Доклады Академии наук СССР
1970. Том 195, № 4

УДК 519.27:531.395

МАТЕМАТИКА

М. В. ЛЕВИТ

ЧАСТОТНЫЕ УСЛОВИЯ АБСОЛЮТНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ СО СЛУЧАЙНЫМ ВНЕШНИМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 5 V 1969)

1°. Рассмотрим интегральное уравнение, описывающее систему управления с n нелинейными блоками $\varphi_j = \varphi_j(t, \sigma)$:

$$\sigma_t = \alpha(t) + \int_0^t \Omega(t-\tau)\varphi_\tau d\tau, \quad \varphi_t = \varphi(t, \sigma_t), \quad t \geqslant 0. \tag{1}$$

Здесь $\alpha(t)$, σ_t — векторные (порядка m) случайные процессы, $\varphi(t, \sigma) = \|\varphi_j(t, \sigma)\|$ — вектор-функция порядка n, непрерывная по совокупности переменных t и σ ($t \geqslant 0$, $-\infty < \sigma_i < +\infty$), а $\Omega(t)$ — матрица-функция порядка $m \times n$. Будем считать, что $\Omega(t)$ суммируема на полуоси ($|\Omega(t)| \in L[0, +\infty)$)*, а измеримый процесс [1] $\alpha(t)$ с вероятностью 1 (в. 1) суммируем с квадратом на каждом конечном промежутке ($|\alpha(t)| \in L_2[0, T]$ с в. 1 при любом $T > 0$).

Решение системы (1) на промежутке $[0, T]$ будем называть пару измеримых процессов $y_t = (\sigma_t, \varphi_t)$, с в. 1 суммируемых с квадратом на $[0, T']$, $T' < T$, и почти всюду на $[0, T)$ удовлетворяющих (1) с в. 1.

По аналогии с [2] будем говорить, что для системы (1) выполнена усиленная локальная теорема существования, если справедливо: (A) система (1) имеет решение на некотором промежутке $[0, T_0)$; (B) если это решение суммируемо с квадратом на $[0, T_0]$ с в. 1, то оно продолжимо на некоторый более широкий промежуток $[0, T_1)$, $T_1 > T_0$.

Усиленная локальная теорема существования выполнена для довольно широкого класса систем (1). Она выполнена, например, в случае, если $\varphi(t, \sigma)$ удовлетворяет условию Липшица по аргументу σ с постоянной, не зависящей от t, и $\int_0^T E|\alpha(t)|^2 dt < +\infty$ при любом $T > 0$ **. Доказательство проводится с помощью принципа сжатых отображений для оператора $A(\sigma_t) = \int_0^T \Omega(t-\tau)\varphi(\tau, \sigma_\tau)d\tau + \alpha(t)$ в пространстве $\mathfrak{S}[0, T]$ измеримых случайных процессов σ_t $(0 \leqslant t \leqslant T)$ таких, что $\int_0^T E|\sigma_t|^2 dt < +\infty$ ***.

Обозначим через $\mathfrak{A}$ множество внешних воздействий $\alpha(t)$, для которых система (1) имеет решение на полуоси $[0, +\infty)$. Система (1) определяет отображение U множества $\mathfrak{A}$ на множество Y соответствующих решений $y_t = (\sigma_t, \varphi_t)$. Предположим, что на $\mathfrak{A}$ и Y заданы неотрицательные функции $r(\alpha)$ и $\rho(y)$, принимающие, быть может, значение $+\infty$, причем $r(0) = 0$, $\rho(0) = 0$. Будем говорить, что система (1) стохастически устойчива

* Здесь и ниже $|A| = \sqrt{\sum_{j,h} |a_{jh}|^2}$ ($A = \|a_{jh}\|$) — прямоугольная матрица.

** Здесь и ниже смысл E означает математическое ожидание.

*** Очевидно, одновременно будет доказана и единственность решения в $\mathfrak{S}[0, T]$. Ниже используется также пространство $\mathfrak{S}[0, +\infty)$ измеримых случайных процессов σ_t $(0 \leqslant t < +\infty)$ таких, что $\int_0^{+\infty} E|\sigma_t|^2 dt < +\infty$.

относительно функций $r(\alpha)$ и $\rho(y)$, если выполнено: а) из условия $r(\alpha) < +\infty$ следует $\rho(y) < +\infty$; б) из условия $r(\alpha) \to 0$ следует $\rho(y) \to 0$.

Класс систем (1) будем называть абсолютно стохастически устойчивым относительно $r(\alpha)$ и $\rho(y)$, если каждая система из класса стохастически устойчива относительно $r(\alpha)$ и $\rho(y)$ *.

В приводимых ниже теоремах 1—4 даются достаточные условия существования решений системы (1) на полуоси $[0, +\infty)$ и выполнения при любом $T > 0$ одного из неравенств

$$\int_0^T E|y_t|^2 dt \leqslant M^2 \int_0^T E|\alpha(t)|^2 dt + N\gamma + Q, \tag{2}$$

$$\int_0^T E(|y_t|^2 + |\dot\sigma_t|^2) dt \leqslant M^2 \int_0^T E(|\alpha(t)|^2 + |\dot\alpha(t)|^2) dt + N\gamma + Q, \tag{3}$$

в которых неотрицательные постоянные M, N, γ и Q не зависят от T. Используя (2) и (3), легко установить стохастическую устойчивость системы (1) с различными $r(\alpha)$ и $\rho(y)$. Именно:

Предложение 1. *Пусть для решений системы* (1) *на полуоси* $[0, +\infty)$ *выполнено* (2). *Тогда*: (I) *система* (1) *стохастически устойчива относительно полунорм*

$$r_1(\alpha) = \overline{\lim_{T\to\infty}} \left(\frac{1}{T} \int_0^T E|\alpha(t)|^2 dt\right)^{1/2}, \quad \rho_1(y) = \overline{\lim_{T\to\infty}} \left(\frac{1}{T} \int_0^T E|y_t|^2 dt\right)^{1/2};$$

(II) *если* $\gamma = Q = 0$, *то система стохастически устойчива относительно норм* $r_2(\alpha) = \sup\limits_T \left(\frac{1}{T} \int_0^T E|\alpha(t)|^2\right)^{1/2}$, $\rho_2(y) = \sup\limits_T \left(\frac{1}{T} \int_0^T E|y_t|^2 dt\right)^{1/2}$ *и норм*

$$r_3(\alpha) = \left(\int_0^{+\infty} E|\alpha(t)|^2\right)^{1/2}, \quad \rho_3(y) = \left(\int_0^{+\infty} E|y_t|^2 dt\right)^{1/2}.$$

Предложение 2. *Пусть* $\Omega(t)$ *и* $\alpha(t)$ (*с в.* 1) *абсолютно непрерывны, тогда с в.* 1 *абсолютно непрерывен и процесс* σ_t. *Если выполнено* (3), *то справедливы утверждения* (I), (II) *предложения* 1, *в которых* $r_j(\alpha)$ *и* $\rho_j(y)$ ($j = 1, 2, 3$) *заменены соответственно на* $r_j(\tilde\alpha)$ *и* $\rho_j(\tilde\alpha)$, *где* $\tilde\alpha(t) = \sqrt{|\alpha(t)|^2 + |\dot\alpha(t)|^2}$, $\tilde y(t) = \sqrt{|y_t|^2 + |\dot\sigma_t|^2}$. *Более того, если* $\alpha(t) \in \mathfrak{C}[0, +\infty)$, $\dot\alpha(t) \in \mathfrak{C}[0, +\infty)$, *то* $E|\sigma_t|^2 \to 0$ *при* $t \to \infty$.

2°. Довольно часто конкретные свойства нелинейных блоков системы (1) позволяют утверждать, что решения системы с в. 1 удовлетворяют на промежутке существования соотношению

$$\int_0^t F(\varphi_\tau, \sigma_\tau, \dot\sigma_\tau) d\tau \geqslant -\gamma, \tag{4}$$

где F — вещественная квадратичная форма своих аргументов и γ — неотрицательная постоянная. Разнообразные примеры таких соотношений приведены в ([4]), а методика их использования для исследования устойчивости детерминантных систем (1) изложена в ([2]). Следуя ([2]), каждую вещественную квадратичную форму $F(\varphi, \sigma, \dot\sigma)$ (векторы φ, σ, $\dot\sigma$ имеют порядки n, m, m) распространим с сохранением эрмитовости на комплексные значения аргументов и определим функцию $F(p, \tilde\varphi) = F(\tilde\varphi, -\chi(p)\tilde\varphi, -p\chi(p)\tilde\varphi)$. Здесь $p = i\omega$, $\omega \in (-\infty, +\infty)$, $\tilde\varphi$ — комплексный n-вектор, а $-\chi(p)$ — преобразование Лапласа функции $\Omega(t)$.

---

* Впервые, насколько известно автору, подобное определение абсолютной стохастической устойчивости было дано в ([3]). Там же при некоторых дополнительных предположениях относительно $\alpha(t)$ были доказаны теоремы, являющиеся частными случаями теорем 1 и 3 данной работы.

Теорема 1. *Предположим, что для системы* (1) *выполнена усиленная локальная теорема существования. Пусть решения* (1) *с в.1 удовлетворяют соотношению* (4), *в котором* $F = F(\varphi, \sigma)$ *не зависит от* σ. *Пусть выполнено:* (A_1) $F(0, \sigma) \geqslant 0$ *при всех вещественных* σ; (B_1) $F(p, \bar{\varphi}) < 0$ *при всех комплексных* $\bar{\varphi}$ *и* $p = i\omega$, $-\infty \leqslant \omega \leqslant +\infty$. *Тогда решения системы* (1) *продолжимы на полуось* $[0, +\infty)$, *и справедливо* (2) *при* $Q = 0$.

Теорема 2. *Предположим, что для системы* (1) *выполнены все условия теоремы* 1 *за исключением* (A_1). *Пусть известно, что* $|\varphi_t| \leqslant \mathrm{const}$ *с в.* 1, *а* $\Omega(t)$ *удовлетворяет соотношению* $\lim\limits_{T\to\infty} \int\limits_0^T \int\limits_{T-\tau}^{\infty} |\Omega(t)|\,dt\,d\tau < +\infty$ *. *Тогда решения системы* (1) *продолжимы на полуось* $[0, +\infty)$, *и справедливо* (2).

Теорема 3. *Предположим, что в системе* (1) $\Omega(t)$ *и* $\alpha(t)$ (*с в.* 1) *абсолютно непрерывны, причем* $|\Omega(t)| \in L[0, +\infty)$, *а* $|\dot{\alpha}(t)| \in L_2[0, T]$ $T > 0$ *с в.* 1. *Пусть выполнена усиленная локальная теорема существования. Пусть решения системы* (1) *с в.* 1 *удовлетворяют соотношению* (4). *Пусть выполнено*: (A_2) $F(0, \sigma, \dot{\sigma}) \geqslant 0$ *при всех вещественных* σ *и* $\dot{\sigma}$; (B_2) $F(p, \bar{\varphi}) < 0$ *при всех комплексных* $\bar{\varphi}$ *и* $p = i\omega$, $-\infty \leqslant \omega \leqslant +\infty$. *Тогда решения системы* (1) *продолжимы на полуось* $[0, +\infty)$, *и справедливо* (3) *при* $Q = 0$.

Теорема 4. *Предположим, что для системы* (1) *выполнены все условия теоремы* 3 *за исключением* (A_2). *Пусть известно, что* $|\varphi_t| \leqslant \mathrm{const}$ *с в.* 1 *и* $\lim\limits_{T\to\infty} \int\limits_0^T \int\limits_{T-\tau}^{\infty} (|\Omega(t)| + |\dot{\Omega}(t)|)\,dt\,d\tau < +\infty$. *Тогда решения системы* (1) *продолжимы на полуось* $[0, +\infty)$ *и справедливо* (3).

3°. Укажем кратко основные пункты доказательств сформулированных утверждений.

Предложение 1 очевидно. В предложении 2 требует доказательства лишь последнее утверждение. Заметим, что из условий $\alpha(t) \in \mathfrak{C}[0, +\infty)$, $\dot{\alpha}(t) \in \mathfrak{C}[0, +\infty)$ и неравенства (3) следует, что $\sigma_t \in \mathfrak{C}[0, +\infty)$, $\dot{\sigma}_t \in \in \mathfrak{C}[0, +\infty)$. Тогда из $E(|\sigma_t|^2 - |\sigma_0|^2) = 2\int\limits_0^t E(\sigma_\tau, \dot{\sigma}_\tau)\,d\tau$ получаем, что существует конечный предел $\lim\limits_{t\to\infty} E|\sigma_t|^2$ и этот предел равен нулю.

Теоремы 1—4 являются вероятностным аналогом результатов, полученных в (2) для детерминированных систем (1). Поэтому доказательство многих пунктов основывается на тех же идеях и проводится аналогично.

Доказательство теорем 1 и 2. Как и в (2), если передаточная функция $\chi(i\omega)$ и квадратичная форма $F(\varphi, \sigma)$ удовлетворяют условию (B_1), то существует постоянная $\delta > 0$ такая, что $F(i\omega, \bar{\varphi}) + 2\delta(1 + |\chi(i\omega)|^2)|\bar{\varphi}|^2 \leqslant 0$. Рассмотрим случайную величину $I(T) = \int\limits_0^T [F(\varphi_\tau, \zeta_\tau) + 2\delta(|\varphi_\tau|^2 + |\zeta_\tau|^2)]\,d\tau$. Здесь T принадлежит промежутку существования решения $y_t = (\sigma_t, \varphi_t)$ системы (1) ** $\zeta_t = \sigma_t - \alpha(t) = \Omega(t) * \varphi_t$ ***.

Положим $\varphi_t^T = \varphi_t$ при $0 < t \leqslant T$, $\varphi_t^T = 0$ при $t > T$ или $t < 0$, $\zeta_t^T = \Omega(t) * \varphi_t^T$. Тогда $I(T) = J(T) - \int\limits_T^{+\infty} (F(0, \zeta_\tau^T) + 2\delta|\zeta_\tau^T|^2)\,d\tau$, где $J(T) =$

---

* Под знаком предела стоит не убывающая по T функция и, следовательно, предел существует.

** Наличие такого промежутка гарантируется усиленной локальной теоремой существования.

*** Символ * обозначает операцию свертывания.

$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} [F(\varphi_\tau^T, \zeta_\tau^T) + 2\delta(|\varphi_\tau^T|^2 + |\zeta_\tau^T|^2)]d\tau$. Так как $|\varphi_t^T| \in L(-\infty, +\infty) \cap \cap L_2(-\infty, +\infty)$ с в. 1, то и $|\zeta_t^T| \in L(-\infty, +\infty) \cap L_2(-\infty, +\infty)$ с в. 1, причем для их преобразования Фурье с в. 1 справедливо равенство $\tilde{\zeta}^T = -\chi(i\omega)\tilde{\varphi}^T$. Применяя равенство Парсеваля к $J(T)$, получаем, что благодаря выбору δ, $J(T) \leqslant 0$ с в. 1. Следовательно, $I(T) \leqslant -\int\limits_T^{+\infty} F(0, \zeta_\tau^T)d\tau$ с в. 1. Подобно ([2]), легко показать существование постоянных $k_1 > 0$, $k_2 > 0$ таких, что при любом $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство $-F(\varphi, \sigma - \alpha) - \varepsilon(|\varphi|^2 + |\sigma - \alpha|^2 \leqslant -F(\varphi, \sigma) + (k_1 + k_2/\varepsilon)|\alpha|^2$. Возьмем $\varepsilon = \delta$, $k = k_1 = k_2/\delta$. Получаем $\delta\int\limits_0^T (|\varphi_\tau|^2 - |\zeta_\tau|^2)d\tau = I(T) - \int\limits_0^T [F(\varphi_\tau, \zeta_\tau) + \delta(|\varphi_\tau|^2 + |\zeta_\tau|^2)]\,d\tau \leqslant -\int\limits_T^{+\infty} F(0, \zeta_\tau^T)d\tau - \int\limits_0^T F(\varphi_\tau, \sigma_\tau)\,d\tau + k\int\limits_0^T |\alpha(\tau)|^2 d\tau$ с в. 1. Применим к последнему неравенству соотношение (4) для формы $F(\varphi, \sigma)$. Получим, что в условиях теорем 1 или 2 с в. 1 при всех T из промежутка существования решения выполняется соотношение $\delta\int\limits_0^T (|\varphi_\tau|^2 + |\zeta_\tau|^2)\,d\tau \leqslant \gamma - \int\limits_T^{+\infty} F(0, \zeta_\tau^T)\,d\tau + k\int\limits_0^T |\alpha(\tau)|^2 d\tau$. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда $\left|\int\limits_T^{+\infty} F(0, \zeta_\tau^T)\,d\tau\right| \leqslant \mathrm{const}\int\limits_0^T \int\limits_{T-\tau}^{+\infty} |\Omega(t)|\,dt\,d\tau \leqslant \mathrm{const}$. Поэтому существуют неотрицательные не зависящие от T постоянные M, N и Q такие, что с в. 1 выполнено

$$\int\limits_0^T (|\varphi_\tau|^2 + |\sigma_\tau|^2)\,d\tau \leqslant M^2\int\limits_0^T |\alpha(t)|^2 d\tau + N\gamma + Q. \tag{5}$$

В условиях же теоремы 1 из (A_1) следует неравенство (5) при $Q = 0$. Из (5) и усиленной локальной теоремы существования вытекает, что решения продолжимы на полуось $[0, +\infty)$. Так как φ_t, σ_t и $\alpha(t)$ — измеримые процессы, то из (5) следует оценка (2).

Доказательство теорем 3 и 4. Пусть выполнены условия теоремы 3. По усиленной локальной теореме существования система (1) имеет на некотором промежутке решение y_t. Дифференцируя первое уравнение системы (1), получим, что процесс $\hat{y}_t = (\hat{\sigma}_t, \varphi_t)$, где $\hat{\sigma}_t = \left\|\begin{matrix}\sigma_t\\ \dot{\sigma}_t\end{matrix}\right\|$ будет решением системы вида (1), в которой роль $\alpha(t)$ и $\Omega(t)$ играют $\hat{\alpha}(t) = \left\|\begin{matrix}\alpha(t)\\ \dot{\alpha}(t)\end{matrix}\right\|$ и $\hat{\Omega}(t) = \left\|\begin{matrix}\Omega(t)\\ \dot{\Omega}(t)\end{matrix}\right\|$. Для полученной системы справедливы все условия теоремы 1. Тогда из (5) при некоторых M и N с в. 1 следует:

$$\int\limits_0^T (|\varphi_t|^2 + |\sigma_t|^2 + |\dot{\sigma}_t|^2)\,dt \leqslant M^2\int\limits_0^T (|\alpha(t)|^2 + |\dot{\alpha}(t)|^2)\,dt + N\gamma.$$

Отсюда, как и прежде, решения y_t продолжимы на полуось $[0, +\infty)$, и справедливо (3). Теорема 4 подобным же образом вытекает из теоремы 2.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
21 IV 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. И. Гихман, А. В. Скороход, Введение в теорию случайных процессов, «Наука», 1965. [2] В. А. Якубович, Вестн. Ленингр. унив., № 7, в. 2 (1967). [3] В. А. Брусин, М. Л. Тай, Изв. высш. учебн. завед., Радиофизика, 10, № 7 (1967). [4] В. А. Якубович, Автоматика и телемеханика, 27, № 6 (1967).