МАТЕМАТИКА

УДК 519.2:621.394.74

DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_4_61_53
EDN: PVNWEO

МОДИФИКАЦИЯ ОТКРЫТЫХ ОДНОЛИНЕЙНЫХ СЕТЕЙ ДЖЕКСОНА С ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ВРЕМЕНА ОЖИДАНИЯ, ДОПУСКАЮЩАЯ СТАЦИОНАРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ В ФОРМЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Ю.В. Малинковский

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

OPEN ONE-LINE JACKSON NETWORKS WITH EXPONENTIAL CONSTRAINS ON WAITING TIMES MODIFICATION BY PRODUCT FORM OF THE STATIONARY DISTRIBUTION

Yu.V. Malinkovskii

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Рассмотрена однолинейная экспоненциальная сеть массового обслуживания, в которой время ожидания между вызовами обслуживания в подсистемах сети является случайной величиной, условное распределение которой при фиксированном числе вызовов в подсистемах имеет показательное распределение. Вызовы, обслуженные в подсистемах, и вызовы, не дождавшиеся обслуживания, движутся по сети в соответствии с разными матрицами маршрутизации. Предлагается модификация сети с экспоненциальными ограничениями на время ожидания, позволяющая получить стационарное распределение в форме произведения. Для достижения этой цели вводятся дополнительные компенсирующие потоки сигналов, управляющие определенными перемещениями вызовов в сети.

Ключевые слова: *сеть массового обслуживания*, *стационарное распределение*, *форма произведения*, *время ожидания*, *время пребывания*, *экспоненциальные ограничения*, *компенсирующие потоки*, *модифицированная сеть*.

Для цитирования: *Малинковский*, *Ю.В.* Модификация открытых однолинейных сетей Джексона с экспоненциальными ограничениями на времена ожидания, допускающая стационарное распределение в форме произведения / Ю.В. Малинковский // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 4 (61). – С. 53–56. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_4_61_53. – EDN: PVNWEO

Abstract. One-line exponential queueing network, in which the waiting time by customers in the nodes is random variable whose conditional distribution (on fixed customers qualities) is exponential, was considered. The customers served in the nodes and the non-served customers move in the network according to a different routing matrices. A network modification with exponential bounded waiting times and product form stationary distribution is presented. To achieve this goal additional compensative flows of moving in the network control signals are introduced.

Keywords: *qoueueing network*, *stationary distribution*, *product form*, *waiting time*, *sojourn time*, *exponential restricts*, *compensative flows*, *modificatory network.*

For citation: *Malinkovskii*, *Yu.V.* Open one-line Jackson networks with exponential constrains on waiting times modification by product form of the stationary distribution / Yu.V. Malinkovskii // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2024. – № 4 (61). – P. 53–56. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_4_61_53 (in Russian). – EDN: PVNWEO

Введение

В последние годы наметилась тенденция к созданию информационно-вычислительных сетей различного назначения. возникают проблемы, от решения которых зависит эффективность их использования. Весьма важной является проблема «узких подсистем» в сети, т. е. подсистем сети, в которых нагрузка подсистем максимальна. При большом числе вызовов в узком месте очередь неограниченно растет, в то время как в других подсистемах очереди незначительны либо вовсе отсутствуют. Одним из способов преодоления этого недостатка является введение мгновенных обходов вызовами подсистем [1], что благоприятствует более равномерному распределению нагрузки между подсистемами. Иным способом уменьшения нагрузки в «узких местах» является помещение в соответствующих подсистемах резервных линий [2], [3]. Еще одним способом уменьшения нагрузки является ограничение продолжительностей ожидания обслуживания заявок в узлах случайными величинами, имеющими показательное распределение [4]–[8].

К сожалению, автор настоящей статьи допустил в [5] ошибку при формулировке результатов в пунктах 4 и 5, связанных с ограничением на время ожидания. В дальнейшем выяснилось, что, в случае, когда суммарная интенсивность ухода вызовов из подсистем за счет завершения времени ожидания постоянна, уравнения трафика для сети с ограничением на время ожидания будут отличаться от соответствующих уравнений трафика для сети с ограничением на время пребывания. В связи с этим в общем случае стационарное распределение не имеет формы произведения. Вниманию читателя предлагается модификация сети, позволяющая получить стационарное распределение в форме произведения. Для достижения этой цели вводится дополнительный компенсирующий поток сигналов, управляющий определенными перемещениями вызовов в сети.

1 Постановка задачи

В сеть, состоящую из N однолинейных подсистем, поступает простейший поток вызовов с интенсивностью λ. Поступающий вызов независимо от других вызовов с вероятностью p_{0i} направляется в i-ую подсистему $\left(i=\overline{1,N},\ \sum_{i=1}^{N} p_{0i}=1\right)$. Число мест для ожидания вызовов в подсистемах бесконечно. Время обслуживания вызова единственной линией i-ой подсистемы имеет показательное распределение с параметром μ_i $(i=\overline{1,N})$. Время ожидания начала обслуживания вызова в i-ой подсистеме является случайной величиной, условное распределение которой (если в i-ой подсистеме находится n_i вызовов) показательное с параметром $\frac{\nu_i}{n_i-1}$ $(i=\overline{1,N})$. Таким образом, условная вероятность того, что длительность ожидания начала обслуживания каждого вызова в очереди i-той подсистемы закончится в промежутке времени $[t,t+h)$, если в момент t в подсистеме находилось n_i вызовов, равна $\frac{\nu_i}{n_i-1}h+o(h)$ при $h\to 0$, а условная вероятность завершения процесса ожидания хотя бы одного из вызовов равна $\nu_i h+o(h)$. Если вызов поступает в подсистему, свободную от вызовов, он сразу начинает обслуживаться. Предполагается, что промежутки времени между моментами поступления вызовов, времена обслуживания вызовов и времена ожидания вызовов в подсистемах суть независимые случайные величины. Вызов, обслуженный в i-ой подсистеме, мгновенно и независимо от других вызовов с вероятностью p_{ij} переходит в j-ую подсистему, а с вероятностью p_{i0} покидает сеть $\left(i,j=\overline{1,N},\ \sum_{j=0}^{n} p_{ij}=1\right)$. Вызов, время ожидания которого в i-той подсистеме закончилось, мгновенно и независимо от других вызовов с вероятностью r_{ij} направляется в j-ую подсистему, а с вероятностью r_{i0} покидает сеть $\left(i,j=\overline{1,N},\ \sum_{j=0}^{n} r_{ij}=1\right)$.

2 Открытые сети с ограниченным временем ожидания вызовов в подсистемах

В [5] рассмотрена сеть, отличающаяся от введенной в разделе 1 сети только тем, что в ней вместо ограничения на время ожидания использовалось ограничение на время пребывания заявок в подсистемах. Для этой сети была введена стохастическая матрица маршрутизации следующим образом: $S=(s_{ij}),\ i,j=\overline{0,N},$ где для $i\neq 0$

$$s_{ij}=\frac{\mu_i p_{ij}+\nu_i r_{ij}}{\mu_i+\nu_i},$$

а $s_{oj}=p_{0j}$. Здесь

$$P=\begin{pmatrix} 0 & p_{01} & p_{02} & \cdots & p_{0N} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{N0} & p_{N1} & p_{N2} & \cdots & p_{NN} \end{pmatrix},$$

$$R=\begin{pmatrix} 0 & p_{01} & p_{02} & \cdots & p_{0N} \\ r_{10} & r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{N0} & r_{N1} & r_{N2} & \cdots & r_{NN} \end{pmatrix},$$

названные матрицами маршрутизации соответственно обслуженных и потерянных в результате окончания пребывания вызовов.

Как показано в [5], в предположении, что матрица S неприводима, интенсивность $\lambda\varepsilon_i$ потока вызовов, выходящих из i-ой подсистемы $(i=\overline{1,N})$, удовлетворяет следующим уравнениям трафика:

$$\varepsilon_j=p_{0j}+\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i s_{ij},\ j=\overline{1,N}. \tag{2.1}$$

имеющим в случае неприводимой матрицы маршрутизации единственное положительное решение.

Состояния сети в момент t в [5] описывалось цепью Маркова с непрерывным временем

$$\mathbf{n}(t)=(n_1(t),n_2(t),\ldots,n_N(t)),$$

где $n_i(t)$ – число вызовов в i-ой подсистеме в момент времени t. Пространство состояний этого процесса $X=\mathbf{Z}_+^N$, где $\mathbf{Z}_+=\{0,1,\ldots\}$. В силу неприводимости матрицы маршрутизации и положительности интенсивностей выхода из состояний в моменты ее скачков $\mathbf{n}(t)$, очевидно, – неприводимая цепь Маркова.

Пусть $\{p(\mathbf{n}),\mathbf{n}\in X\}$ – ее предельное эргодическое распределение, которое в этом случае будет единственным решением уравнений глобального равновесия

$$p(\mathbf{n})\left(\lambda+\sum_{i=1}^{N}\left(\mu_i(1-p_{ii})+\nu_i(1-r_{ii})\right)I_{\{n_i\neq 0\}}\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^{N}p(\mathbf{n}-\mathbf{e}_i)\lambda p_{0i}+\sum_{i=1}^{N}p(\mathbf{n}+\mathbf{e}_i)\left(\mu_i p_{i0}+\nu_i r_{i0}\right)+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1,j\neq i}^{N}p\left(\mathbf{n}+\mathbf{e}_j-\mathbf{e}_i\right)\left(\mu_j p_{ji}+\nu_j r_{ji}\right),\ \mathbf{n}\in X,\quad (2.2)$$

удовлетворяющим условию нормировки

$$\sum_{\mathbf{n}\in X}p(\mathbf{n})=1.$$

Здесь $\mathbf{e}_i$ – единичный вектор i-го направления, причем предполагается, что $p(\mathbf{n})=0$ при $\mathbf{n}\notin X$.

В [5] доказана следующая теорема.

***Теорема* 2.1.** *Для неприводимости цепи Маркова* $\mathbf{n}(t)$ *необходимо и достаточно неприводимости матрицы маршрутизации* $S=(s_{ij})$. *Если матрица маршрутизации неприводима, то для эргодичности цепи* $\mathbf{n}(t)$ *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\rho_i=\frac{\lambda\varepsilon_i}{\mu_i+\nu_i}<1\quad (i=\overline{1,N}).\qquad (2.3)$$

где $(\varepsilon_i, i=\overline{1,N})$ *– решение уравнения трафика* (2.1). *В этом случае финальное стационарное распределение имеет форму произведения*

$$p(\mathbf{n})=p_1(n_1)p_2(n_2)\ldots p_N(n_N),\qquad (2.4)$$

с множителями $p_i(n_i)=\rho_i^{n_i}(1-\rho_i)$, *где* $\{\varepsilon_i, i=\overline{1,N}\}$ *– решение уравнения трафика* (2.1).

3 Модификация открытой сети с ограниченным временем ожидания вызовов в подсистемах

В [7], [8] доказано, что за исключением двух очевидных вырожденных частных случаев для сети из раздела 1 не существует стационарного распределения в форме произведения (2.4). Кроме того, матрица маршрутизации будет зависеть от $\mathbf{n}$, благодаря чему уравнение трафика существенно усложнится. Поэтому модифицируем сеть из раздела 1 следующим образом. Введем компенсирующий поток сигналов, промежутки времени между моментами поступления которых предполагаются независимыми от промежутков времени между моментами поступления вызовов в сеть, времен обслуживания и времен ожидания вызовов в подсистемах сети. Этот поток предполагается стационарным пуассоновским с интенсивностью поступления в каждую подсистему j, равной ν_j, когда в j-ой подсистеме находится ровно один вызов (другими словами источник сигналов перекрывается, когда $n_j\neq 1$). Учитывая данное обстоятельство, интенсивность этого потока можно записать как $\nu_j I_{\{n_j=1\}}$. Поступающий сигнал не зависимо от других сигналов и функционирования сети с вероятностью r_{j0} направляется только в j-ую подсистему, где он вычеркивает единственный вызов и пропадает вместе с ним, не оказывая дальнейшего воздействия на сеть, либо с вероятностью r_{ji} вместе с указанным воздействием в j-ой подсистеме добавляет ровно один вызов в одной из подсистем i (или пропадает, не оказывая воздействия на поведение сети $(i,j=\overline{1,N})$. Ведь по постановке задачи предыдущего раздела $\sum_{i=0}^{N}r_{ji}=1, j=\overline{1,N}$. Таким образом, $\nu_j r_{j0}I_{\{n_j=1\}}$ – интенсивность поступления единственного сигнала извне в j-ую подсистему, когда в ней находится единственный вызов, $\nu_j r_{ji}I_{\{n_j=1\}}$ – интенсивность поступления сигнала извне в j-ую подсистему и рождения вызова в i-ой подсистеме, когда в j-ой подсистеме находится единственный вызов.

Уравнения глобального равновесия для стационарных вероятностей состояний цепи Маркова $\mathbf{n}(t)$ имеют форму

$$p(\mathbf{n})\left\{\lambda+\sum_{i=1}^{N}\left((\mu_i(1-p_{ii})+\nu_i(1-r_{ii})I_{\{n_i\neq 1\}})I_{\{n_i\neq 0\}}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\nu_i(1-r_{ii})I_{\{n_i=1\}}\right)\right\}=\sum_{i=1}^{N}p(\mathbf{n}-\mathbf{e}_i)\lambda p_{0i}I_{\{n_i\neq 0\}}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}p(\mathbf{n}+\mathbf{e}_i)\left(\left(\mu_i p_{i0}+\nu_i r_{i0}I_{\{n_i\neq 0\}}\right)+\nu_i r_{i0}I_{\{n_i=0\}}\right)+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1,j\neq i}^{N}p(\mathbf{n}+\mathbf{e}_j-\mathbf{e}_i)\times$$

$$\times\left(\left(\mu_j p_{ji}+\nu_j r_{ji}I_{\{n_j\neq 0\}}\right)+\nu_j r_{ji}I_{\{n_j=0\}}\right)i_{\{n_i\neq 0\}},\ \mathbf{n}\in X.$$

Используя свойство индикаторов, нетрудно привести эту систему уравнений к следующему виду:

$$p(\mathbf{n})\left(\lambda+\sum_{i=1}^{N}(\mu_i(1-p_{ii})+\nu_i(1-r_{ii}))I_{\{n_i\neq 0\}}\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^{N}p(\mathbf{n}-\mathbf{e}_i)\lambda p_{0i}I_{\{n_i\neq 0\}}+\sum_{i=1}^{N}p(\mathbf{n}+\mathbf{e}_i)(\mu_i p_{i0}+\nu_i r_{i0})+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1,j\neq i}^{N}p(\mathbf{n}+\mathbf{e}_j-\mathbf{e}_i)(\mu_j p_{ji}+\nu_j r_{ji})I_{\{n_i\neq 0\}},\ \mathbf{n}\in X.$$

Но эта система совпадает с системой уравнений глобального равновесия (2.2) для сети Джексона с экспоненциальным ограничением на время пребывания вызовов в подсистемах [5]. Более того, нетрудно понять, что для этих сетей совпадают системы прямых и обратных уравнений Колмогорова, а также совпадают уравнения Колмогорова для безусловных вероятностей $P\{\mathbf{n}(t)=\mathbf{n}\}$. Очевидно, цепь Маркова с непрерывным временем $\{\mathbf{n}(t)\}$ для этих цепей консервативна и регулярна. Следовательно [9], имеют место системы прямых и обратных уравнений Колмогорова для условных вероятностей

(вероятностей перехода) и системы уравнений Колмогорова для безусловных вероятностей, а решения систем прямых и обратных уравнений совпадают. Значит, цепь Маркова $\{\mathbf{n}(t)\}$ для обоих процессов является феллеровской (напомним, что цепь Маркова называется феллеровской, если инфинитезимальные характеристики, т. е. интенсивности перехода и интенсивности выхода однозначно определяют вероятности перехода $p_{\mathbf{nm}}(t)$). Если начальное распределение для обеих цепей совпадает, то совпадают и их конечномерные распределения, т. е. эти цепи эквивалентны в широком смысле. При выполнении условия эргодичности (2.3) обе цепи эргодичны, а эргодическое стационарное распределение для них имеет форму произведения (2.4). Таким образом, с учетом [9] имеет место следующий результат.

***Теорема* 3.1.** *Если матрица маршрутизации для сети с экспоненциальными ограничениями на время пребывания неприводима, то для сети с экспоненциальными ограничениями на время ожидания и сигналами перемещения заявок при выполнении условия*

$$\rho_i = \frac{\lambda \varepsilon_i}{\mu_i + \nu_i} < 1, \quad i = \overline{1, N},$$

цепь Маркова $\mathbf{n}(t)$ *эргодична, а ее единственное стационарное распределение имеет форму произведения* $p(\mathbf{n}) = p_1(n_1) p_2(n_2) \dots p_N(n_N)$ *с множителями* $p_i(n_i) = \rho_i^{n_i}(1-\rho_i)$, *где* $\{\varepsilon_i, i = \overline{1, N}\}$ – *решение уравнения трафика* (2.1):

$$\varepsilon_j = p_{0j} + \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i \frac{\mu_i p_{ij} + \nu_i r_{ij}}{\mu_i + \nu_i}, \; j = \overline{1, N}.$$

Хотя физическое описание сети с экспоненциальными ограничениями на время пребывания в сети с экспоненциальными ограничениями на время ожидания и потоками сигналов перемещения вызовов существенно отличается, обе сети описываются одним и тем же в широком смысле случайным марковским процессом и имеют одно и то же стационарное распределение.

Заключение

Исследовались открытые сети с однолинейными подсистемами, что ограничивает возможность применения полученных результатов. Некоторые результаты для сетей с многоканальными подсистемами автором получены, но пока не опубликованы, а другие находятся в стадии исследования. В последнее время автором и его аспирантом получен первый результат [10] по инвариантности стационарного распределения по отношению к закону распределения времен обслуживания вызовов при фиксированных моментах первого порядка для сетей с экспоненциальными ограничениями на время пребывания и дисциплиной абсолютного приоритета с дообслуживанием для вновь поступающего вызова (LCFS PR).

Отметим, что возможность варьирования матрицами маршрутизации обслуженных и не дождавшихся обслуживания вызовов позволяет учитывать самые разнообразные практические ситуации и снижать необходимым образом нагрузку в «узких местах» исследуемых сетей. А это весьма важно при модернизации уже существующих и проектировании новых информационно-вычислительных сетей.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Малинковский*, *Ю.В*. Сети массового обслуживания с обходами узлов заявками / Ю.В. Малинковский // Автоматика и телемеханика. – 1991. – № 2. – С. 102–110.
2. *Малинковский*, *Ю.В*. Сети с симметричными резервными каналами / Ю.В. Малинковский // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. – 1986. – № 4. – С. 69–77.
3. *Ковалев*, *Е.А*. Сети массового обслуживания с резервными приборами / Е.А. Ковалев, Ю.В. Малинковский // Автоматика и вычислительная техника. – 1987. – № 2. – С. 64–70.
4. *Ковалев*, *Е.А*. Сети массового обслуживания с ограниченным временем ожидания в очередях / Е.А. Ковалев // Автоматика и вычислительная техника. – 1985. – № 2. – С. 50–55.
5. *Malinkovskii*, *Yu.V*. Jackson networks with single-line nodes and limited sojourn or waiting times / Yu.V. Malinkovsky // Automation and remote control. – 2015. – Vol. 76, № 4. – С. 67–79.
6. *Malinkovskii*, *Yu.V*. Stationary probability distribution for states of *G*-networks with constrained sojourn waiting time / Yu.V. Malinkovsky // Automation and remote control. – 2017. – Vol. 564, № 4. – С. 155–167.
7. *Малинковский*, *Ю.В*. Замкнутая сеть Гордона – Ньюэлла с однолинейными полюсами и экспоненциально ограниченным временем ожидания запросов / Ю.В. Малинковский, В.А. Немилостивая // Информатика. – 2023. – Т. 20, № 4. – С. 48–55.
8. *Немилостивая*, *В.А*. Сети Джексона с однолинейными станциями и экспоненциальными ограничениями на времена ожидания требований / В.А. Немилостивая, Ю.В. Малинковский // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2023. – № 6 (141). – С. 92–98.
9. *Гихман*, *И.И*. Теория случайных процессов / И.И. Гихман, А.В. Скороход. – Москва: Наука. – 1972. – Т. II. – 640 с.
10. *Малинковский*, *Ю.В*. Инвариантность стационарного распределения открытой сети обслуживания с экспоненциальным ограничением на время пребывания / Ю.В. Малинковский, С.А. Евмененко // Автоматика и телемеханика. – 2024. – № 9. – С. 93–100.

Поступила в редакцию 02.09.2024.

Информация об авторах

Малинковский Юрий Владимирович – д.ф.-м.н., профессор