Доклады Академии наук СССР
1971. Том 196, № 1

УДК 517.54

МАТЕМАТИКА

В. П. ПЕТРЕНКО

О РОСТЕ Q-ПСЕВДОМЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 8 VI 1970)

1. Неванлинновскую теорию распределения значений мероморфных функций можно рассматривать как теорию, занимающуюся изучением асимптотического распределения a-точек мероморфных функций и их асимптотического роста с помощью исчерпывания всей плоскости или круга $|z| < R$ системами окружностей $\{|z| = r\}$ $(r < R)$. Этот факт позволяет рассмотреть неванлинновскую теорию с более общей точки зрения, которая, в частности, характеризует корректность определения дефектов Р. Неванлинны [1]. Именно, будем исчерпывать область $|z| < R \leqslant \infty$ кривыми $\{\gamma_r\}$, гомеоморфными системе окружностей $\{|z| = r\}$, и изучим асимптотические свойства мероморфных при $|z| < R$ функций на кривых $\{\gamma_r\}$ при $r \to R$ [1].

Эта работа посвящена изучению роста мероморфных функций по специальным семействам кривых $\{\gamma_r\}$, являющихся образами семейства окружностей $\{|z| = r\}$ с помощью Q-квазиконформного отображения $\varkappa(z)$ всей z-плоскости на $\varkappa$-плоскость.

Такие кривые γ_r назовем Q-квазиокружностями [2].

2. Сформулируем теперь предыдущую задачу в другой эквивалентной форме. Прежде всего напомним следующее определение (см. [4], стр. 79—80, [3]).

Определение. Функция $F(z)$, определенная в области D, называется Q-псевдомероморфной (Q-п.м.) в области D, если существует Q-квазиконформное отображение $\varkappa(z)$ области D на область $\Delta = \varkappa(D)$ и мероморфная в Δ функция $\Phi(\varkappa)$ такая, что

$$F(z) = \Phi(\varkappa(z)). \tag{1}$$

Очевидно, изучение роста Q-п.м. при $z \neq \infty$ функции $F(z)$ по окружностям $\{|z| = r\}$ эквивалентно в силу (1) изучению роста мероморфной функции по Q-квазиокружностям $\{\gamma_r\}$. Как отметил Хельстрем [5], для Q-п.м. функций не справедлива первая основная теорема Р. Неванлинны. Этот факт затрудняет выбор характеристики роста Q-п.м. функций.

Всюду дальше будем рассматривать Q-п.м. при $z \neq \infty$ функции (т. е. в (1) $\Phi(\varkappa)$ — мероморфная при $\varkappa \neq \infty$ и $\varkappa(z)$ — Q-квазиконформное отображение z-плоскости на $\varkappa$-плоскость.

В качестве характеристики роста Q-п.м. функции $F(z) = F(re^{i\varphi})$ будем выбирать, во-первых, неванлинновскую характеристику $T(r, \Phi)$ мероморфной функции $\Phi(\varkappa)$, связанной с $F(z)$ соотношением (1) и, во-вторых, величину (см. [6], стр. 26)

$$T(r, F) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} N(r, e^{i\theta}, F)\, d\theta,$$

где $N(r, a, F)$ — функция числа a-точек $F(z)$, определяется обычным способом (см. [7]). Положим далее для Q-п.м. при $z \neq \infty$ функции $F(z)$ (см. [8-10]).

$$\ln^+ M(r, a, F) = \max_{|z|=r} \ln^+ \frac{1}{|F(z) - a|}, \quad a \neq \infty;$$

$$\ln^{+} M(r, \infty, F) = \max_{|z|=r} \ln^{+} |F(z)|;$$

$$\beta_\alpha(a, F/\Phi) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln^{+} M(r, a, F)}{T^\alpha(r, \Phi)}, \quad \alpha > 0;$$

$$\beta_\alpha(a, F) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln^{+} M(r, a, F)}{T^\alpha(r, F)}, \quad \alpha > 0;$$

$$\beta_1(a, F/\Phi) = \beta(a, F/\Phi), \quad \beta_1(a, F) = \beta(a, F).$$

Пусть далее при $\alpha > 0$

$$\Omega^{(\alpha)}(F/\Phi) = \{a\colon \beta_\alpha(a, F/\Phi) > 0\},$$

$$\Omega^{(\alpha)}(F) = \{a\colon \beta_\alpha(a, F) > 0\}.$$

Величину $\beta(a, F/\Phi)$ назовем величиной относительного отклонения Q-п.м. функции $F(z)$ в точке a, величину $\beta(a, F)$ — величиной отклонения $F(z)$ в точке a. Очевидно, в случае, когда $F(z)$ — мероморфная при $z \neq \infty$ функция (1 — п.м.), тогда величины $\beta(a, F/\Phi)$ и $\beta(a, F)$ совпадают с ранее введенными автором величины отклонений мероморфных функций ([2], [10], [11]).

Порядком ρ и нижним порядком λ Q-п.м. при $z \neq \infty$ функции $F(z)$ назовем соответственно величины

$$\rho = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln T(r, F)}{\ln r}, \quad \lambda = \underline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln T(r, F)}{\ln r}.$$

3. Основные результаты этой работы являются некоторыми аналогами известной теоремы Альфорса — Неванлинны (см. ([12]), стр. 17 ([7]), стр. 281) о структуре множества дефектных значений в смысле Ж. Валирона. Далее мы обозначим через E ограниченное множество в a-плоскости, имеющее положительную логарифмическую емкость, а через $\mu(a)$ — распределение единичной массы на E, решающее для E проблему Робена (([7]) стр. 123, 135).

Справедливы следующие утверждения.

Теорема. *Если $F(z)$ — Q-п.м. при $z \neq \infty$ функция конечного нижнего порядка λ, тогда*

$$\int_E \beta_\alpha(a, F/\Phi)\, d\mu(a) = 0,$$

если

$$\alpha > Q(Q+2)/(Q+3).$$

и

$$\int_E \beta_\alpha(a, F)\, d\mu(a) = 0,$$

если

$$\alpha > Q^2(Q+2)/(Q+3).$$

Следствие. *Для Q-п.м. при $z \neq \infty$ функций $F(z)$ конечного нижнего порядка множества*

$$\Omega^{(\alpha)}(F/\Phi) \quad \textit{при } \alpha > Q(Q+2)/(Q+3)$$

и

$$\Omega^{(\alpha)}(F) \qquad \textit{при } \alpha > Q^2(Q+2)/(Q+3)$$

имеют внутреннюю емкость нуль.

Доказательство теоремы использует, с одной стороны, метод, использованный ранее автором ([9], [10]), а с другой стороны, некоторые оценки искажения при Q-квазиконформных отображениях.

Харьковский государственный университет
им. А. М. Горького

Поступило
22 V 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. А. Гольдберг, Доп. к кн. Г. Виттих: Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям, М., 1960. [2] S. Rickman, Duke Math. J., 36, № 4, 387 (1969). [3] A. Mori, Trans. Am. Math. Soc., 84, № 1, 56 (1957). [4] L. Bers, Trans. Am. Math. Soc., 84, № 1, 78 (1957). [5] G. Hällström, Acta Acad. Aboensis. Math. et phys., 21, № 9 (1958). [6] У. Хейман, Мероморфные функции, М., 1966. [7] Р. Неванлинна, Однозначные аналитические функции, М., 1941. [8] В. П. Петренко, ДАН, 184, № 5, 1031 (1969). [9] В. П. Петренко, Изв. АН СССР, сер. матем., 33, № 2, 414 (1969). [10] В. П. Петренко, ДАН, 189, № 4, 718 (1969). [11] В. П. Петренко, ДАН, 187, № 1, 40 (1969). [12] L. Ahlfors, Soc. Sci. Fenn. Comm. Phys.-math., 5, № 16, 1 (1931).