Доклады Академии наук СССР
1970. Том 195, № 4

УДК 530.12:531.51

ФИЗИКА

М. Ф. ШИРОКОВ

О НЕКОТОРЫХ ПРИМЕНЕНИЯХ СПЕЦИАЛЬНЫХ КООРДИНАТНЫХ УСЛОВИЙ В ТЕОРИИ ТЯГОТЕНИЯ А. ЭЙНШТЕЙНА

(Представлено академиком Н. Н. Боголюбовым 27 IV 1970)

Как известно, уравнения тяготения А. Эйнштейна

$$G_{ik} = R_{ik} - {}^1/_2 g_{ik} R = -\gamma T_{ik} \tag{1}$$

обладают той замечательной особенностью, что они в силу известных дифференциальных тождеств

$$\delta G^{ik} / \delta x^k = 0 \tag{2}$$

не являются полной системой, определяя из 10 величин g_{ik} только 6. Важность тождеств (2) прежде всего обусловлена тем, что они приводят взятием свернутой ковариантной производной от обеих частей (1) к законам сохранения энергии — импульса $\delta T^{ik} / \delta x^k = 0$. Кроме того эти тождества, предоставляя свободу выбора 4 величин g_{ik} из 10, обеспечивают выбор любых систем координат, что обычно делается добавлением к системе уравнений (1) четырех нековариантных дифференциальных уравнений для g_{ik}. Эти последние обычно называют координатными условиями. Выбор их диктуется удобством рассмотрения и решения тех или иных проблем. Так, например, в астрономии оказались очень полезными координатные условия В. А. Фока [1], определяющие так называемые «гармонические» координаты.

Для дальнейших целей возьмем координатные условия специального вида

$$t_k^4 = 0\ (t_4^k = 0) \quad \text{или} \quad t^{4k} = 0, \tag{3}$$

где t_i^k или t^{ik} — псевдотензоры энергии — импульса гравитационного поля, введенные вариационными методами, как это делал, например, А. Эйнштейна [2], введя функцию Гамильтона и получая свое выражение для t_i^k, или непосредственно используя законы сохранения, вытекающие из (1), как это делали Л. Ландау и Е. Лифшиц [3], давшие свой псевдотензор $\underset{L}{t}^{ik}$. Весьма существенно то, что t_i^k или t^{ik} — не тензоры, следовательно, уравнения (3) являются не ковариантными, и что эти уравнения, вследствие выбора выражений для t_i^k или t^{ik} в согласии с уравнениями (1) не противоречат этим последним.

На первый взгляд, координатные условия (3) кажутся весьма экстравагантными и трудными вследствие их нелинейности при использовании. Однако оказывается, что они автоматически выполняются для ряда точных решений, как-то: Шварцшильда для точечной массы m, включая точку $r = 0$ $(\underset{\varepsilon}{t}_i^k = 0)$, Эйнштейна и Розена [4] для гравитационных волн в вакууме $(\underset{\varepsilon}{t}_i^k = 0)$, Переса [5] $(\underset{\varepsilon}{t}_i^k = \underset{L}{t}^{ik} = 0)$.

По-видимому, в ряде случаев переход к координатам, удовлетворяющим условиям (3), может быть довольно просто осуществлен соответствующим преобразованием координат. Так, например, решения уравнений для плоских волн, распространяющихся в направлении x^1 в приближении слабого поля, даются соотношениями

$$g_{ik} = \delta_{ik} + h_{ik}, \quad \delta_{ik} = \begin{cases} 0, & i \neq k, \\ 1, & i = k, \end{cases} \tag{4}$$

$$|h_{ik}| \leqslant 1, \quad h_{ik} = a_{ik} f(x^1 + ix^4) = a_{ik} f(\xi), \tag{4a}$$

причем отличными от нуля являются лишь

$$h_{22} = h_{33} \neq 0, \quad h_{23} \neq 0. \tag{5}$$

Как показал Эддингтон, только такие волны имеют тензор кривизны Римана $R_{ijkl} \neq 0$.

По Эйнштейну [7] опуская все значки вниз, вследствие условия $|h_{ik}| \leqslant 1$ для таких волн

$$4\gamma t_{ik} = \frac{\partial h_{lm}}{\partial x^i} \frac{\partial h_{lm}}{\partial x^k} - \frac{\delta_{ik}}{2} \left(\frac{\partial h_{lm}}{\partial x^n} \right)^2, \tag{6}$$

и отличными от нуля будут только следующие компоненты гравитационного псевдотензора:

$$t_{11} = \frac{t_{14}}{i} = -t_{44} = \frac{a_{lm}^2}{4\gamma} \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} \right)^2. \tag{7}$$

Переход к координатам, определяемым уравнениями (3), легко осуществляется линейным преобразованием координат

$$x_1' = \alpha x_1 + i\beta x_4, \quad x_4' = \gamma (x_4 - ix_1) \tag{8}$$

с определителем $\Delta = \gamma(\alpha - \beta) \neq 0$, α, β и γ — действительные числа.

Очевидно в этой координатной системе в силу (3) плоские гравитационные волны не имеют энергии и не переносят импульса и энергии.

Исходя из возможности реализации решений уравнений тяготения (1) в системах координат, определяемых уравнениями (3), попытаемся сделать некоторые физические выводы:

А. Для гравитационного поля в вакууме ($R_{iklm} \neq 0$), определяемого решением уравнения (1) без материи в любых координатных системах, переходящих в галилеевские в бесконечности, 4-вектор импульс — энергии гравитационного поля

$$P_i = \int t_i^4 dv = 0, \quad P^i = -\int g t^{i4} dv = 0, \tag{9}$$

где $dv = dx\, dy\, dz$ — пространственный элемент обмена. Это положение верно при выборе координат (3). Но по Эйнштейну [8], согласно [2], для систем с галилеевскими условиями на бесконечности

$$\begin{gathered} P^i = \int -g\,(T^{i4} + t^{i4})\, dv = \text{const}, \\ P_i = \int \left(\sqrt{-g}\; t_i^4 + T_i^4 \right) dv = \text{const} \end{gathered} \tag{10}$$

является общековариантным 4-вектором, чем будет и P_i, определяемый (9), если в (10) положить $T^{ik} = 0$. Таким образом, если уравнения (9) выполняются в одной системе координат с галилеевскими условиями на бесконечности, то они будут иметь место во всех таких координатных системах. Следовательно, уравнения (9) имеют реальный физический смысл. Кроме того, тем самым положение А доказано.

Для иллюстрации его можно воспользоваться точным решением Переса:

$$\begin{gathered} dS^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - dt^2 + 2f(dz + dt)^2, \\ f = \psi(z + t)\varphi(x, y), \\ f_{xx} + f_{yy} = \gamma T_{33} = \gamma T_{34} = \gamma T_{44}. \end{gathered} \tag{11}$$

Как уже было отмечено для этого решения $\underset{e}{t_i^k}$ и $\underset{L}{t^{ik}} = 0$. Поэтому уравнения (9) выполняются для решения (11), если в них полагать $T_{33} = T_{34} =$

$= T_{44} = 0$ и взять для f решение уравнения Лапласа

$$f_{xx} + f_{yy} = 0$$

с галилеевскими условиями на бесконечности. Такое решение может быть взято, например, в форме

$$f = \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} e^{-(z+t)^2}. \tag{12}$$

Арновитт, Дезер и Мизнер [9] указывают, что если для вакуумных решений ($T^{ik} = 0$) уравнений (1) взять граничные условия в форме (4) с $h_{ik} \sim 1/r$ в бесконечности, то интегралы (9) не будут равны нулю. Но хорошо известно [3], что в этом случае согласно (1) должен существовать материальный источник с $T^{ik} \neq \neq 0$ в конечной области пространство — времени или в виде δ-функции для T^{ik} (решение Шварцшильда). Поэтому вакуумные решения уравнений гравитации (1) с $h_{ik} \sim 1/r$ на бесконечности не существуют, не говоря уже о том, что такие решения противоречат уравнению (9) для вакуумных решений.

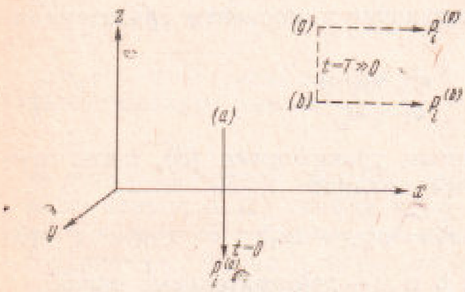

Рис. 1

Другим примером выполнения уравнений (9) может служить решение (1) в приближении слабого поля типа (4) в виде волнового пакета с галилеевскими условиями в бесконечности [10], в котором

$$h_{\mu\nu} = f_{\mu\nu}(r + ix_4)/r, \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}. \tag{13}$$

Важность положения А с физической точки зрения видна из того, что функция Гамильтона $H = t_4^4$ и согласно (9) для поля тяготения в вакууме $H = 0$.

В. Материальная система с $T_{ik} \neq 0$, описываемая решениями (1) с галилеевскими условиями в бесконечности, не может перейти в состояние с такими же граничными условиями путем уменьшения или увеличения своей энергии гравитационным излучением.

Доказательство этого положения удобно дать на основе обсуждения одного примера, рассмотренного в работе [11].

Пусть некоторая материальная система с галилеевскими условиями на бесконечности с 4-вектором $P_i^{(a)} = \int\limits_a (\sqrt{-g}\, T_i^4 + t_i^4)\, dv$ в момент $t = 0$, эволюционируя во времени, испускает пакет гравитационных волн также с галилеевскими условиями на бесконечности с 4-вектором $P_i^{(g)} = \int\limits_g \sqrt{-g}\, t_i^4 dv.$ После испускания пакета она опять к моменту $t = T \geqslant 0$ будет системой с теми же условиями на бесконечности с 4-вектором $P_i^{(b)} \int\limits_b (\sqrt{-g}\, T_i^4 + t_i^4)\, dv$ (рис. 1). Тогда в силу законов сохранения при выборе системы координат в области (g), удовлетворяющих условию (3),

$$P_i^{(g)} = P_i^{(a)} - P_i^{(b)} = \sqrt{-g} \int\limits_g t_i^4 dv = 0. \tag{14}$$

Так как соотношение (14) является общековариантным, то оно будет выполняться в любых системах координат для областей пространства времени (a), (b) и (g) с галилеевскими условиями и на бесконечности. Следовательно, уравнение имеет объективное физическое содержание, не зависящее от выбора координатных систем. Положение (В) тем самым доказано.

Интересно, что авторы использованного здесь примера пытались доказать еще как раз прямо противоположное, делая некорректную оценку $P_i^{(g)} = \sqrt{-g}\int t_i^4 dv$ при помощи формулы для квадрупольного излучения в приближении слабого поля [3].

Московский авиационный институт
им. С. Орджоникидзе

Поступило
25 III 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. А. Фок, Теория пространства, времени и тяготения, М., 1955. [2] A. Einstein, Zitsungsber. preuss. akad. Wiss., 2, 1111 (1916). [3] Л. Д. Ландау, Е. Лифшиц, Теория поля, М., 1967. [4] A. Einstein, N. Rosen, J. Frankl. Inst., 223, 43 (1937). [5] J. Weber, J. Wheeler, Rev. Mod. Phys., 29, 509 (1951). [6] A. Peres, Phys. Rev., 118, 1165 (1960). [7] A. Einstein, Zitsungsber. preuss. Akad. Wiss., 1, 154 (1918). [8] A. Einstein, Zitsungsber. preuss. Akad. Wiss., 1, 448 (1918). [9] R. Arnovitt, E. Deser, C. Misner, Phys. Rev., 120, 313 (1969). [10] М. Ф. Широков, Л. И. Будько, ДАН, 172, 326 (1967). [11] A. Papapetrou, D. Geissler, H. Freder, Ann. Phys., 2, 344 (1959).