Доклады Академии наук СССР
1971. Том 197, № 1

УДК 517.948.32 *МАТЕМАТИКА*

Б. М. БИЛЬМАН

ОБ УСЛОВИЯХ ПОЛНОЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ НЕКОТОРЫХ МНОГОМЕРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ОДНОРОДНЫМИ ЯДРАМИ

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 27 VII 1970)

В настоящей работе рассматриваются интегральные операторы вида

$$K\varphi = \int_{D_1} k(x, y)\,\theta(x, y)\,\varphi(y)\,dy, \quad x \in D_2,$$

где D_1 и D_2 — области n-мерного эвклидова пространства R_n, $n \geqslant 2$, пополненного бесконечно удаленной точкой, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$, $dy = dy_1, \ldots, dy_n$, $k(x, y)$ — измеримая ограниченная функция, $\theta(x, y)$ — измеримая функция, однородная со степенью $-n$, т. е. для всякого $t > 0$

$$\theta(tx, ty) \equiv \theta(tx_1, \ldots, tx_n, ty_1, \ldots, ty_n) = t^{-n}\theta(x, y). \tag{1}$$

Оператор K будет изучаться в пространствах $C_\mu(D)$, $M_\mu(D)$, $L_\mu^p(D)$, состоящих из функций $\varphi(x)$, определенных в области D (для C_μ область D предполагается замкнутой) и представимых в виде $\varphi(x) = |x|^{-\mu}\Phi(x)$, где μ — некоторое вещественное число, а $\Phi(x)$ соответственно непрерывна; измерима и почти везде ограничена; измерима и суммируема со степенью p, $1 \leqslant p < \infty$, причем

$$\|\varphi\|_{C_\mu} = \max_{x \in D} |\Phi(x)|, \quad \|\varphi\|_{M_\mu} = \operatorname*{vrai\,sup}_{x \in D} |\Phi(x)|,$$

$$\|\varphi\|_{L_\mu^p} = \left\{\int_D |\Phi(x)|^p\,dx\right\}^{1/p}.$$

Если начало координат принадлежит $\overline{D}$, то через $C_\mu{}^0(D)$ обозначается подпространство функций из $C_\mu(D)$, для которых $\Phi(0) = 0$, а через $M_\mu{}^0(D)$ — подпространство функций из $M_\mu(D)$, для которых $\lim\limits_{x\to 0}\Phi(x) = 0$.

Систематическое изучение оператора K в таких пространствах было начато Л. Г. Михайловым [1] с рассмотрения частных случаев, связанных с дифференциальными уравнениями с сингулярными коэффициентами. Впоследствии [2], рассматривая общее ядро, однородное со степенью $-n$, он показал, что если в дополнение к условию однородности (1) $\theta(x, y)$ инвариантна относительно всех вращений пространства R_n около начала координат и $|u|^{-\beta}\theta(I, u) \in L(R_n)$ $(I = (1, 0, \ldots, 0))$, то оператор K при $k(x, y) \equiv 1$ ограничен в C_β, $C_\beta{}^0$, M_β, $M_\beta{}^0$, $L^p_{\beta-n/p}$. Вместе с тем в [2] показано, что если начало координат является внутренней точкой областей D_1 и D_2, то оператор $K(k(x, y) \equiv 1)$, вообще говоря, не вполне непрерывен в указанных пространствах. Л. Г. Михайлов [2] исследовал также соответствующее двумерное интегральное уравнение второго рода для круга с центром в начале координат при $k(x, y) \equiv 1$.

Настоящая статья посвящена обобщению и развитию результатов [2]. Основная ее цель — указать условия, обеспечивающие полную непрерывность оператора K при отображении рассматриваемых пространств в себя. Полученные результаты позволяют при исследовании соответствующих интегральных уравнений второго рода переходить от круга (шара) к произвольной области и от $k(x, y) \equiv 1$ к случаю $k(x, y) \not\equiv 1$. Следует отметить, что в некоторых частных случаях условия полной непрерывности оператора K были установлены в ([1]).

Переходим к изложению полученных нами результатов.

Пусть l_x — вращение пространства R_n около начала координат, переводящее точку $x = (x_1, \ldots, x_n)$ в точку $x' = (|x|, 0, \ldots, 0)$, где $|x| = \left\{\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right\}^{1/2}$, и оставляющее неподвижными точки подпространства размерности $n - 2$, ортогонального к векторам x и x'; σ_x — преобразование подобия с центром в начале координат и коэффициентом $|x|^{-1}$; $\gamma_x = \sigma_x l_x$ — композиция этих преобразований.

Обозначим через G_1 наименьшее замкнутое множество, содержащее все области вида $\gamma_x(D_1)$, когда x пробегает D_2, а через G_2 — наименьшее замкнутое множество, содержащее все области вида $\gamma_y(D_2)$, когда y пробегает область D_1.

В дальнейшем кроме условия однородности (1) будут рассматриваться еще следующие условия на функцию $\theta(x, y)$:

$$\theta(l_x x, l_x y) = \theta(x, y); \tag{2}$$

$$\theta(l_y x, l_y y) = \theta(x, y). \tag{3}$$

Ясно, что условие инвариантности относительно всех вращений, которому подчинялась функция $\theta(x, y)$ в ([2]), обеспечивает выполнение каждого из условий (2), (3).

Положим еще

$$q_1(\beta) = \int_{G_1} |u|^{-\beta} |\theta(I, u)| \, du, \quad q_2(\beta) = \int_{G_2} |u|^{\beta - n} |\theta(u, I)| \, du,$$

$$I = (1, 0, \ldots, 0).$$

Теорема 1. *Пусть* $\theta(x, y)$ *удовлетворяет условиям* (1), (2), $q_1(\beta) < \infty$, $k(x, y)$ — *измеримая ограниченная функция такая, что для всякой конечной отличной от начала координат точки* $x_0 \in D_2$

$$\lim_{x \to x_0} \int_{D_1'} |k(x, y) - k(x_0, y)| \, dy = 0, \tag{4}$$

где D_1' — *любая ограниченная подобласть* D_1, *и существуют пределы* $\lim\limits_{x, y \to 0} k(x, y) = k(0, 0)$, *когда обе области* $\overline{D}_1$, $\overline{D}_2$ *содержат начало координат;* $\lim\limits_{|x|, |y| \to \infty} k(x, y) = k(\infty, \infty)$, *когда обе области неограничены.*

Тогда: a) *оператор K ограничен из* $C_\beta(D_1)$ *в* $C_\beta(D_2)$, *кроме, быть может, случаев, когда начало координат (бесконечно удаленная точка), являясь граничной точкой* D_1, *принадлежит* $\overline{D}_2$;

b) *если хотя бы одна из областей* $\overline{D}_1$, $\overline{D}_2$ *не содержит начало координат и, по крайней мере, одна из них ограничена, то оператор K вполне непрерывен из* $M_\beta(D_1)$ *в* $C_\beta(D_2)$.

Теорема 2. *Пусть* $\theta(x, y)$ *удовлетворяет условиям теоремы* 1, *а* $k(x, y)$ *измерима и ограничена.*

Тогда: a) *оператор K ограничен из* $M_\beta(D_1)$ *в* $M_\beta(D_2)$ *и из* $M_\beta^0(D_1)$ *в* $M_\beta^0(D_2)$, *причем* $\|K\| \leqslant q_1(\beta) \sup |k(x, y)|$;

b) *если, кроме того,*

$$\lim_{h \to 0} \int_{D_1'} |k(x, y + h) - k(x, y)| \, dy = 0 \tag{5}$$

равномерно относительно $x \in D_2'$, где D_1' — любая ограниченная подобласть D_1; D_2' — любая не содержащая начало координат ограниченная подобласть D_2, и выполнены условия пункта b) *теоремы* 1, *то оператор K вполне непрерывен из $M_\beta(D_1)$ в $M_\beta(D_2)$.*

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (1), (3), $q_2(\beta) < \infty$ *и $k(x, y)$ — измеримая ограниченная функция.*

Тогда: a) *оператор K ограничен из $L^1_{\beta-n}(D_1)$ в $L^1_{\beta-n}(D_2)$, причем* $\|K\| \leqslant q_2(\beta) \sup |k(x, y)|$;

b) *если помимо ограниченности функция $k(x, y)$ удовлетворяет условию*

$$\lim_{h\to 0} \int_{D_2} |k(x+h, y) - k(x, y)|\, dx = 0 \qquad (6)$$

равномерно относительно $y \in D_1'$, где D_1' — любая не содержащая начало координат ограниченная подобласть D_1; D_2' — любая ограниченная подобласть D_2, причем хотя бы одна из областей $\overline{D}_1$, $\overline{D}_2$, не содержит начало координат и, по крайней мере, одна из них ограничена, то оператор K вполне непрерывен из $L^1_{\beta-n}(D_1)$ в $L^1_{\beta-n}(D_2)$.

Доказательство теорем 2 и 3 в части, касающейся ограниченности оператора K, производится путем непосредственных оценок. Теорема 1 и утверждения о полной непрерывности, содержащиеся в теоремах 2, 3, доказываются с помощью аппроксимации в среднем функции $|u|^{-\beta}\theta(I, u)$ (в теоремах 1, 2) и $|u|^{\beta-n}\theta(u, I)$ (в теореме 3) непрерывными функциями.

Замечание 1. Пусть $\theta(x, y)$ удовлетворяет условиям теоремы 1, $k(x, y)$ — измеримая, ограниченная функция, $\varphi(x) \in M_\beta(D_1)$, $\omega(x) = K\varphi$, $\Omega(x) = |x|^\beta \omega(x)$.

Тогда: a) если $k(x, y)$ удовлетворяет условию (4), то $\Omega(x)$ непрерывна во всех конечных точках области D_2; кроме, быть может, начала координат;

b) если $\overline{D}_1$ не содержит начало координат, то $\lim\limits_{x\to 0} \Omega(x) = 0$. Аналогично, если область D_1 ограничена, то $\lim\limits_{|x|\to\infty} \Omega(x) = 0$;

c) пусть начало координат принадлежит обеим областям $\overline{D}_1$, $\overline{D}_2$, являясь внутренней точкой для D_1, и существуют пределы $\lim\limits_{x,y\to 0} k(x, y) = k(0, 0)$, $\lim\limits_{x\to 0} \Phi(x) = \lim\limits_{x\to 0} |x|^\beta \varphi(x) = \Phi(0)$. Тогда

$$\lim_{x\to 0} \Omega(x) = \Omega(0) = \Phi(0)\, k(0, 0) \int_{R_n} |u|^{-\beta}\theta(I, u)\, du.$$

Аналогично для бесконечно удаленной точки

$$\lim_{|x|\to\infty} \Omega(x) = \Omega(\infty) = \Phi(\infty)\, k(\infty, \infty) \int_{R_n} |u|^{-\beta}\theta(I, u)\, du.$$

Указанные свойства * показывают, что наряду с рассмотренными выше пространствами существует еще ряд подпространств из M_β, инвариантных относительно оператора K.

Теорема 4. *Пусть $\theta(x, y)$ удовлетворяет условиям* (1), (2), (3), $q_1(\beta) < \infty$, $q_2(\beta) < \infty$, *а $k(x, y)$ — измеримая ограниченная функция.*

Тогда: a) *оператор K ограничен из $L^p_{\beta-n/p}(D_1)$ в $L^p_{\beta-n/p}(D_2)$, $p > 1$, причем*

$$\|K\| \leqslant \{q_1(\beta)\}^{1/p'} \{q_2(\beta)\}^{1/p} \sup |k(x, y)|, \quad 1/p + 1/p' = 1;$$

---

* Свойство c) при $k(x, y) \equiv 1$ было установлено в ([2]).

b) *если хотя бы одна из областей* $\overline{D}_1$, $\overline{D}_2$ *не содержит начало координат и, по крайней мере, одна из них ограничена, то оператор* K *вполне непрерывен из* $L^p_{\beta-n/p}(D_1)$ *в* $L^p_{\beta-n/p}(D_2)$, $p > 1$.

Доказательство пункта а) проводится путем непосредственных оценок с использованием неравенства Гёльдера. Доказательство пункта b) опирается на некоторые общие свойства операторов в пространствах суммируемых функций [4].

На основании сформулированных теорем подобно [5] доказываются следующие утверждения, дающие условия полной непрерывности оператора K в тех случаях, когда обе области $\overline{D}_1$, $\overline{D}_2$ содержат начало координат или обе неограничены.

Теорема 5. *Пусть* $\theta(x, y)$ *удовлетворяет условиям* (1), (2), $q_1(\beta) < \infty$, $k(x, y)$ — *измеримая ограниченная функция и* $\lim\limits_{x,y\to 0} k(x, y) = 0$, *когда обе области* $\overline{D}_1$, $\overline{D}_2$ *содержат начало координат*: $\lim\limits_{|x|,|y|\to\infty} k(x, y) = 0$, *когда обе области неограничены.*

Тогда: а) *если* $k(x, y)$ *удовлетворяет условию* (4), *то оператор* K *вполне непрерывен из* $M_\beta(D_1)$ в $C^0{}_\beta(D_2)$;

b) *если* $k(x, y)$ *удовлетворяет условию* (5), *то оператор* K *вполне непрерывен из* $M_\beta(D_1)$ в $M^0{}_\beta(D_2)$.

Теорема 6. *Пусть* $k(x, y)$ — *измеримая ограниченная функция и* $\lim\limits_{x,y\to 0} k(x, y) = 0$, *когда области* $\overline{D}_1$, $\overline{D}_2$ *содержат начало координат;* $\lim\limits_{|x|,|y|\to\infty} k(x, y) = 0$, *когда обе области неограничены.*

Тогда: а) *если* $\theta(x, y)$ *удовлетворяет условиям теоремы* 4, *то оператор* K *вполне непрерывен из* $L^p_{\beta-n/p}(D_1)$ *в* $L^p_{\beta-n/p}(D_2)$, $p > 1$;

b) *если* $\theta(x, y)$ *удовлетворяет условиям теоремы* 3, *а* $k(x, y)$ — *условию* (6), *то оператор* K *вполне непрерывен из* $L^1_{\beta-n}(D_1)$ *в* $L^1_{\beta-n}(D_2)$.

Замечание 2. Если $\theta(x, y)$ имеет вид $\theta(|x|, y)$, то теоремы 1, 2, 5 верны без требования (2). При этом в качестве G_1 следует взять наименьшее замкнутое множество, содержащее все области вида $\sigma_x(D_1)$. Интегральные уравнения с такими ядрами в шаре были исследованы в [6].

Замечание 3. Вместо областей D_1 и D_2 можно рассматривать произвольные измеримые множества.

В заключение отметим, что результаты, полученные в [5] для одномерного случая, остаются в силе, если вместо указанных там условий функция $k(x, y)$ удовлетворяет более слабым условиям настоящей статьи.

Автор благодарит профессора Л. Г. Михайлова за научное руководство, А. И. Ачильдиева и З. Д. Усманова за полезное обсуждение данной работы.

Отдел математики с вычислительным центром
Академии наук ТаджССР
Душанбе

Поступило
19 VI 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. Г. Михайлов, Новый класс особых интегральных уравнений и его применения к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами, Душанбе, 1963. [2] Л. Г. Михайлов, ДАН, 176, № 2 (1967). [3] Л. Г. Михайлов, ДАН, 190, № 2, (1970). [4] М. А. Красносельский, П. П. Забрейко и др., Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций, «Наука», 1966. [5] Л. Г. Михайлов, Б. М. Бильман, Докл. АН ТаджССР, 8, № 9 (1965). [6] Л. Г. Михайлов, Докл. АН ТаджССР, 11, № 6 (1968).