). ¹⁴ W. Mull, H. Reiher, Beih. Gesundh.-Ing., Reihe 1, H. 28 (1930). ¹⁵ Д. Л. Шварцблат, Изв. АН СССР, Мех. жидкости и газа, № 5, 84 (1969). ¹⁶ М. П. Власюк, В. И. Полежаев, Препринт № 37, Инст. прикл. матем. АН СССР (1970).

* В опытах Сильвестона по визуализации течения отмечалась более сложная трехмерная структура течения, что, как показано в ⁽¹²⁾, было связано с влиянием плохо проводящей верхней поверхности из оргстекла, в то время как измерения теплопередачи выполнены с металлической верхней поверхностью.