МАТЕМАТИКА

УДК 517.538.5+517.538.6

О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ МНОГОЧЛЕНОВ ЭРМИТА – ПАДЕ ВТОРОГО РОДА

А.П. Старовойтов, Н.В. Рябченко, Д.А. Волков

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

ON THE EXISTENCE AND UNIQUENESS OF TYPE II HERMITE – PADÉ POLYNOMIALS

A.P. Starovoitov, N.V. Ryabchenko, D.A. Volkov

F. Scorina Gomel State University

В работе введены новые понятия: вполне нормальный индекс и вполне совершенная система функций. С помощью этих понятий сформулирован и доказан критерий единственности, получены явные детерминантные представления многочленов Эрмита – Паде 2-го рода для произвольной системы степенных рядов. Полученные результаты дополняют и обобщают хорошо известные результаты в теории аппроксимаций Эрмита – Паде.

Ключевые слова: *многочлены Эрмита – Паде*, *нормальный индекс*, *совершенная система*, *определитель Адамара*, *определитель Ганкеля.*

New concepts are introduced in the work. They are quite normal index and a quite perfect system of functions. Using these concepts, a uniqueness criterion was formulated and proved, explicit determinant representations of type II Hermite – Padé polynomials for an arbitrary system of power series were obtained. The results obtained complement and generalize the well-known result in the theory of Hermite – Padé approximations.

Keywords: *Hermite – Pad'e polynomials*, *normal index*, *perfect system*, *Hadamard determinant*, *Hankel determinant.*

1 Постановка задачи. Основные определения

Пусть $f=(f_1,f_2,...,f_k)$ – набор, состоящий из k формальных степенных рядов

$$f_j(z)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{f_i^j}{z^{i+1}},\ j=1,2...,k \tag{1.1}$$

с комплексными коэффициентами.

Множество k-мерных мультииндексов $n=(n_1,n_2,...,n_k)$, т. е. упорядоченных k целых неотрицательных чисел, обозначим $\mathbb{Z}_+^k$. Порядок мультииндекса $n=(n_1,n_2,...,n_k)$ – это сумма $|n|:=n_1+n_2+...+n_k$. Зафиксируем мультииндекс $n\in\mathbb{Z}_+^k$ и рассмотрим следующую задачу Эрмита – Паде [1; гл. 4, §3]:

Задача ЭП. Найти тождественно не равный нулю многочлен $Q=Q_n$, $\deg Q\le|n|$, *такой, что для некоторых многочленов*

$$P_1=P_n^1,...,P_k=P_n^k$$

выполняются равенства

$$R_n^j(z)=Q(z)f_j(z)-P_j(z)=\frac{c_j}{z^{n_j+1}}+...,\quad j=1,2...,k. \tag{1.2}$$

Известно [1], [2], что решение поставленной задачи существует и неединственно. В частности, многочлены Q_n и P_n^j находятся с точностью до мультипликативного множителя: если пара (Q,P), где $P=(P_1,...,P_k)$ удовлетворяют необходимым требованиям, то, умножая многочлены Q и P_j на любое отличное от нуля комплексное число λ, получим новую пару $(\lambda Q,\lambda P)$, удовлетворяющую поставленным условиям. Эта неединственность может быть и более существенной. Рассмотрим следующий пример.

Пример 1.1. Пусть $k=2, n=(1,1)$, а

$$f_1(z)=-f_2(z)=\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z}+\frac{2}{z^2}+\frac{4}{z^3}+\dots.$$

Тогда решения задачи представимы в виде $(\lambda Q_2,\lambda P)$, $P=(P_1,P_2)$, где

$$Q_2(z)=(a+bz)-\frac{1}{4}(a+2b)z^2,$$

$$P_1(z)=-P_2(z)=-\frac{1}{2}(a+\frac{1}{2}(a+2b)z),$$

а a и b любые действительные числа.

***Определение* 1.1.** *Если пара* (Q,P), *где* $P=(P_1,...,P_k)$, *является решением задачи Эрмита – Паде с индексом* $n\in\mathbb{Z}_+^k$, *то многочлены* $Q,P_1,...,P_k$ *называют многочленами Эрмита – Паде 2-го рода для набора* (*системы*) *f формальных степенных рядов* (1.1).

Центральными в теории таких многочленов являются понятия нормального индекса *n* и совершенной системы *f* [1; гл. 4, §3].

***Определение* 1.2.** *Индекс* $n \in \mathbb{Z}_+^k$ *называется нормальным для f, если для любого решения* (Q, P) *с этим индексом* $\deg Q = |n|$.

***Определение* 1.3.** *Система f называется совершенной, если все индексы* $n \in \mathbb{Z}_+^k$ *являются нормальными для f.*

Хорошо известно (см., например, [1]), что нормальность индекса *n* является достаточным условием того, что все решения поставленной задачи с этим индексом находятся с точностью до мультипликативного множителя. Поэтому, если индекс $n \in \mathbb{Z}_+^k$ является нормальным, то однозначно определяется вектор

$$\pi_n = \left(\frac{P_1}{Q}, \frac{P_2}{Q} \ldots, \frac{P_k}{Q}\right),$$

компоненты которого являются рациональными функциями и называются *диагональными аппроксимациями Эрмита – Паде 2-го рода* (другое название – *совместные диагональные аппроксимации Паде*) для системы *f* формальных степенных рядов (1.1).

При $k = 1$ индекс $n \in \mathbb{Z}_+^k$ является нормальным тогда и только тогда [1; гл. 2, §3, утверждение 3.2], когда определитель Ганкеля степенного ряда $f_1(z)$

$$H_n = \begin{vmatrix} f_0^1 & f_1^1 & \ldots & f_{n-1}^1 \\ f_1^1 & f_2^1 & \ldots & f_n^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_{n-1}^1 & f_n^1 & \ldots & f_{2n-2}^1 \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (1.3)$$

Следующий пример показывает, что уже при $k = 1$ нормальность индекса n не является необходимым условием того, чтобы все решения поставленной задачи с этим индексом находились с точностью до мультипликативного множителя.

Пример 1.2. Пусть $k = 1$, $n = 2$, а

$$f(z) = \frac{1}{z-2} + \frac{8}{z^4} = \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} + \frac{4}{z^3} + \frac{16}{z^4} + \frac{16}{z^5} + \ldots.$$

Тогда все решения задачи имеют вид:

$$Q_2(z) = \lambda(z-2),\ P_2^1 = \lambda,\ \lambda \in \mathbb{C},\ \lambda \neq 0,$$

т. е. находятся с точностью до мультипликативного множителя, но при этом индекс $n = 2$ не является нормальным: $\deg Q_2 \neq 2, H_2 = 0$.

Естественно возникает задача нахождения необходимых и достаточных условий на индекс $n \in \mathbb{Z}_+^k$ и систему f, определяемую равенствами (1.1), при которых все решения задачи Эрмита – Паде с этим индексом находятся с точностью до мультипликативного множителя. При выполнении таких условий принято говорить, что задача Эрмита – Паде имеет единственное решение. Такая постановка вполне оправдана уже тем, что во многих конкретных случаях единственности решения задачи (например, когда функции (1.1) являются марковскими) сами решения удовлетворяют некоторым условиям ортогональности и их принято называть [1] *полиортогональными* (*k-ортогональными*) *многочленами 2-го рода*.

2 Вполне совершенные системы

Компонеты вектора $f = \{f_1, f_2, \ldots, f_k\}$ являются формальными степенными рядами. Уже по этой причине поставленная задача является чисто алгебраической и, следовательно, имеет алгебраическое решение. Это решение будет получено нами в терминах теории линейных алгебраических уравнений, которые определяются через коэффициенты степенных рядов (1.1).

Введем необходимые обозначения. Для мультииндекса $n = (n_1, \ldots, n_k)$ и фиксированного $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$, в предположении, что $n_j \neq 0$, рассмотрим матрицы-строки порядка $1 \times (|n|+1)$

$$F_i^j = \begin{pmatrix} f_{i-1}^j & f_i^j & f_{i+1}^j & \ldots & f_{|n|+i-2}^j & f_{|n|+i-1}^j \end{pmatrix},$$
$$i = 1, \ldots, n_j;$$

функциональные матрицы-строки $1 \times (|n|+1)$

$$E(z) = \begin{pmatrix} 1 & z & z^2 & \ldots & z^{|n|-1} & z^{|n|} \end{pmatrix},$$

$$E_j(z) =$$

$$= \left(0 \;\; f_0^j \;\; f_0^j z + f_1^j \;\; \ldots \;\; \sum_{p=0}^{|n|-2} f_p^j z^{|n|-p-2} \;\; \sum_{p=0}^{|n|-1} f_p^j z^{|n|-p-1}\right);$$

матрицу порядка $n_j \times (|n|+1)$

$$F^j = \left[F_1^j \; F_2^j \ldots F_{nj}^j\right]^T = \begin{bmatrix} F_1^j \\ F_2^j \\ \vdots \\ F_{n_j}^j \end{bmatrix}, \qquad (2.1)$$

и матрицу порядка $|n| \times (|n|+1)$

$$F_n = \left[F^1 \; F^2 \ldots F^k\right]^T,$$

где C^T является матрицей, транспонированной к матрице *C* (транспонирование определяется также, как и в (2.1)).

Рассмотрим также определители $(|n|+1)$ -го порядка

$$d_{n,i}^j = det\begin{bmatrix} F^1 & F^2 & \ldots & F^k & F_{i+n_j}^j \end{bmatrix}^T,\ i = 1, 2, \ldots.$$

***Определение* 2.1.** *Индекс* $n \in \mathbb{Z}_+^k$ *назовем вполне нормальным для f, если ранг матрицы* F_n *равен* $|n|$.

В примере 1.1 индекс $n = (1,1)$ не является ни нормальным, ни вполне нормальным, а в примере 1.2 индекс $n = 2$ не является нормальным, но является вполне нормальным относительно рассматриваемых в этих примерах систем функций.

***Определение* 2.2.** *Систему f назовем вполне совершенной, если все индексы* $n \in \mathbb{Z}_+^k$ *являются вполне нормальными для f.*

Далее будет доказано, что любая совершенная система f является и вполне совершенной системой. Пример 1.2 показывает, что обратное утверждение, вообще говоря, может быть неверным. Примеры некоторых совершенных систем имеются в [1].

3 Критерий единственности. Детерминантные представления многочленов Эрмита – Паде

В этом разделе сформулируем и докажем основную теорему данной работы.

***Теорема* 3.1.** *Для того, чтобы для фиксированного мультииндекса* $n \in \mathbb{Z}_+^k$ *задача Эрмита – Паде имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы индекс n был вполне нормальным, т. е.* $rangF_n = |n|$.

В случае, если мультииндекс n является вполне нормальным при определенном выборе мультипликативного множителя, справедливы детерминантные представления:

$$Q_n(z) = det\left[F^1 \quad F^2 \quad \dots \quad F^k \quad E(z)\right]^T, \quad (3.1)$$

$$P_n^j(z) = det\left[F^1 \quad F^2 \quad \dots \quad F^k \quad E_j(z)\right]^T, \quad (3.2)$$

$$R_n^j(z) = Q_n(z) f_j(z) - P_n^j(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_{n,i}^j}{z^{n_j+i}}. \quad (3.3)$$

Доказательство. Пусть

$$Q_n(z) = b_0 + b_1 z + \dots + b_{|n|} z^{|n|}.$$

Запишем в явном виде систему уравнений для определения коэффициентов $b_0, b_1, \dots, b_{|n|}$:

$$\begin{cases} f_0^1 b_0 & + f_1^1 b_1 & + \dots & + f_{|n|}^1 b_{|n|} = 0; \\ f_1^1 b_0 & + f_2^1 b_1 & + \dots & + f_{|n|+1}^1 b_{|n|} = 0; \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n_1-1}^1 b_0 & + f_{n_1}^1 b_1 & + \dots & + f_{|n|+n_1-1}^1 b_{|n|} = 0; \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_0^k b_0 & + f_1^k b_1 & + \dots & + f_{|n|}^k b_{|n|} = 0; \\ f_1^k b_0 & + f_2^k b_1 & + \dots & + f_{|n|+1}^k b_{|n|} = 0; \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n_{k-1}}^k b_0 & + f_{n_k}^k b_1 & + \dots & + f_{|n|+n_{k-1}}^k b_{|n|} = 0. \end{cases} \quad (3.4)$$

В матричной форме система (3.4) принимает вид:

$$F_n \times b^T = \theta^T, \quad (3.5)$$

где b – матрица-строка $b = (b_0, b_1, \dots, b_{|n|})$, а θ – матрица-строка порядка $1 \times (|n|+1)$, все элементы которой равны нулю. Поскольку система (3.5) является однородной и в ней число неизвестных на единицу больше числа уравнений, то из теоремы Кронекера – Капелли следует, что система (3.5) имеет ненулевое решение. Кроме того, множество всех линейно независимых решений системы (3.5) состоит из одного фундаментального решения тогда и только тогда, когда $rangF_n = n.$ В этом случае все остальные ненулевые решения получаются домножением этого фундаментального решения на число $\lambda \neq 0.$ Тем самым первая часть теоремы 3.1 доказана.

Докажем теперь равенства (3.1)–(3.3). Так как $rangF_n = |n|$, то при некотором $p \in \{1, 2, \dots, |n|+1\}$ определитель, полученный в результате вычеркивания в матрице F_n p-го столбца, отличен от нуля. Для определенности предположим, что $p = |n|+1.$ Тогда систему (3.5) можно переписать в виде

$$\begin{pmatrix} f_0^1 & f_1^1 & \dots & f_{|n|-1}^1 \\ f_1^1 & f_2^1 & \dots & f_{|n|}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n_1-1}^1 & f_{n_1}^1 & \dots & f_{|n|+n_1-2}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_0^k & f_1^k & \dots & f_{|n|-1}^k \\ f_1^k & f_2^k & \dots & f_{|n|}^k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n_k-1}^k & f_{n_k}^k & \dots & f_{|n|+n_k-2}^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \dots \\ b_{n_1-1} \\ \dots \\ b_{|n|-n_k+1} \\ b_{|n|-n_k+2} \\ \dots \\ b_{|n|-1} \end{pmatrix} = \quad (3.6)$$

$$= -b_{|n|} \begin{pmatrix} f_{|n|}^1 \\ f_{|n|+1}^1 \\ \dots \\ f_{|n|+n_1-1}^1 \\ \dots \\ f_{|n|}^k \\ f_{|n|+1}^k \\ \dots \\ f_{|n|+n_k-1} \end{pmatrix}.$$

Обозначим главный определитель системы (3.6) через H_n^k. По предположению $H_n^k \neq 0.$ Если бы $b_{|n|} = 0,$ то тогда система (3.6) имела бы единственное нулевое решение. Тогда бы и система (3.4) имела только нулевое решение. Поэтому $b_{|n|} \neq 0.$ Учитывая, что мы ищем решение с точностью до мультипликативного множителя, можем считать, что $b_{|n|} = 1.$ Решаем систему по правилу Крамера. Пренебрегая числовым множителем, результат можно записать в виде:

$$Q_m(z) = \begin{vmatrix} f_0^1 & f_1^1 & \dots & f_{|n|}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n_1-1}^1 & f_{n_1}^1 & \dots & f_{|n|+n_1-1}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_0^k & f_1^k & \dots & f_{|n|}^k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n_k-1}^k & f_{n_k}^k & \dots & f_{|n|+n_k-1}^k \\ 1 & z & \dots & z^{|n|} \end{vmatrix} = \quad (3.7)$$

$$= det\left[F^1 \quad F^2 \quad \dots \quad F^k \quad E(z)\right]^T.$$

Из (3.7) следует, что $b_{|n|} = H_n^k \neq 0.$ В случае, если бы, вычеркивая столбец матрицы F_n с номером $p = j \in \{1,2,...,|n|\}$ пришли к определителю отличному от нуля, рассуждая аналогично, получили бы представления (3.7), где отличным от нуля был бы коэффициент b_{j-1} многочлена $Q_n(z)$.

Заметим, что если коэффициенты рядов (1.1) – действительные числа, то и коэффициенты многочлена Q_n также являются действительными числами.

Многочлен $P_n^j(z)$ определяется однозначно как полиномиальная часть ряда $Q_n(z)f_j(z)$. Чтобы найти его явный вид, рассмотрим равенство

$$Q_m(z)f_i(z) = \begin{vmatrix} f_0^1 & f_1^1 & \cdots & f_{|n|}^1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n_1-1}^1 & f_{n_1}^1 & \cdots & f_{|n|+n_1-1}^1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_0^k & f_1^k & \cdots & f_{|n|}^k \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n_k-1}^k & f_{n_k}^k & \cdots & f_{|n|+n_k-1}^k \\ \sum\limits_{i=0}^{\infty} \dfrac{f_i^j}{z^{i+1}} & \sum\limits_{i=0}^{\infty} \dfrac{f_i^j}{z^i} & \cdots & \sum\limits_{i=0}^{\infty} \dfrac{f_i^j}{z^{i-|n|+1}} \end{vmatrix}. \quad (3.8)$$

В определителе (3.8) выделим блок A_{n_j} (матрицу порядка $n_j \times (|n|+1)$) вида

$$\begin{pmatrix} f_0^j & f_1^j & \cdots & f_{|n|}^j \\ f_1^j & f_2^j & \cdots & f_{|n|+1}^j \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n_j-1}^j & f_{n_j}^j & \cdots & f_{|n|+n_j-1}^j \end{pmatrix}.$$

Далее, вычтем из последней строки определителя первую строку блока A_{n_j}, умноженную на z^{-1}, вторую строку блока A_{n_j}, умноженную на z^{-2}, и так далее вплоть до последней строки блока A_{n_j}, умноженной на z^{-n_j}. В результате вместо определителя (3.8) получим определитель, у которого ряды в последней строке имеют лакуны длиной n_j. Сохраняя начальные строки этих рядов, придем к определителю

$$P_n^j(z) = \begin{vmatrix} f_0^1 & f_1^1 & f_2^1 & \cdots & f_{|n|}^1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n_1-1}^1 & f_{n_1}^1 & f_{n_1+1}^1 & \cdots & f_{|n|+n_1-1}^1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_0^k & f_1^k & f_2^k & \cdots & f_{|n|}^k \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n_k-1}^k & f_{n_k}^k & f_{n_k+1}^k & \cdots & f_{|n|+n_k-1}^k \\ 0 & f_0^j & f_0^j z + f_1^j & \cdots & \sum\limits_{i=0}^{|n|-1} f_i^j z^{|n|-i-1} \end{vmatrix} = (3.9)$$

$$= det\begin{bmatrix} F^1 & F^2 & \ldots & F^k & E_j(z) \end{bmatrix}^T.$$

Он и будет искомым. Действительно, многочлен $P_n^j(z)$, определенный равенством (3.9) имеет степень не выше $|n|-1$. Учитывая сделанные преобразования в определителе (3.8), для этого многочлена, получим:

$$Q_n(z)f_j(z) - P_n^j(z) =$$

$$= \begin{vmatrix} f_0^1 & f_1^1 & \cdots & f_{|n|}^1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n_1-1}^1 & f_{n_1}^1 & \cdots & f_{|n|+n_1-1}^1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_0^k & f_1^k & \cdots & f_{|n|}^k \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n_k-1}^k & f_{n_k}^k & \cdots & f_{|n|+n_k-1}^k \\ \sum\limits_{i=n_j}^{\infty} \dfrac{f_i^j}{z^{i+1}} & \sum\limits_{i=n_j}^{\infty} \dfrac{f_{i+1}^j}{z^{i+1}} & \cdots & \sum\limits_{i=n_j}^{\infty} \dfrac{f_{i+|n|}^i}{z^{i+1}} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_{n,i}^j}{z^{n_j+i}}.$$

При преобразованиях мы воспользовались определением суммы степенного ряда и правилом сложения определителей. Заметим, что если среди рядов (1.1) есть, по крайней мере, один формальный ряд, то ряд (3.3) также является формальным.

4 Замечания и следствия

Из полученных явных формул для многочленов Эрмита – Паде 2-го рода следует, что компонента n_j заданного вполне совершенного мультииндекса $n = (n_1,...,n_k)$ определяет число коэффициентов ряда $f_j(z)$, которое учитывается при построении многочленов $Q_n(z)$. В частности, если $n_j = 0$, то матрица F_n и рассматриваемые определители, задающие многочлены $Q_n(z)$, не содержат блока A_{n_j} и, следовательно, при их построении формальный ряд $f_j(z)$ не учитывается, а порядок мультииндекса $|n|$ определяется оставшимися компонентами.

В частности, если $n_2 = ... = n_k = 0$, то

$$n = (n_1, 0, ..., 0) \in \mathbb{Z}_+^k$$

и тогда $|n| = n_1$. Если отождествить n_1 с n, то, как и в одномерном случае, получим

$$Q_m(z) = \begin{vmatrix} f_0^1 & f_1^1 & \cdots & f_n^1 \\ f_1^1 & f_2^1 & \cdots & f_{n+1}^1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n-1}^1 & f_n^1 & \cdots & f_{2n-1}^1 \\ 1 & z & \cdots & z^n \end{vmatrix}. \quad (4.1)$$

Легко заметить, что критерий нормальности индекса $n \in \mathbb{Z}_+^k$ (см. (1.3)) согласуется с формулой (4.1).

Следует сказать, что если индекс $n \in \mathbb{Z}_+^k$ не является вполне нормальным, то многочлены, определенные равенствами (2.1) и (2.2), не являются решениями задачи Эрмита – Паде. В частности, для функции f_1 из примера 1.1 получаем, что $Q_2(z) = (a + bz) - (a + 2b)z^2 / 4$. Однако, если этот многочлен находить по формуле (4.1), то получим, что $Q_2(z) \equiv 0$.

При $k \geq 1$ критерий нормальности индекса в терминах коэффициентов рядов (1.1) легко получить из доказательства теоремы 1 с помощью тех же рассуждений, что и в одномерном случае [1; гл. 2, §3, утверждение 3.2].

***Следствие* 4.1.** *Индекс* $n \in \mathbb{Z}_+^k$ *является нормальным для системы f тогда и только тогда, когда определитель*

$$H_n^k = \begin{vmatrix} f_0^1 & f_1^1 & \cdots & f_{|n|-1}^1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n_1-1}^1 & f_{n_1}^1 & \cdots & f_{|n|+n_1-2}^1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_0^k & f_1^k & \cdots & f_{|n|-1}^k \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n_k-1}^k & f_{n_k}^k & \cdots & f_{|n|+n_k-2}^k \end{vmatrix} \neq 0.$$

Следующее утверждение можно рассматривать как некоторый многомерный аналог теоремы Кронекера [1, гл. 2, §3, теорема 3.1].

***Следствие* 4.2.** *Пусть* $n = (n_1, \ldots, n_k)$ *– вполне нормальный индекс для* $f = \{f_1, \ldots, f_k\}$ *и* $n_j \neq 0$. *Тогда для того, чтобы функция* $f_j(z)$ *была рациональной, необходимо и достаточно, чтобы* $d_{n,i}^j = 0$ *для всех достаточно больших* i.

Следствие 4.2 вытекает из равенства (3.3).

***Следствие* 4.3.** *Пусть* $n = (n_1, \ldots, n_k)$ *– вполне нормальный индекс для* $f = \{f_1, \ldots, f_k\}$ *и* $n_j \neq 0$. *Тогда*

$$\deg P_n^j = |n| - 1 \Longleftrightarrow H_n^k \cdot f_0^j \neq 0. \qquad (4.2)$$

Эквивалентность (4.2) легко получить, если воспользоваться равенством (3.9).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Никишин*, *Е.М.* Рациональные аппроксимации и ортогональность / Е.М. Никишин, В.Н. Сорокин. – М.: Наука, 1988.

2. *Бейкер мл.*, *Дж.* Аппроксимации Паде. 1. Основы теории. 2. Обобщения и приложения / Дж. Бейкер мл., П. Грейвс-Моррис. – М.: Мир, 1986.

Поступила в редакцию 15.03.19.